

**UNIVERSIDAD DE MATANZAS
FACULTAD DE EDUCACIÓN**



**TESIS EN OPCIÓN AL TÍTULO DE MÁSTER
EN MATEMÁTICA EDUCATIVA**

**BÚSQUEDA DE PROPOSICIONES
EN LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO**

Autor: Marcos de Jesús Hervis Calderín

Tutor: MSc. Bernardino Alfredo Almeida Carazo.

MATANZAS 2022

"Educar va más allá de la transmisión de conocimientos, hábitos y habilidades (...), educar exige situar al educando en condiciones de poder actuar en el medio que le corresponde vivir (...), es hacer que se convierta en protagonista de su propia educación (...)."

José Martí

DEDICATORIA

A mis padres por haberme dado la bendición de la vida,

A mi esposa e hijo por ser parte de ella.

AGRADECIMIENTOS

A mi tutor, Ms. C. Bernardino Alfredo Almeida Carazo, por su incondicional ayuda confianza, paciencia, constancia y su valiosa enseñanza.

Al claustro de profesores de la maestría en Matemática Educativa, por compartir sus conocimientos de manera profesional, sus exigencias, dedicación y apoyo incondicional.

A todos los mis colegas y amigos que con su apoyo, sugerencias y recomendaciones permitieron la realización de este trabajo.

A mi familia, comprensión, apoyo infinito y ánimo constante.

A todos los que de una forma u otra hicieron realidad este momento.

Resumen

Esta investigación indagó sobre la búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas, con el objetivo de elaborar un sistema de actividades didácticas para favorecer ese proceso. El mismo, se logró satisfactoriamente y se ofrecen como otros resultados: un diagnóstico del estado actual de la búsqueda de proposiciones en alumnos de la muestra; las dimensiones e indicadores utilizados para el estudio, y la metodología que fue implementada. Para cumplir las tareas de investigación diseñadas se utilizó como método filosófico general el materialista - dialéctico con un enfoque Marxista- Leninista, que sustentó al sistema de métodos de carácter teórico, empírico y estadístico. El resultado se valida mediante el criterio de expertos.

ÍNDICE

Introducción	1
Capítulo I. Teoremas matemáticos y sus demostraciones en el proceso de enseñanza aprendizaje..	6
1.1 Teoremas matemáticos y sus demostraciones, contribución a la formación integral del alumno	6
1.2. Teoremas matemáticos y sus demostraciones, su tratamiento en la Secundaria Básica	14
1.3. Búsqueda de proposiciones sobre circunferencia y círculo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática	21
CAPÍTULO II. El proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas en la circunferencia y el círculo en octavo grado: diagnóstico, sistema de actividades didácticas y validación	30
2.1 Estado actual del proceso de búsqueda de teoremas matemáticos en el estudio de la circunferencia y el círculo en la Secundaria Básica	30
2.1.1 Resultados del diagnóstico.....	33
2.2 Sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo	37
2.2.1 Fundamentos del sistema de actividades didácticas para desarrollar la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo	38
2.3 Valoración del sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo	57
Conclusiones	60
Recomendaciones	61
Bibliografía	62
Anexos	66

Introducción

El mundo enfrenta en la actualidad elevados desafíos desde el punto de vista económico, político, social y ambiental, realidad que demanda a la educación formar con prontitud y creatividad un hombre que dé solución a estas problemáticas. Ante estas peticiones sociales, el Ministerio de Educación de la República de Cuba, ha ejecutado en los diferentes niveles de educación transformaciones y ajustes en los programas de las asignaturas para formar y preparar a los niños y adolescentes, para su activa participación en la vida social.

La complicada situación que enfrenta el mundo, es foco de atención y análisis de profesionales y científicos de diferentes áreas cognitivas, coincidiendo la mayoría, en la imprescindible necesidad del "perfeccionamiento de los sistemas educativos, a fin de adecuarlos a las nuevas exigencias y condiciones que hoy se le plantean a la educación en el contexto de dicha complejidad" (Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, 2011, pág. 2).

En la escuela cubana han constituido propósitos de trabajo sistemático y progresivo la búsqueda consecuente de procesos de transformación dirigidos a elevar la calidad de la labor educativa de la escuela en diversos momentos.

En esta labor se incluyen los distintos estudios de perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación, desde la concepción de perfeccionamiento continuo, los cuales operaron en el diseño de aspectos muy importantes, tanto generales del sistema como de su estructura, relaciones entre los subsistemas, el plan de estudio general y particular de las asignaturas, el trabajo metodológico, entre otros (Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, 2011, p. 3).

Se concibe que desde la base de un proceso educativo conducido por el profesor, el perfeccionamiento de su actividad pedagógica profesional, tome como centro al alumno, sus necesidades, vivencias, motivos e intereses. En correspondencia con estas exigencias educativas se propone como fin para la Escuela de Educación General en Cuba el siguiente:

Contribuir a la formación integral de la personalidad del alumno, con un gradual nivel de desarrollo de sus conocimientos, habilidades, motivos, aspiraciones y valores, en correspondencia con los ideales de la Revolución Socialista, expresados en sus formas de sentir, pensar y actuar, que le permita construir de acuerdo con su edad, su proyecto futuro de vida y a la vez garantice su gradual participación protagónica e incondicional en el desarrollo de la sociedad socialista cubana y lo prepare para acceder con eficiencia a la continuidad de estudios (Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, 2011a, pág. 6).

En el currículo del octavo grado la función de la asignatura Matemática se determina del Fin, los Objetivos Generales del Nivel y los Objetivos Generales de ese grado, la cual debe:

contribuir a la educación multifacética de los educandos, al desarrollo de sus capacidades mentales y a la adquisición de conocimientos, habilidades, hábitos, cualidades, convicciones y actitudes, que constituyen base y parte esencial de la formación de ideales patrióticos y humanistas de la sociedad socialista cubana en su desarrollo próspero y sostenible (Acosta, Domínguez y Gort, 2018, p. 1)

La disciplina Matemática para aprovechar mejor sus potencialidades e incidir con ímpetu en la formación integral de los alumnos, proyecta su trabajo en las diferentes educaciones, en la necesidad de producir un cambio en su enfoque metodológico general, apoyándose en “los resultados científicos obtenidos en el campo de las ciencias de la educación y en particular, en la Didáctica de la Matemática, y la rica experiencia pedagógica acumulada en todos estos años en nuestro país” (Álvarez, Almeida, & Villegas, 2014, pág. 7).

El enfoque metodológico general de la disciplina Matemática debe garantizar la educación matemática básica que todo alumno debe asimilar para continuar estudios en el siguiente nivel, demostrando “dominio del sistema de conocimientos y habilidades relacionadas con los siete grandes núcleos temáticos: números, magnitudes, ecuaciones, funciones, geometría, estadística, ideas combinatorias” (Acosta, Domínguez, & Gort, 2018, pág. 1).

En octavo grado del núcleo temático geometría, se realiza su estudio explícitamente en la unidad Geometría plana y cálculo de cuerpos, y se declara sobre su estudio los objetivos y contenidos que deben ser objeto de apropiación por los alumnos de este grado. Precizando para el tratamiento de la circunferencia y el círculo, la resolución de problemas de naturaleza geométrica, relacionados con situaciones de la vida cotidiana y de otras ciencias que exijan esbozar/construir figuras, calcular longitudes de segmentos, amplitudes de ángulos, perímetros, áreas y “problemas de demostración de nuevas propiedades geométricas, que requerirán de la elaboración de conjeturas con ayuda de asistentes geométricos” (Acosta, Domínguez, & Gort, 2018, pág. 4).

Lo declarado en el párrafo anterior, demanda decidir previo al diseño de cada clase las tareas a proponer para que se logren los objetivos propuestos en el programa. Para el trabajo con conjeturas el enfoque metodológico de la asignatura Matemática, precisa que se realicen “exploraciones a partir de casos particulares, elaboren conjeturas y traten de justificarlas, antes de formalizar las ideas en definiciones y teoremas y sus correspondientes demostraciones, para que tengan vivencias de qué significa hacer matemática” (Acosta, Domínguez, & Gort, 2018, pág. 4).

Por la dirección metodológica del Ministerio de Educación se precisa en los documentos oficiales para la planificación del proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura, cómo proceder para la búsqueda de proposiciones y se resalta su importancia como proceso que favorece el desarrollo del pensar, en la

actualidad este propósito en la Secundaria Básica no se alcanza al nivel aspirado. Su conducción demanda utilizar actividades para estimular que los alumnos se entrenen en el uso y apropiación de formas de trabajo y pensamiento para la búsqueda de teoremas (conjeturas o proposiciones) y el empleo de asistentes matemáticos con este fin.

Durante su formación inicial el autor de la tesis, investigó esta problemática y validó en la práctica laboral resultados parciales, los divulgó en su institución educativa en las sesiones de preparación metodológica departamental y colectivo de grado, ofreció curso taller de superación a profesores para la utilización de las TICs, además realizó la defensa de su trabajo de curso y de diploma con éxito con profesores de la especialidad en el departamento de Matemática - Física de la Universidad de Matanzas; estos resultados se presentaron y publicaron en Fórum estudiantil de Ciencias Pedagógicas y en eventos científicos internacionales.

Pero se requiere continuar la investigación de esta problemática y ofrecer vías al profesor para la conducción del proceso de búsqueda de proposiciones. Se constata esa necesidad en el desempeño de los profesores y alumnos, al observar clases sobre tratamiento de teoremas de circunferencia y círculo, al revisar la preparación de asignatura y en las carencias expresadas por los profesores de la asignatura. En los documentos oficiales revisados para la conducción de este proceso, se pueden enriquecer las acciones sugeridas.

Los elementos apuntados destacan la importancia del estudio del tema en la Secundaria Básica cubana, además el hombre de estos tiempos para lograr un desarrollo científico que le permita aplicarlo en las distintas esferas de la vida, necesita plantearse hipótesis, conjeturar y emitir proposiciones. El autor centra la investigación en la búsqueda de proposiciones relacionados con la circunferencia y el círculo, planteándose como problema científico, ¿Cómo contribuir al proceso de búsqueda de proposiciones en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas? Una vez definido el problema se declara como objeto de estudio el proceso de enseñanza aprendizaje de los teoremas matemáticos y sus demostraciones en la Secundaria Básica y como campo de acción el proceso de búsqueda de proposiciones sobre circunferencia y círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas. Para resolver el problema declarado se asume como objetivo de la investigación, elaborar un sistema de actividades didácticas que apoye la búsqueda de proposiciones sobre circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas. Para cumplir el objetivo declarado en esta investigación se plantean las siguientes preguntas científicas:

1. ¿Cuáles son los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de los teoremas matemáticos en Secundaria Básica?
2. ¿Cuál es el estado actual de la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo en octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas?
3. ¿Qué sistema de actividades didácticas conformar para la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas?
4. ¿Qué resultados se obtienen de la aplicación del criterio de expertos para la validación teórica del sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado?

Para dar solución a las preguntas científicas declaradas y resolver el problema declarado, se ejecutan las siguientes tareas de investigación:

1. Sistematización de los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de los teoremas en la Secundaria Básica.
2. Caracterización del estado actual de la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo en octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas.
3. Elaboración de un sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas.
4. Validación teórica mediante el criterio de expertos del sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado.

La investigación se sustenta en la dialéctica materialista como método general del conocimiento, integrador y regulador de todo el proceso investigativo, que permitió estudiar el problema en su multilateralidad, dinamismo y nexos sistémicos con los diversos elementos que integran el objeto de estudio y el campo investigado. Su aplicación exigió la utilización de métodos del nivel teórico, empírico y estadístico.

Del nivel teórico se utilizó el analítico-sintético para el estudio de los fundamentos teóricos que sustentan el tratamiento de teoremas, también para el análisis e interpretación de los resultados obtenidos en los instrumentos y técnicas aplicados.

Se empleó el método inductivo-deductivo para la fundamentación del problema de investigación y la propuesta de solución, así como lograr la generalización del estudio y la posibilidad de la implementación

del sistema de actividades didácticas para contribuir al proceso de búsqueda de proposiciones en el estudio de la circunferencia y el círculo.

El método histórico - lógico permitió conocer las tendencias en el tratamiento de teoremas en su acontecer histórico en general, mientras que lo lógico se utiliza en el análisis de las principales vías empleadas en el proceso de búsqueda de proposiciones, lo que permitió distinguir las tareas principales de cada etapa de la búsqueda, para dilucidar su funcionamiento y conocer las barreras de su aprendizaje.

El método de modelación garantizó conformar el sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones sobre circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas.

Los métodos del nivel empírico se aplicaron para constatar el estado actual de la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo. El análisis documental facilitó el estudio de la documentación relacionada con el problema, permitiendo el estudio a profundidad del tema.

El autor utilizó la observación de clases para constatar cómo se favorece la búsqueda de proposiciones en las clases de matemática relacionadas con circunferencia y círculo.

Para indagar cómo los profesores de Matemática planifican y dirigen el proceso de búsqueda de proposiciones en el estudio de la circunferencia y el círculo en octavo grado se les realiza una entrevista. Se aplica una prueba pedagógica inicial para conocer las fortalezas y carencias de los alumnos en las habilidades que se plantean en el programa del grado con relación al proceso de búsqueda de proposiciones.

El criterio de expertos fue útil para obtener de la comunidad científica un consenso sobre los objetivos de las etapas y acciones del sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones sobre circunferencia y círculo, lo cual posibilitó la realización de los ajustes pertinentes en su diseño. Los instrumentos fueron sometidos al análisis cuantitativo y cualitativo con la utilización de métodos de la estadística descriptiva.

La novedad científica de esta investigación está dada por la integración de los elementos teóricos fundamentales que contribuyen a la búsqueda de proposiciones sobre circunferencia y círculo, como: las formas de trabajo y pensamiento fundamentales de la ciencia matemática; los procedimientos heurísticos, que apoyan además la realización consciente de actividades mentales complejas y exigentes; y en la elaboración de actividades que desarrollan las relaciones interdisciplinarias, y su impacto en la enseñanza - aprendizaje de la matemática en la Secundaria Básica "Cándido González", municipio, Matanzas.

La significación práctica de los resultados está dada en ofrecer un sistema de actividades didácticas, que servirá como modelo en la Secundaria Básica para contribuir al perfeccionamiento del proceso de búsqueda de proposiciones en las clases de matemática, además se ofrecen procedimientos metodológicos al profesor de Matemática para dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje de los teoremas en la Secundaria Básica.

Capítulo I. Teoremas matemáticos y sus demostraciones en el proceso de enseñanza aprendizaje
Este capítulo expone los fundamentos teóricos y metodológicos generales para dar solución al problema científico, en correspondencia con la respuesta que se ofrece a la primera pregunta científica declarada en el diseño teórico metodológico. Se definen los conceptos y categorías que se relacionan de manera directa e indirecta con el objeto y el campo de la investigación y se sistematiza lo referente a la historicidad del problema científico declarado. Se asumen las posiciones que expresan los criterios y concepciones del autor en su quehacer científico.

1.1 Teoremas matemáticos y sus demostraciones, contribución a la formación integral del alumno
La Matemática es una asignatura que contribuye a la educación integral de los alumnos y garantiza la educación matemática básica que requiere adquirir para la continuidad de estudios, a partir del dominio del contenido que corresponde aprender en cada grado de la educación general, de manera que se logre desarrollar las capacidades mentales generales y específicas “que constituyen base y parte esencial de la formación de ideales patrióticos y humanistas de la sociedad socialista cubana” (Acosta, Domínguez, Gort, 2018, p. 1), en correspondencia con la máxima del Héroe Nacional, que enuncia el papel de la educación para la vida:

Educación es depositar en cada hombre toda la obra humana que le ha antecedido; es hacer de cada hombre resumen del mundo viviente, hasta el día en que vive; es ponerlo al nivel de su tiempo; para que flote sobre él, y no dejarlo debajo de su tiempo, con lo que no podría salir a flote; es preparar al hombre para la vida. (Martí, 1975, p. 281)

De esta arraigada concepción martiana se deriva la tarea principal de la educación cubana contemporánea que exige la formación de un ciudadano capaz de orientarse y actuar consecuentemente en un universo marcado por los resultados de los constantes avances y transformaciones de la ciencia y la tecnología, lo que demanda a la educación enormes desafíos.

La necesidad de la educación científica de todos los ciudadanos, para situarlos a la altura de la época en que viven, exige prestar atención a la formación integral de los alumnos. La escuela y los profesores

adquieren una elevada responsabilidad en este sentido, al recibir directamente el encargo social de formar a las nuevas generaciones en una concepción científica del mundo que les permita actuar consecuentemente ante las diversas y complejas exigencias de la sociedad.

Las matemáticas pueden y deben contribuir al desarrollo de la capacidad del individuo de aplicar conceptos, teoremas, relaciones, formas de trabajo y pensamiento para interpretar y comprender al mundo; el desarrollo del pensamiento crítico para fomentar un ciudadano autónomo que pueda criticar, justificar y validar resultados. Ya no es posible enseñar matemáticas como un conjunto de teorías rígidas, acabadas e incambiables.

“El desarrollo histórico de la Matemática nos muestra que los conocimientos matemáticos, surgidos de las necesidades prácticas del hombre mediante un largo proceso de abstracción, tienen un gran valor para la vida” (Ballester et al., 1992, p. 4). Cada día la aplicación del contenido matemático, de sus métodos de trabajo y pensamiento, juegan un papel decisivo en el desarrollo de investigaciones y solución de problemas en todas las esferas del saber de la humanidad.

No caben dudas de las múltiples posibilidades que brinda el estudio de las matemáticas para el desarrollo multilateral de la personalidad de los alumnos, razones que exigen enseñarla de manera que sirva para la vida y se aprenda a través de la vida. Una matemática que brinde apoyo a la formación de seres humanos integrales y al mejoramiento de la calidad de vida de la sociedad.

Para ello, la visión de la forma tradicional de enseñar matemáticas debe cambiarse “al mostrar cómo la matemática favorece el desarrollo de valores y actitudes acordes con los principios de la Revolución, posibilita comprender y transformar el mundo, y propicia la formación de una concepción científica de este” (Álvarez, Almeida, Villegas, 2014, p. 1).

Para el logro de esa concepción científica y transformadora del mundo, es necesario alto sentido crítico y ético en los alumnos, que tengan una formación integral técnica, científica, social y humanista, para poder dar respuestas a las crecientes exigencias a las que se enfrentarán en la vida profesional como ciudadanos y seres humanos. De manera que se dé respuesta a la perspectiva de la formación integral fundamentada en cinco componentes: ético, pedagógico, científico, humanístico y tecnológico.

En esta investigación se asume lo planteado por la Didáctica de la Matemática en relación con los aspectos instructivos y educativos que comprenden los objetivos de la enseñanza de la Matemática lo cual expresa el estrecho vínculo entre la instrucción y educación como principio didáctico. Se aspira que mediante la enseñanza de la Matemática, el alumno se forme en valores y aprenda las teorías matemáticas, al considerar los aspectos cognitivos, afectivos y sociales, de manera que contribuya al desarrollo del

pensamiento y propicie la realización de operaciones mentales como: analizar y sintetizar, comparar y clasificar, abstraer y concretar, particularizar y generalizar.

La formación que se adquiere al estudiar matemáticas podría verse en forma integral, en varios sentidos: como conocimiento elemental y de cultura general; como motora del desarrollo de las capacidades de deducción, comparación, clasificación y orden; finalmente como preparación y estímulo para continuar, cuestionar y ser críticos e investigar.

Es esencial en la formación matemática básica, desarrollar el pensamiento de los alumnos, para lo cual no basta con plantearles tareas que demanden la realización de las operaciones mentales, según Ballester et al. (2018) se requiere además,

1. Elevar sistemáticamente las exigencias, para su realización, de los ejercicios y problemas planteados.
2. En caso de no aparecer en los alumnos indicios de la ejecución de las operaciones deseadas, hay que propiciar su realización mediante estímulos adecuados.
3. Hacer tomar conciencia a los alumnos de las operaciones ejecutadas. (p. 17)

En los fundamentos de la Didáctica de la Matemática de la escuela cubana actual, se le concede un lugar especial al desarrollo del pensamiento en general y al desarrollo de formas específicas del pensar matemático. Cabe citar el pensamiento lógico-deductivo, creativo con fantasía, geométrico espacial, final o estratégico, el algorítmico, el funcional matemático.

Estas formas específicas del pensamiento contribuyen de manera inevitable a la formación lingüística y a la racionalización mental de los alumnos durante el proceso de resolución de una tarea matemática (Ballester, et al., 2018), unidas a las operaciones lógicas del pensamiento y a las formas fundamentales de trabajo y pensamiento de la ciencia matemática: consideraciones de analogía, variación de condiciones y búsqueda de relaciones y dependencias.

La enseñanza de la Matemática contribuye al pensamiento creativo y la fantasía cuando los alumnos participan activamente en la búsqueda de nuevos conocimientos y relaciones entre ellos y de ideas para la solución de ejercicios y problemas. Hay que dar oportunidad a los alumnos de buscar, analizar y discutir diferentes modos de proceder, diferentes vías de solución, diversas posibilidades de introducir variables y modelar situaciones. De esta forma se contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, el cual requiere una elevada dosis de creativa.

Por creatividad se asume "un tipo de actividad humana compleja, encaminada a la obtención o reproducción de nuevos valores materiales o espirituales" (Ballester et al., 2018, p. 23). Ella se manifiesta en la disposición y capacidad de los alumnos para trabajar independiente e individualmente, con

originalidad y racionalidad para el análisis de situaciones y soluciones a problemas y en su capacidad para transferir los conocimientos, hechos y fenómenos conocidos a situaciones nuevas.

La fantasía y la creatividad están relacionadas. En la matemática la fantasía está caracterizada por "la posibilidad de transferir y modificar las ideas con originalidad; de interpretar hechos y fenómenos dando riendas sueltas a la imaginación de manera que se reflejen relaciones entre elementos y componentes aparentemente no vinculados" (Ballester et al., 2018, p. 23).

Se considera por el autor de esta tesis que el tratamiento de teoremas tiene entre otras, posibilidades para contribuir al desarrollo del pensamiento creativo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, al proponer tareas dirigidas a buscar nuevas proposiciones, modelar demostraciones para probar la veracidad de las proposiciones, con la aplicación creadora de lo aprendido, para formular y plantear nuevos problemas y proposiciones matemáticas. Estudios realizados aseveran la necesidad de promover e incitar la comprensión de la tarea antes de su resolución, para estimular "la interacción del alumno con el texto del problema, de modo que entienda, interprete y le permita resolver con independencia" (Cuesta, Pino y Almeida, 2022, p. 142)

El logro de esta aspiración mediante el estudio de los teoremas y sus demostraciones, exige del profesor su estructuración detallada para que pueda ser ejecuta por los alumnos y se sientan interesados en realizarlo. Es necesario que se cuide el empleo de la terminología y simbología matemática, resaltando la entrega y esfuerzos realizados por hombres y mujeres consagrados al estudio de esta ciencia y sobre sus resultados, se ha erigido la teoría matemática actual.

Es así, que la estructura lógica de cada teoría matemática está compuesta por conceptos, proposiciones y procedimientos. Las proposiciones constituyen el fundamento para el trabajo con teoremas y demostraciones. Se considera que las proposiciones "son aquellas ideas expresadas mediante frases gramaticales, que tienen la propiedad de ser verdaderas o falsas" (Jungk, 1981, p. 7), por otra parte la Dra. C. Marta María Álvarez Pérez señala que la "expresión en un lenguaje formalizado o mediante una oración enunciativa de un juicio es lo que se conoce por proposición" (2003, p. 9). Asumiendo que el juicio es la forma del pensamiento abstracto en que se afirma o niega algo respecto a la existencia de objetos, las relaciones entre un objeto y sus propiedades o las relaciones entre objetos. Desde punto de vista de la lógica, saber trabajar con juicios reclama determinar su carácter veritativo (su valor de verdad), transformarlos en otros semánticamente equivalentes o incluso, poder modificarlos.

Según el Doctor Carlos Sánchez (1982, p. 27) una proposición, es cierto tipo de estructura, que en matemática, expresa bien la afirmación o la negación de propiedades y entes matemáticos, así como las

relaciones entre ellos y mayormente estas proposiciones tienen un valor veritativo bivalente (son verdaderas o falsas), que en la historia de la matemática se describe la designación de Aristóteles como principio del tercer excluido (*tertiumnondatur*).

Según Jiménez (2010), una proposición es "la expresión en un lenguaje formalizado o mediante una oración enunciativa de un juicio que es necesariamente verdadera o falsa" (p. 11). Las proposiciones se pueden clasificar en simples y compuestas.

Son simples las que expresan algo de manera absoluta o categórica, y compuestas, las que combinan dos o más proposiciones simples. Las proposiciones compuestas se obtienen mediante la conexión de proposiciones simples mediante los llamados conectores lógicos: no, o, y, sí,...entonces, sí y solo sí, los cuales generan un nuevo concepto para estas proposiciones compuestas: función proposicional. (Jiménez, 2010, p. 12)

A criterio de Jiménez (2010), las funciones proposicionales son: negación, alternativa, conjunción, condicional (implicación), bicondicional (equivalencia), estas consisten en:

Negación: se utiliza la palabra no para construirla mediante la negación de la oración enunciativa. Su valor de verdad es contrario al de la proposición inicial.

Alternativa: Se utiliza la letra o para unir dos proposiciones simples. Su valor de verdad es falso solo cuando las dos proposiciones simples son falsas, para el resto de las combinaciones es verdadera. En el lenguaje común la o puede ser o no excluyente.

Conjunción: se utiliza la letra y para unir dos proposiciones simples. Su valor de verdad es verdadero solo cuando las dos proposiciones simples son verdaderas, para el resto de las combinaciones es falsa.

Condicional (implicación): se utiliza la forma gramatical si ..., entonces..., donde lo que sigue al si se le llama premisa y lo que sigue a entonces conclusión, es falsa solo en el caso en que la premisa es verdadera y la conclusión es falsa. Se dice que la premisa es condición suficiente para la conclusión y la conclusión es condición necesaria para la premisa.

Recíproco de una condicional: es la condicional que tiene como premisa la conclusión y como conclusión la premisa. Por medio de los recíprocos se pueden obtener condiciones además de necesarias, también suficiente y viceversa.

Contrarrecíproco: es un recíproco que se forma con las negaciones de la premisa y de la conclusión.

La condicional y su contrarrecíproco toman los mismos valores lógicos, no así la condicional y su recíproco. Por ello en las demostraciones matemáticas directas es utilizado el contrarrecíproco como una vía de demostración de una proposición.

Bicondicional (equivalencia): es la proposición formada con la condicional y su recíproco. Se utiliza la expresión, "...sí y solo sí...", donde lo que antecede al primer sí es tanto premisa como conclusión al igual que lo posterior al segundo sí. Es verdadera solo cuando tanto la premisa como la conclusión tienen el mismo valor lógico. (pp. 12-15)

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la Secundaria Básica la obtención de proposiciones se realiza por dos vías esenciales: la inductiva y la deductiva. En la vía inductiva se parte del planteamiento de una hipótesis que se debe verificar. En la deductiva, se comienza con la deducción de la proposición.

La base de la obtención de proposiciones son los razonamientos, estos se consideran como una forma de pensamiento mediante la cual se obtiene una nueva proposición a partir de otras ya conocidas y pueden ser deductivos o inductivos.

El razonamiento deductivo es aquel en que la conclusión resulta necesariamente de las premisas. En estos razonamientos juegan un papel esencial las inferencias, que pueden ser: mediatas cuando se infiere una conclusión de dos proposiciones verdaderas, ligadas por un término medio, e inmediatas cuando se pasa de un juicio verdadero a otro también verdadero y se deriva una regla de inferencia.

En las inferencias se ponen de manifiesto las reglas que pueden ser de tres tipos: de separación, de refutación y del dilema constructivo simple o diferenciación de casos. En el razonamiento inductivo se pasa de un juicio de menor a otro de mayor universalidad, o sea, por inducción se pasa de lo particular a lo general.

Un caso especial de proposiciones lo constituyen los teoremas, cuya verdad se demuestra. En matemáticas es toda proposición que, partiendo de un supuesto, afirma una racionalidad no evidente por sí misma.

Un teorema es un enunciado que puede ser demostrado como verdadero mediante operaciones matemáticas y argumentos lógicos, es una proposición teórica, enunciado o fórmula que incorpora una verdad, axioma o postulado que es comprobada por otras teorías o fórmulas. Un teorema también es una regla o ley que se expresa en forma de ecuaciones y/o fórmulas matemáticas que pueden ser expresados en lenguaje formalizado.

Varios didactas e investigadores han caracterizado los teoremas matemáticos como un tipo de proposición, "las proposiciones matemáticas verdaderas son axiomas o teoremas matemáticos" (Jungk, 1981, p. 9). En la teoría matemática recibe el nombre de teorema "las proposiciones verdaderas más importantes de la teoría" (Ballester et al., 1992, p. 321), por otra parte el Dr. Carlos Sánchez (1982, p. 27)

expresa que el teorema es una “proposición demostrable a partir de otra(s) y cuyo enunciado consta de un supuesto o hipótesis y una conclusión o tesis”. Un teorema es una “proposición que requiere de demostración” (Soto, 2011, p. 144). En la enciclopedia Wikipedia se expresa que un teorema es “una proposición verdadera demostrable lógicamente partiendo de axiomas o de otros teoremas ya demostrados, mediante reglas de inferencia aceptadas” (Fundación Wikimedia, 2013).

Existen criterios coincidentes en estos autores en que los teoremas matemáticos son proposiciones verdaderas y su veracidad puede ser demostrada. El “procedimiento justificado para determinar el valor de verdad de una proposición, se llama demostrar” (Ballester et al., 1992, p. 321). Este procedimiento consiste en considerar que: sea X un sistema de axiomas; una demostración de un teorema H_0 es una sucesión finita de proposiciones $H_1, H_2, \dots, H_n, H_0$ que satisface para cada término H_i una de las siguientes condiciones:

- H_i pertenece a X , o
- H_i puede obtenerse a partir de proposiciones verdaderas precedentes o de expresiones contenidas en X , con el empleo de reglas de inferencia lógica.

Se ofrecen varias consideraciones sobre el demostrar. El diccionario Grijalbo señala: “evidenciar algo mediante argumentación” (Editorial Grijalbo, 2008, p. 184). En el texto de Metodología de la Enseñanza de la Matemática se caracteriza por “el procedimiento legítimo para determinar el valor de verdad de una proposición” (Ballester et al., 1992, p. 321). Alfaro et al. (2020), expresa: “en un sentido amplio, la demostración consiste en una prueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes, es un razonamiento convincente con el que se corrobora la veracidad de una proposición” (p. 57).

La demostración, en la ciencia matemática, es la forma fundamental que ella tiene de asegurarse de la veracidad de sus enunciados. La teoría de la demostración es incluso una disciplina de la lógica matemática y es conjuntamente con la refutación y la realización de inferencias reductivas, un procedimiento lógico asociado a los razonamientos.

En la literatura consultada, se evidencia falta de unicidad de criterios en torno a la clasificación de las demostraciones matemáticas. En esta investigación, se adopta la clasificación de demostración de teoremas matemáticos en directas o indirectas, que responde a la estructuración de las demostraciones. Para ejemplificar estos tipos de demostraciones, se trabajará solo con proposiciones implicativas; es decir, de la forma si...entonces..., pues, en general, los teoremas están (o admiten ser) enunciados de esa forma.

La demostración de un teorema matemático se denomina directa si, a partir de las premisas o hipótesis, se arriba a la veracidad de la tesis después de realizar una cantidad finita de pasos basados en reglas de inferencia lógicas (deductivas); en caso contrario la demostración se denomina indirecta. Se asume la estructura de una demostración directa expuesta por (Ballester y et al., 1992, p. 327).

La regla de inferencia lógica que orienta una demostración directa es si de un sistema de expresiones X y de la expresión H_1 puede deducirse la expresión H_2 , entonces es válida la expresión $H_1 \rightarrow H_2$.

Cuando se pretende demostrar un teorema matemático, debe meditarse qué forma de demostración utilizar: directa o indirecta, para lo cual no es posible ofrecer una pauta general; no obstante, en algunas situaciones sugerentes, se consideran casos en los que es pertinente la demostración directa:

- La demostración mediante la construcción de ejemplos o de contraejemplos.
- La demostración mediante la diferenciación de casos.
- Inducción completa.

En la demostración indirecta “se supone verdadera la negación lógica de la proposición a demostrar y se verifica que esta suposición conduce a una contradicción (...) con la teoría anterior o con la propia suposición inicial. De ahí, se infiere que lo supuesto es falso” (Ballester et al., 1992, p. 329). Se asume la estructura de una demostración indirecta expuesta por (Ballester et al., 1992, p. 330).

La explicación de la estructura formal de las demostraciones indirectas resulta más complicada que el razonamiento que las sustenta. El razonamiento es sencillo y con cierta frecuencia se emplea incluso en la vida cotidiana.

Algunas situaciones sugerentes para una demostración indirecta mediante reducción al absurdo son:

- Necesidad de demostrar el recíproco de un teorema.
- Necesidad de demostrar un teorema cuyo enunciado sea una proposición existencial negada, o sea, una expresión del tipo: “No existe x tal que...”.
- Necesidad de demostrar un teorema de existencia, de unicidad o de existencia y unicidad.

El tratamiento a las diferentes operaciones con conceptos matemáticos asociados, así como el dominio de las relaciones que se establecen entre ellos, implica la búsqueda de diferentes vías de demostración de teoremas matemáticos, de modo que se logre en los alumnos un aprendizaje caracterizado por independencia y creatividad, razonamiento lógico y habilidades para la búsqueda, de manera heurística, de soluciones a los ejercicios y problemas de demostración, de esta manera se contribuye a la formación integral del alumno, de ahí la necesidad del estudio de los teoremas matemáticos y sus demostración en la Secundaria Básica, aspectos a tratar en el próximo epígrafe.

1.2. Teoremas matemáticos y sus demostraciones, su tratamiento en la Secundaria Básica

El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática ha sido y es objeto de constantes transformaciones en aras de lograr una preparación matemática más eficiente de los alumnos. Estos cambios han ocurrido en todas las educaciones del Sistema Nacional de Educación (SNE), muy especial en la Secundaria Básica.

En Cuba, los primeros intentos de perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática fueron realizados por la doctora Dulce María Escalona Almeida (1901-1976) y sus colaboradores en la década de los años 50 del siglo XX. El contexto histórico-político-social del país limitó dichos esfuerzos.

Con el perfeccionamiento del SNE en la segunda mitad de la década de los años 70 se introdujeron cambios significativos en los programas de Matemática en Cuba, que permitieron la asimilación de una nueva didáctica de la asignatura, fundada en sólidas bases científicas y con una marcada intención hacia el desarrollo de la personalidad de los alumnos.

Como parte de estos cambios, varios fueron los enfoques didácticos desarrolladores propuestos para la enseñanza de la Matemática, los que caracterizaron el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura, entre ellos: "La enseñanza de la Matemática a partir de células generadoras, de Herminia Hernández Fernández; La enseñanza de la Matemática mediante sistemas de ejercicios, de Félix Muñoz Barrios y La enseñanza problémica de la Matemática, de Paúl Torres Fernández" (Torres, 1996, p. 2).

A partir del curso escolar 1989-1990 los principales cambios en los programas de Matemática, se basan en la aparición de las orientaciones metodológicas dirigidas a los profesores, incluyéndose una unidad de sistematización de conocimientos en el último grado de cada nivel de la enseñanza media.

Con las nuevas transformaciones de la enseñanza media iniciadas en 1999 y extendidas en 2002 en el modelo educativo y la estructura organizativa de la Secundaria Básica, continuaron el perfeccionamiento de los programas de estudio, los que implicaron el traslado de contenidos que anteriormente pertenecían a esta enseñanza, a la vez que estos cambios repercutieron en los componentes didácticos, al incorporar los recursos de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TICs), en especial de la televisión, el video y el empleo de software educativos.

Los cambios en los programas de Matemática de la Secundaria Básica están dirigidos a ello, concretados en las indicaciones metodológicas generales de la asignatura Matemática al realizar precisiones de los objetivos a lograr finalizado este nivel educativo.

Para cumplir la función asignada a la Matemática, esta requiere ser desarrollada con un enfoque metodológico general, el cual se declaró a partir del curso escolar 2004-2005, al establecer las ideas claves o lineamientos de la asignatura Matemática, con el propósito de ofrecer una guía para el trabajo de profesores, metodólogos y directivos en su quehacer cotidiano. Dichos lineamientos son válidos para los distintos niveles educativos y demanda su implementación desde cada actividad de trabajo metodológico, para que la clase cumpla con las exigencias requeridas y fomente el interés de los alumnos hacia la matemática.

Al respecto, el tercer y noveno lineamiento para el trabajo metodológico (Álvarez, Almeida, Villegas, 2014), expresa que el profesor debe:

Potenciar el desarrollo de los alumnos hacia niveles superiores de desempeño cognitivo, mediante la realización de tareas cada vez más complejas, de carácter interdisciplinario, y el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y la creatividad; y para ello utilizar las tecnologías, incluida las de la informática y la comunicación, con el objetivo de adquirir conocimientos y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con fines heurísticos. (pp. 1-2)

En el curso escolar 2005-2006 se elaboraron nuevos programas de Matemática para la Secundaria Básica. En sus indicaciones metodológicas aparece una versión perfeccionada de los lineamientos de la asignatura, que trataron de reflejarse de manera consecuente en los objetivos generales y demás componentes de estos documentos rectores, así como en las teleclases, videoclases y otros materiales elaborados.

En el cuarto lineamiento que orienta hacia la reflexión, el análisis de los significados y formas de representación de los contenidos, el establecimiento de sus relaciones mutuas, entre otras consideraciones, se pone de manifiesto en la práctica, cuando el alumno es capaz de realizar exploraciones a partir de casos particulares, elaboren conjeturas y traten de justificarlas, antes de formalizar las ideas en definiciones y teoremas matemáticos y sus correspondientes demostraciones, para que tengan vivencias de qué significa hacer matemática. En este sentido,

Se debe estimular en las clases que los alumnos aprendan, entre otras cuestiones, a: preguntar, buscar ejemplos y contraejemplos, plantear y justificar conjeturas, reflexionar al analizar: ¿qué pasaría si...? (Por ejemplo: ¿qué pasaría si en lugar de "a veces", asumimos que una determinada relación se cumple "siempre"; qué otras condiciones deben cumplirse para que la proposición así modificada sea verdadera?), ¿por qué esto es así?, ¿por qué no puede ser de otra manera? establecer diferencias y semejanzas, buscar argumentos. En esta relación aprenderán a obtener nuevas proposiciones a partir de otras originales y diferenciar razonamientos inductivos y deductivos (Álvarez, Almeida, Villegas, 2014, p. 17).

En esta investigación, se asume el componente didáctico contenido del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en su sentido amplio conformado por cuatro sistemas, a saber: sistema de conocimientos, sistema de habilidades y hábitos, sistema de la experiencia de la actividad creadora y el

sistema de las normas y relaciones con el mundo, tal y como lo asume la Didáctica de la Matemática de la escuela cubana (Ballester et al., 2018, p. 53), en la cual se considera a los teoremas matemáticos y sus demostraciones como parte del sistema de conocimientos.

En consecuencia, la asimilación del contenido matemático fortalece la instrucción, el desarrollo y la educación de los alumnos, en consonancia con los objetivos que se plantean en los programas de Matemática. El concebir el contenido de enseñanza en un sentido amplio, es una premisa importante para contribuir de manera efectiva al logro de los objetivos de la enseñanza de la Matemática, por tanto, es objeto de apropiación y base para el desarrollo de la personalidad de los alumnos.

En 2010 se le orientó por la dirección del Ministerio de Educación (MINED) a la Subcomisión Nacional de Matemática, la realización de un diagnóstico de programas y libros de texto de la asignatura Matemática en todos los niveles educativos, a partir de lo cual se ha emprendido un trabajo de mejora de estos, con acciones de diferentes alcances, apoyado en documentos normativos emitidos por el Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP) y el MINED, los que constituyen preámbulo al proceso de perfeccionamiento del SNE iniciado en el año 2014.

Es por ello que se realizaron cambios sustanciales, con la preservación de lo positivo aplicado a inicios de este milenio: proyección de nuevos programas para la Secundaria Básica, perfeccionamiento de las líneas directrices de la enseñanza de la Matemática y su contextualización, ejecución de la preparación metodológica en ocho horas semanales como mínimo, el papel protagónico de las comisiones de asignatura desde la escuela hasta el nivel nacional, la implementación del sistema de evaluación y la actualización del Programa Director de la Matemática.

A partir del 2014, se inició la experimentación pedagógica del proceso de perfeccionamiento educacional, como parte del tercer perfeccionamiento del SNE, los cambios más importantes que se propusieron para el sistema educativo se concentran en tres grupos: cambios generales del SNE, cambios en las formas de trabajo de las instituciones y modalidades educativas, y cambios curriculares. Los cambios curriculares abarcan cambios en los planes y programas de estudios de todos los niveles educativos, disciplinas y asignaturas que lo compone. Las principales transformaciones en la disciplina Matemática se centraron en:

- La integración de los componentes formativos de manera explícita e implícita, desde los objetivos y contenidos, fundamentalmente, a partir de la resolución y formulación de problemas.
- Los contenidos se organizan en líneas directrices y transitan por diferentes niveles de precedencia: se inician, se definen, se sistematizan, se aplican y se amplían. Se incorporan, de manera dosificada, todos los ajustes pertinentes que durante los últimos años han surgido. El eje central de la concepción general del trabajo en la asignatura lo constituye la formulación y resolución de problemas.

- Se orientan situaciones de aprendizaje donde se utilicen software para la simulación y generalización de relaciones entre objetos matemáticos de manera dinámica e interactiva. (Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, 2013, p. 21)

Los nuevos programas de la disciplina Matemática, elaborados a partir del 2014, logran una concepción unitaria basada en las líneas directrices, principios que sustentan la selección y ordenamiento del contenido de las unidades en los programas de la asignatura Matemática para cada grado y cuya articulación en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática se basan en el enfoque metodológico general de la asignatura, a partir de sus lineamientos de trabajo, como ideas que permiten cumplir la misión de la Matemática dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de manera que alcance la calidad requerida.

Las líneas directrices, como uno de los pilares en que se erige la Didáctica de la Matemática en la escuela cubana, se ajustaron a los cambios surgidos dialécticamente en el desarrollo de la sociedad y el pensamiento. La aprobación de los ajustes realizados fue sometida a consultas sucesivas de especialistas y didactas cubanos, que por su importancia para la concepción y elaboración de los nuevos programas en el III Perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación y en el trabajo de planificación del profesor en las diferentes educaciones.

Se conciben dos grupos de líneas directrices, el primero relativo a conocimientos, habilidades y formas de pensamiento matemático específicas y el segundo a habilidades, capacidades y hábitos matemáticos de carácter más general, que requieren también del desarrollo de cualidades, convicciones y actitudes. (Álvarez, Almeida, Villegas, 2014, p. 33-34)

La realización de las líneas directrices se entrelaza al impartir las diferentes unidades, lo cual favorece el tratamiento de teoremas matemáticos y su demostración. La línea directriz Geometría en particular, ofrece muchas posibilidades para ello, de acuerdo a los objetivos de los programas de Matemática en la Secundaria Básica:

- Obtener por vía reductiva y demostrar algunos de los criterios suficientes para la igualdad y semejanza de triángulos, de las partes del teorema de las transversales, o de las proposiciones del grupo de teoremas de Pitágoras, haciendo una adecuada utilización de la terminología y simbología matemáticas.
- Formular y resolver ejercicios y problemas intra y extramatemáticos que conduzcan a la estimación, medición y cálculo aproximado de magnitudes geométricas de figuras en el plano y el espacio, aplicando sus propiedades y relaciones, los movimientos del plano, los teoremas estudiados (de las transversales, de igualdad y semejanza de triángulos y del grupo de teoremas de Pitágoras) y las razones trigonométricas, de manera que se favorezca el análisis y evaluación de las vías más racionales y se puedan hacer valoraciones sobre situaciones relacionadas con la vida cotidiana, otras asignaturas, la ciencia, la técnica y el arte.

- Formular y demostrar conjeturas y resolver ejercicios de demostración que exijan verificar propiedades y relaciones de figuras geométricas en el plano y el espacio, utilizando cuando resulte conveniente un asistente de geometría dinámica y aplicando los conocimientos sobre las figuras conocidas, los movimientos, el teorema de las transversales (sus tres partes) y los criterios de igualdad y semejanza de triángulos, de modo que se propicie el análisis y la evaluación crítica de las ideas geométricas con ayuda de la terminología y simbología propias de la asignatura. (Álvarez, Almeida, Villegas, 2014, p. 82)

De acuerdo a estos objetivos, se selecciona el sistema de conocimiento siguiente para lograr su cumplimiento.

- Ángulos en la circunferencia. Propiedades y teoremas asociados a las relaciones entre ángulos, cuerdas y arcos. Teorema de Tales.
- Igualdad de figuras geométricas. Teoremas que proporcionan criterios suficientes para la igualdad de triángulos. Construcción de triángulos.
- Proporcionalidad de segmentos. Interpretación geométrica. Teorema de las transversales (sus tres partes). Teoremas recíprocos. Aplicaciones al cálculo de las longitudes de segmentos, la determinación del paralelismo de rectas y la construcción de segmentos que están en una razón dada, entre otras de valor práctico.
- Semejanza de figuras. Mapas y escalas. Teoremas que proporcionan criterios suficientes para la semejanza de triángulos. Razón de semejanza. Razón de semejanza entre perímetros y áreas de triángulos semejantes.
- Grupo de teoremas de Pitágoras. Teoremas recíprocos. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Resolución de triángulos rectángulos. (Álvarez, Almeida, Villegas, 2014, p. 83)

Otra línea directriz de gran importancia en el tratamiento de los teoremas matemáticos y sus demostraciones es el Adiestramiento lógico lingüístico, la cual está estrechamente vinculada con: operar con conceptos matemáticos, argumentar matemáticamente, comunicar utilizando la terminología y simbología matemáticas y trabajar con representaciones de objetos matemáticos. (Álvarez, Almeida, Villegas, 2014, p. 100)

Los alumnos al ingresar en la Secundaria Básica se capacitan para expresar argumentos con mayor rigor, claridad y coherencia, con el uso adecuado de la terminología y simbología matemáticas. Distinguen entre varios tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas), profundizan en qué es una demostración matemática y en qué difiere de otros tipos de razonamiento y reproducen y realizan demostraciones, lo que permite incrementar su conocimiento sobre los métodos matemáticos que existen para ello.

Se declaran tres niveles de desarrollo en la habilidad argumentar matemáticamente en operaciones que deben asimilar los alumnos gradualmente, al enfrentar la resolución de diferentes tareas; tales como: explicar, describir, formular, justificar, valorar, generalizar, argumentar y demostrar proposiciones matemáticas por distintos métodos, plantear preguntas típicamente matemáticas, vinculadas a estas

operaciones, tales como: ¿cómo se puede generalizar?, ¿qué pasaría si...? (Álvarez, Almeida, Villegas, 2014, pp. 103-104); (Valdivia, 2016, p. 5).

Las exigencias a lograr en relación con la argumentación matemática en la Secundaria Básica se expresan en los objetivos siguientes:

- Plantear preguntas y conjeturas, así como justificar estas últimas.
- Identificar en mayor medida la estructura de proposiciones que surgen mediante la composición de otras y sus implicaciones desde el punto de vista de su valor veritativo.
- Explicar el proceso seguido en la resolución de ejercicios y problemas sobre la base de sus ideas matemáticas y sus correspondientes representaciones.
- Fundamentar sus respuestas o conclusiones estableciendo relaciones entre sus conocimientos matemáticos.
- Identificar distintos tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, entre otras).
- Saber qué es una demostración matemática y comprender el proceso de demostración de la veracidad de una proposición por el método directo e indirecto.
- Realizar y evaluar ejercicios de demostración que requieran la concatenación de varios argumentos. (Álvarez, Almeida, Villegas, 2014, p. 105)

Los alumnos deben comprender por qué un ejemplo único o genérico no es suficiente para demostrar la validez de una proposición matemática y por qué esta se tiene que asegurar por vía deductiva. Igualmente deben asimilar que hay diferencias significativas en la forma de exponer sus razonamientos de manera cotidiana y en la de efectuar una demostración: en la ciencia matemática la realización de una cadena de inferencias debe realizarse en un orden estricto.

Con frecuencia, la dificultad que presentan los alumnos no radica en el conocimiento de los argumentos, sino en su selección, organización y secuenciación para escribir la demostración. Por eso es conveniente realizar tareas, en las cuales los alumnos seleccionen, ordenen, desechen o completen los argumentos que se necesitan, hasta llegar a que, dada una demostración, determinen qué fue lo que se demostró.

En una demostración los alumnos deben atender a la estructura de la proposición a demostrar. Ellos deben conocer lo que significan expresiones: si..., entonces..., o... si y solo si... y cuándo una condición es necesaria, suficiente o necesaria y suficiente. También deben asimilar la diferencia de expresiones como: a lo sumo, exactamente, como mínimo, al menos, como máximo, entre otras de uso frecuente en la disciplina Matemática y comprender en un texto matemático el significado de palabras que se utilizan en función de cuantificadores y conectores lógicos, las que poseen un papel determinante para conferirle a un enunciado un valor veritativo.

Se debe lograr en la escuela que gradualmente los alumnos reconozcan la estructura de las demostraciones; que en la demostración directa se avanza paso a paso desde los argumentos a la tesis

mediante un número finito de inferencias, que en la indirecta, la veracidad de la tesis se fundamenta a partir de la falsedad de la antítesis. Además, deben saber que la demostración indirecta se utiliza para demostrar el recíproco de una proposición, en la cual la proposición original se usa como medio de demostración, en demostraciones de unicidad y en la negación de proposiciones existenciales.

Sin embargo, para llegar a este punto, deben saber estudiar por el libro de texto y otras fuentes, desarrollar su tenacidad y perseverancia en la lectura y comprensión de textos matemáticos, dados de forma verbal, escrita o visual, haber desarrollado muchas argumentaciones informales como anticipación a las más formales, estar habituados a justificar por qué algo se cumple o no se cumple, a representar y comunicar sus ideas de forma oral, escrita y analizar los fundamentos de cada inferencia que se realice y de cada procedimiento que se utilice, de modo que puedan reconocer errores lógicos y de conceptualización matemática.

El autor de esta tesis insiste en la necesidad de estimular constantemente en las clases el adiestramiento lógico lingüístico de los alumnos, de manera que logren operar con conceptos, representar objetos matemáticos, formular nuevos, comunicar y argumentar sus ideas con claridad y precisión, utilizando la terminología y simbología matemáticas. En los alumnos es necesario que se logre al operar con conceptos y textos matemáticos la lectura comprensiva, la transformación y codificación, para que "contextualicen los símbolos y expresiones que describen determinadas situaciones matemáticas" (Romero, 2018, p. 66)

Se debe concientizar por los alumnos en las clases, la valía del uso de la terminología y la simbología matemáticas utilizada, para poder establecer de forma unívoca el significado de las proposiciones matemáticas y reconocer la estructura de estas, que el desarrollo del adiestramiento lógico-lingüístico ayuda a fomentar su curiosidad y espíritu inquisitivo, hay que entrenar la búsqueda de patrones y regularidades y entrenarse en a desarrollar argumentos, cuestionar ideas y valorar la discusión y el debate grupal como vías para reflexionar y aprender de otros.

El análisis realizado permite acercarse al proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, según las exigencias de su enfoque metodológico general y la necesidad a nivel mundial de un progresivo perfeccionamiento de dicho proceso. Otro elemento impulsor de este interés, es la creciente matematización del mundo actual, en el que se pretende que el ciudadano del siglo XXI sea capaz de:

- "tomar decisiones comparando y analizando datos estadísticos;
- interpretar el significado de proposiciones con contenido matemático y sus implicaciones para la supervivencia humana; y de

- resolver problemas donde tenga que emplear conocimientos matemáticos” (Suárez, Duardo y Rodríguez, 2020, p. 120).

La asignatura Matemática en la Secundaria Básica debe garantizar la preparación requerida para la continuidad en la Educación Preuniversitaria, lo cual está determinado por los objetivos y contenidos que son objeto de enseñanza en ella que, a pesar de su variedad, se pueden agrupar en torno a determinados núcleos esenciales de contenido.

Los conceptos y métodos de estos núcleos esenciales se entrelazan unos con otros. En la enseñanza de la Matemática, el tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones constituye una de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática (STEM). Estas fueron definidas como

La clase (clase de abstracción) de todas aquellas situaciones reales en la enseñanza de una o de varias asignaturas, que poseen semejanza con respecto a determinados parámetros esenciales, especialmente, con respecto a la estructura de los objetivos y la estructura objetivo-materia; por eso, estas situaciones permiten un proceder semejante en la aplicación de una determinada estrategia de conducción y de los procedimientos metodológicos organizativos. (Zilmer, 1981, p. 155)

Por ellos, se requiere de un trabajo metodológico en la Secundaria Básica que garantice el tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones, en particular la búsqueda de proposiciones sobre circunferencia y círculo, a la vez que contribuya al cumplimiento de los objetivos generales de la asignatura Matemática y específicamente los relacionados con la unidad de Geometría plana y cálculo de cuerpos en octavo grado. A este propósito se dedica el epígrafe siguiente.

1.3. Búsqueda de proposiciones sobre circunferencia y círculo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática

El tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones en la Secundaria Básica ofrece amplias posibilidades para el desarrollo del pensar, estimula “el desarrollo de formas de pensamiento matemático que revelen flexibilidad mental, reflexión crítica, tenacidad, perseverancia, la posibilidad de elaboración y justificación de conjeturas, razonamientos y generalizaciones” (Acosta, Domínguez, Gort, 2018, p. 8). Al profesor el tratamiento de esta STEM le exige dominar el contenido matemático, estar capacitado para la aplicación de reglas de inferencias, saber utilizar los métodos de demostración y otros recursos de la lógica bivalente.

Al concebir las clases se debe lograr que los alumnos expliquen un proceder seguido, la fundamentación de los resultados alcanzados, la evaluación de la validez de ideas aportadas u obtenidas por diferentes vías que requieran la argumentación matemática, la comunicación utilizando la terminología y simbología

matemáticas, el uso de recursos para la racionalización del trabajo mental y práctico, incorporar para ello tecnologías de la información y las comunicaciones.

En el tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones se acompaña de un intenso trabajo heurístico, se distinguen tres procesos parciales dirigidos a: buscar proposiciones, hallar demostraciones y representar estas últimas en un texto comprensible.

1. Búsqueda de la proposición (teorema): se realizan acciones encaminadas a encontrar y enunciar la proposición.
2. Búsqueda de una demostración: se reflexiona en torno a los contenidos matemáticos, métodos, procedimientos (principios, reglas y estrategias heurísticos) que pudieran ser útiles para asegurar la veracidad de la proposición. Se propone un plan para la demostración.
3. Representación de la demostración: se ponen en práctica los recursos utilizados y concebidos en el plan elaborado. aplicación de las reglas de inferencias requeridas y fundamentación de los pasos necesarios, para lograr una exposición comprensible.

Por su relevancia para el desarrollo de esta investigación, el autor insiste que se le aclare a los alumnos que el tratamiento de teoremas, se inicia con la búsqueda de una proposición y el teorema posee tres características distintivas "es verdadera; es una proposición; su veracidad se acepta solo mediante una demostración" (Martínez, 2020, p. 372).

La búsqueda de una proposición y su demostración puede realizarse por vía deductiva o por vía reductiva. La decisión de emplear una u otra, está en dependencia del tiempo previsto en los programas de Matemática, el nivel de jerarquía del teorema matemático dentro de un sistema teórico, los intereses de los alumnos, sus motivos, sus conocimientos previos, así como la complejidad del contenido. Las denominaciones de estas vías se corresponden con la clasificación de los métodos de enseñanza, según la vía lógica de obtención de un nuevo conocimiento. Existen diferencias entre la vía deductiva y la reductiva. En la vía deductiva, en la búsqueda de la proposición (del teorema) se hace uso de reglas de inferencia lógicas, de manera que, cuando se obtiene el enunciado del teorema, al mismo tiempo su valor de verdad está asegurado. En esta vía, los procesos parciales: búsqueda del teorema y búsqueda de una demostración se superponen, es decir, ocurren simultáneamente.

Por el contrario, en la vía reductiva, al enunciado de la proposición se arriba por medio de consideraciones de analogía, generalizaciones, mediciones, formación de recíprocos, por lo que validez de la proposición formulada no está asegurada, es necesario realizar una demostración. Una vez demostrado que la proposición es verdadera, esta adquiere carácter de teorema.

El programa de Matemática de octavo grado, en la unidad Geometría plana y cálculo de cuerpos, declara en el tercer objetivo lo que se debe lograr en el trabajo con proposiciones

Formular conjeturas y resolver ejercicios de fundamentación y demostración a partir de los cuales los educandos se puedan plantear nuevas interrogantes, al aplicar las propiedades y relaciones de figuras geométricas básicas incluida la circunferencia y el círculo y los criterios de igualdad de triángulos, de modo que se propicie el análisis, explicación y evaluación crítica de ideas geométricas con ayuda de la terminología y simbología propia de la asignatura. (Acosta, Domínguez, Gort, 2018, p. 15)

El alcance del objetivo no aspira encontrar una proposición y demostrar si es un teorema, va más allá, aspira que los alumnos se apropien de los métodos y formas de trabajo para la búsqueda, "el objetivo principal del tratamiento de teoremas no radica en buscar uno u otro teorema y demostrarlo, sino de capacitar a los alumnos para que ellos puedan buscar y demostrar teoremas" (Zillmer, 1981, p. 216).

El autor de la investigación es del criterio que para lograr que los alumnos puedan buscar y demostrar teoremas, hay que entrenarlos en:

- Comprender las proposiciones acerca de las relaciones, las aplicaciones y los objetos, desde el punto de vista de su contenido con el empleo adecuado de la simbología y terminología matemáticas.
- Buscar y enunciar proposiciones por sí mismo en correspondencia con los objetivos generales de la enseñanza de la Matemática en el grado.
- Aplicar las proposiciones de la unidad en la resolución de tareas teóricas y prácticas.
- Fundamentar o comprobar las conjeturas halladas con su participación activa y estimulación de la actividad mental.

En la unidad Geometría plana y cálculo de cuerpos del programa de Matemática de octavo grado, se declara con respecto al tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones como exigencias de la evaluación, las siguientes habilidades:

- Determinar el valor veritativo de proposiciones geométricas.
- Formular recíprocos y contrarrecíprocos de teoremas y reconocer condiciones necesarias, suficientes y necesarias y suficientes.
- Elaborar conjeturas sobre propiedades y relaciones de las figuras geométricas y entre los cuerpos geométricos, apoyándose en los instrumentos de dibujo y los asistentes matemáticos.
- Reproducir y realizar demostraciones sencillas y ejercicios de demostración. (Ministerio de Educación, 2020, p. 17)

El considera pertinente por el autor de la investigación incorporar otras exigencias, a las antes expuestas, que tengan mayor intención sobre el tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones, tales como:

- Reflexionar con mayor independencia sobre el proceso de búsqueda de teoremas matemáticos y sus demostraciones.
- Resolver ejercicios de fundamentación y demostración para plantear nuevas interrogantes (proposiciones), al aplicar las propiedades y relaciones de figuras geométricas básicas, incluida la circunferencia y el círculo.
- Obtener proposiciones matemáticas a partir de la posibilidad de visualizar, experimentar, explorar o simular para descubrir regularidades con el uso de los asistentes matemáticos.

La unidad Geometría plana y cálculo de cuerpos en octavo grado, propone un fondo de tiempo de 29 horas clases (h/c) para su estudio. Los contenidos se organizan en dos unidades temáticas, cada una con epígrafes y una asignación de horas clases para su desarrollo. Se exponen a continuación.

Unidades temáticas y epígrafes que incluyen (tiempo asignado en horas)

2.1 Ángulos en la circunferencia (15 h/c)

Repaso sobre la circunferencia y el círculo. Elementos y propiedades. (1 h/c)

Definición de ángulo central. Amplitud de un arco de circunferencia. Propiedades y teoremas asociados a las relaciones entre ángulos, cuerda y arcos. (5 h/c)

Definición de ángulo inscrito. Propiedades y teoremas asociados a las relaciones entre ángulos y arcos. Teorema de Tales. (6 h/c)

Definición de ángulo seminscrito. Teorema sobre la amplitud del ángulo seminscrito. Teorema relación ángulo inscrito-seminscrito-central. (3 h/c)

2.2 Longitud de la circunferencia y área del círculo (14 h/c)

Definición de polígono inscrito y circunscrito. Circunferencia inscrita y circunscrita. Teorema sobre la existencia de polígonos regulares inscritos y circunscritos. (2 h/c)

Estimación de la longitud de la circunferencia: medición directa y aproximación mediante el perímetro de los polígonos regulares inscritos. El número f como razón de la longitud de la circunferencia y el diámetro. Expresión para calcular la longitud de la circunferencia. Determinación de la longitud de un arco de circunferencia. Dependencia funcional de la longitud de la circunferencia respecto al radio. Representación de datos en un sistema de coordenadas. (6 h/c)

Estimación del área del círculo. Aproximación mediante el área de polígonos regulares inscritos. Expresión para calcular el área del círculo. Determinación del área del anillo o corona circular. El área del sector circular y el trabajo con gráficos de pastel. Trabajo en el laboratorio de computación. (6 h/c) (Ministerio de Educación, 2020, p. 16)

En esta unidad se realiza explícitamente la línea directriz Geometría, relativa a conocimientos, habilidades y forma de pensamiento matemático específicas y permite a los alumnos

Resolver problemas de naturaleza geométrica de la práctica social sobre la base de la estimación, medición, comparación y cálculo de cantidades de magnitud, la construcción de figuras geométricas con los instrumentos de dibujo o asistentes matemáticos y la argumentación (incluida la demostración) de propiedades y relaciones. (Acosta, Domínguez, Gort, 2018, p. 37)

En la distribución del contenido se aprecian varios teoremas matemáticos a asimilar por los alumnos y lograr el cumplimiento de los objetivos que se proponen para la unidad, antes mencionados.

La estructuración metodológica del proceso parcial búsqueda de la proposición (teorema) al que se dirige esta investigación, el autor de esta tesis considera que su implementación es trabajosa, demanda de una preparación metodológica detallada, las clases por lo general requieren de más tiempo para su desarrollo y su conducción reclama maestría pedagógica. Sin embargo, es un momento de interés didáctico, en él los alumnos se apropian de las vías que conducen a la formulación de proposiciones.

En este momento se demanda del profesor estimular el pensar, utilizar como medio fundamental la conversación de clase, la que debe estructurar y conducir eficazmente según el principio de las exigencias decrecientes, el cual consiste en

Plantear inicialmente las preguntas y los impulsos de la forma más general y exigente posible, y solo en la medida que los alumnos no puedan responder a ese nivel de exigencia se decrecen los niveles de exigencia en sus formulaciones, se incrementa la ayuda del profesor (Torres, 2014, p. 215).

El profesor debe conocer para su implementación que este principio tiene extremos, uno de exigencia máxima y otra mínima. El primer impulso o momento de máxima exigencia, es después de plantear la tarea, el profesor permanece silente y da tiempo a los alumnos para que piensen y razonen; el nivel de exigencia cero, consiste en preguntar exactamente lo que se quiere que él responda, cuando se han agotado todas las posibilidades de ayuda plausibles. Investigaciones en esta área han comprobado que varios alumnos, poseen conocimientos matemáticos, pero no logran establecer relaciones entre ellos y aplicarlos ante una tarea asignada, en este caso "se requiere de una actuación del profesor inicialmente como modelo y posteriormente como orientador del proceso" (Carrasco, 2012, p. 12).

Este proceso potencia la asimilación por los alumnos de procedimientos heurísticos y formas de trabajo y pensamiento matemático, motiva la necesidad de la búsqueda de nuevos conocimientos (proposiciones) y posibilita recordar el enunciado exacto del teorema. Resulta razonable señalar, que no hay tiempo en

clases para realizar la búsqueda de cada teorema, hay que contentarse para obtener aquellos de mayor relevancia ya sea por la vía deductiva o reductiva.

Por la vía de la reducción, los "procedimientos heurísticos esenciales para la obtención de teoremas" (Torres, 2000, p. 34) son: descubrir analogías, generalizar resultados por inducción (a partir de casos particulares), inversión de la problemática (formular recíprocos), medir y comparar en figuras dadas y construidas (medir longitudes de segmentos o amplitudes de ángulos para encontrar relaciones entre ellos al comparar).

Las consideraciones de analogía conviene establecerlas cuando se presenta una situación desconocida para ser resuelta, pero con anterioridad se han estudiado contenidos matemáticos y se han buscado relaciones con los cuales es conveniente "asociar o establecer ciertas semejanzas o parecido de contenido o formas de trabajar y pensar" (Almeida, Valdivia, 2009, p. 7) que pueden ser utilizadas y llegar de esa manera a nuevas suposiciones (proposiciones).

La generalización por inducción es un procedimiento que se emplea con frecuencia en la búsqueda de teoremas, consiste en el análisis de una serie de resultados (casos) particulares y se llega a la suposición de que existe una relación general. La suposición (resultado) se obtiene por una generalización empírica, se induce la relación apoyándose en la intuición (percepción clara, sagaz, lúcida)

La generalización de un teorema puede realizarse por reducción de sus premisas (se prescinde de alguna condición) o por ampliación de la tesis. Este procedimiento descarta determinadas condiciones y se llega a un nuevo resultado (suposición) que requiere ser demostrado. Por lo general, es posible obtener suposiciones para un conjunto de objetos, fenómenos o relaciones, a partir del análisis de un caso especial o particular.

Si se amplían las premisas de un teorema dado, se emplea el método de consideración de casos especiales. "Todo caso especial de un teorema es igualmente un teorema" (Pietzsch, G. & et al., 1982, p. 149).

La formación de recíprocos de teoremas se procede por la inversión de la estructura del teorema, es decir, se intercambia la tesis de un teorema y su premisa (o una de sus premisas). En caso de que un teorema posea varias premisas, entonces tendrá también varios recíprocos verdaderos o falsos.

Un procedimiento que incentiva la investigación de relaciones en objetos (operaciones o fenómenos) son las mediciones experimentales (amplitudes y longitudes), cuando se varía alguna condición, se observan cambios entre sus elementos, varían las condiciones (existen ciertas dependencias) de manera que se motive la necesidad de realizar pruebas (experimentos) para medir y comparar en cada caso y explicar el

comportamiento que se manifiesta (se formula la suposición). "aparece, muy frecuentemente asociado al principio de movilidad" (Ballester y et al., 1992, p. 233).

Para obtener proposiciones (teoremas) se utilizan "procedimientos heurísticos que se le denominan esenciales: medir y comparar, generalizar a partir de casos particulares, analogía e inversión de la problemática" (Torres, 2000, p. 34).

Al variar las condiciones por la realización de una transformación geométrica de figuras o cuerpos, se provocan cambios en la nueva situación (figura o cuerpo), lo que estimula la búsqueda de relaciones y dependencias. Esta transformación conduce a nuevos resultados (suposiciones), es de utilidad para la obtención de fórmulas de cálculo.

Otra posibilidad para la búsqueda de suposiciones es "mediante la realización de ejercicios apropiados que los alumnos realizan en clases o en su estudio individual... cuyo resultado es la proposición" (Ballester y et al., 1992, p. 339). Estos ejercicios se denominan ejercicios portadores de información, es una clase de problema para el estudio de un nuevo contenido matemático, lo que se indica en los lineamientos del enfoque metodológico general de la asignatura" (Álvarez, Almeida, Villegas, 2014, p. 1).

Este proceso parcial búsqueda de la proposición (teorema) debe ser resuelto como un problema y aplicar el Programa Heurístico General. En cada fase del Programa Heurístico General se ejecutan acciones que el profesor debe ajustar al tipo de problema y estimular su empleo y aplicación por los alumnos.

En la orientación hacia el problema, ocupa un lugar central, la creación de motivos en los alumnos. La motivación, se basa en la necesidad de encontrar una regularidad desconocida para ellos hasta el momento. Esta primera fase culmina planteando la necesidad y el carácter de la regularidad que se desea encontrar.

El trabajo en el problema, requiere encontrar una idea de solución y elaborar un plan para su realización. Demanda la precisión del objetivo de la búsqueda, según las condiciones en que esta se desarrolla (contenidos matemáticos que se poseen vinculados a la regularidad y tareas que se han resuelto con anterioridad). Corresponde a esta fase la reflexión sobre los métodos y procedimientos que se emplearán al elegir la vía reductiva o deductiva.

Se utilizan en la búsqueda de la vía de solución procedimientos heurísticos esenciales que apoyan la realización consciente de estas acciones: confeccionar figura de análisis, trazar líneas auxiliares, recordar teoremas del dominio matemático, movilidad, medir y comparar, analogía, búsqueda de relaciones y dependencia y generalización. Se aplican "estrategias de trabajo hacia adelante, con lo dado y lo que

sabes, y hacia atrás con lo buscado para conectarlos mediante inferencias, formando una cadena donde cada inferencia y su premisa forman un eslabón” (Jiménez, 2013, p. 28)

La solución del problema, se alcanza al formular la regularidad deseada como proposición, ejecutando las ideas concebidas, métodos elegidos y del plan de solución. Este enunciado debe reflejar su estructura lógica a primera vista, no ser extenso y expresar el contenido matemático correctamente con una estructura gramatical sencilla.

En la evaluación de la solución y de la vía, se realiza un análisis retrospectivo de los métodos y procedimientos empleados en la obtención de la proposición formulada, con la finalidad de valorar críticamente la vía para la búsqueda de la proposición (teorema) y se reflexiona en la necesidad de una demostración. Conviene propiciar “espacios para que se critiquen y autocritiquen las soluciones de sus compañeros y las suyas, de manera que se promueva la auto reflexión del proceso utilizado, la autovaloración y el autocontrol de la validez de la solución obtenida” (Almeida & Aportela, 2019, p. 340). Eventualmente se realizan en esta fase otros análisis sobre el enunciado de la proposición y el lugar que esta ocupa dentro de la teoría estudiada.

Para lograr la ejecución correcta de cada una de estas fases y la asimilación del contenido se deben emplear medios de enseñanza que visualicen, racionalicen y hagan más asequible este proceso. Entre ellos se destacan algunos que tienen mayor incidencia como: hojas de trabajo, libro de texto, asistentes matemáticos.

Las hojas de trabajo son apropiadas para la búsqueda de proposiciones y sus demostraciones, pues dan la posibilidad al profesor de presentar esquemas y tablas para organizar los resultados de mediciones de longitudes y amplitudes, permiten completar figuras con el trazado de líneas auxiliares, que hacen posible una actividad independiente y reflexiva de los alumnos, en lograr el objetivo deseado, manteniéndose el profesor como facilitador. Favorecen la estructuración racional y efectiva de este proceso y apoyan la elaboración del nuevo conocimiento.

El libro de texto de Matemática es un medio de enseñanza especial dentro de las clases, permite contribuir a la adquisición y fijación de conocimientos, habilidades y hábitos, motivar y estimular determinadas actuaciones de los alumnos en el proceso de aprendizaje, racionalizar el trabajo del alumnos y del profesor en la clase y fuera de ella, facilitar el control y el autocontrol del profesor y del alumno, respectivamente y ofrecer información a los alumnos.

Los asistentes matemáticos permiten realizar actividades de aprendizaje que posibilitan a los alumnos visualizar, experimentar, explorar o simular para descubrir regularidades “resulta un elemento motivador

tanto para profesores como para alumnos por las bondades que ofrece, permitiendo experimentar variando hipótesis, realizando conjeturas sobre posibles resultados o variando condiciones iniciales" (Rodríguez, 2003, p. 56), permite la aplicación de principios heurísticos como el de medir y comparar y el de la movilidad para buscar proposiciones. El empleo de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática favorece "la aplicación de procedimientos lógicos para hacer conjeturas, generar ideas, experimentar y poder nutrirse de relaciones sociales virtuales interactivas en grupos con un fin en común" (Ballester y et al., 2018, p. 131).

Las formas organizativas juegan un papel importante dentro del proceso de enseñanza aprendizaje, al crearlos espacios curriculares en los que se encuentran profesores y alumnos para desarrollar este proceso en un determinado escenario docente. La forma fundamental de organización de la enseñanza es la clase, ella constituye la actividad principal en que se materializan planes y programas de estudio de cada grado "es la actividad educativa donde más frecuentemente interactúan el profesor y sus alumnos" (Torres, 2013, p. 12). En ella toman vida todos los componentes del proceso de enseñanza aprendizaje, la relación objetivo-contenido-métodos-medios marca su lógica interna. Su tipología es diversa según la función didáctica predominante: de tratamiento del nuevo contenido, de desarrollo de habilidades y hábitos, de ejercitación, de profundización, de sistematización, de aplicación, de repaso, de control y combinada. En cada una se manifiesta la unidad de la instrucción y la educación.

Por ello, las clases se organizan en sistemas y unidades, atendiendo a criterios científicos y metodológicos, es decir, forman un todo armónico desde el punto de vista de los componentes personales y personalizados del proceso, para contribuir al cumplimiento de los objetivos curriculares y a la función social de la escuela.

Se han descrito las incidencias que tienen en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática los diferentes componentes de este. Conocer si se han alcanzado las aspiraciones, metas trazadas y los aspectos que requieren de atención pedagógica para perfeccionarlos, es tarea primordial del profesor que proporciona la información necesaria para efectuar la evaluación del aprendizaje, el cual constituye otro componente del proceso de enseñanza aprendizaje.

La evaluación se define en su sentido más amplio como: como un componente esencial que parte de la definición de los objetivos y concluye con la determinación del grado de eficiencia del proceso, dado por la medida en que la actividad de profesor y alumnos, haya logrado como resultados los objetivos propuestos. En síntesis, se plantea que la evaluación es el componente del proceso de enseñanza aprendizaje mediante el cual se constata el grado de cumplimiento de los objetivos.

Por medio de los diferentes tipos de evaluación sistemática el profesor controla el desempeño de los alumnos durante el proceso de búsqueda: calidad de las respuestas a preguntas formuladas, los comentarios realizados, la ejecución paso a paso de un procedimiento, la valoración colectiva sobre el resultado obtenido y otras formas. Debe promover que los alumnos reconozcan las fuentes de sus errores y provocar conflictos cognitivos que los ayuden a superarlos por sí mismos, o reconstruir los procedimientos requeridos.

Conclusiones del capítulo 1

Elegir una u otra variante metodológica para la búsqueda de una proposición (teorema), requiere del profesor conocer la situación real de sus alumnos y realizar valoraciones didáctico metodológicas individuales y colectivas para la planificación de ese proceso, tales como: dominio del contenido matemático (profesor y/o alumnos), empleo de reglas de inferencia lógicas, conocimientos de los métodos para el trabajo con proposiciones (teoremas), en particular de procedimientos de carácter heurístico, exigencias de los objetivos del programa de la asignatura o de la disciplina. Estos elementos en la práctica pedagógica deben concretarse, para que los alumnos se entrenen y se apropien de métodos para la búsqueda y demostración de proposiciones matemáticas. Sin un entrenamiento con actividades que estimulen la comprensión, el uso y la apropiación de estas formas de pensar, no se logrará su aplicación consciente por los alumnos. Enunciar una proposición (teorema matemático) y representar (explicar) los pasos de la demostración, no garantiza su comprensión y asimilación.

Capítulo II. El proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas en la circunferencia y el círculo en octavo grado: diagnóstico, sistema de actividades didácticas y validación

El capítulo muestra el diagnóstico del estado actual del proceso de búsqueda de proposiciones en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio Matanzas, a partir de las dimensiones e indicadores determinados, así como la fundamentación y estructura del sistema de actividades didácticas elaborado para contribuir a dicho proceso y se ofrece la valoración teórica del criterio de los expertos.

2.1 Estado actual del proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en la Secundaria Básica

Para realizar la caracterización del estado actual fue necesaria la operacionalización de la variable, que incluyó la conceptualización y la determinación de las dimensiones e indicadores.

Para esta investigación se define la variable: “búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo” como el proceso de orientación para precisar las condiciones y características que posibiliten iniciar el trabajo de búsqueda de la proposición, con el empleo de métodos reductivos o deductivos que conduzcan a enunciar la proposición, así como evaluar la vía empleada para evidenciar la necesidad de demostrar o no su validez.

Dimensión I. Orientación hacia la búsqueda de la proposición (OBP).

Esta comprende la creación por el profesor de motivos en el alumno hacia la búsqueda de una proposición útil y necesaria, de manera que se precisen condiciones y características previas del contenido matemático sobre la circunferencia y el círculo en octavo grado vinculados a la nueva proposición.

Indicadores

1. Creación de una motivación hacia la búsqueda.
2. Precisión de las condiciones y características de la proposición.
3. Determinación de condiciones previas del campo matemático a que corresponde la proposición.

Dimensión II. Trabajo en la búsqueda de la proposición (TBP).

El propósito esencial es la determinación de los métodos y procedimientos a utilizar en la búsqueda de la proposición, así como los contenidos matemáticos que se requieren y el enunciado de la proposición.

Indicadores

1. Precisión de los métodos y procedimientos a implementar.
2. Búsqueda de los contenidos matemáticos a aplicar.
3. Enunciado de la proposición.

Dimensión III. Evaluación de la vía empleada (EVE).

Se realiza el análisis final de la proposición obtenida, mediante consideraciones retrospectivas de los métodos y procedimientos empleados, con la finalidad de valorar críticamente la vía utilizada para la búsqueda de la proposición y su correspondencia con el objetivo planteado, evidenciar la necesidad de demostrar la proposición.

Indicadores:

1. Análisis retrospectivo de los métodos y procedimientos implementados.
2. Ajuste de la proposición enunciada con el objetivo planteado.
3. Motivación de la necesidad de demostrar la proposición.

Las dimensiones declaradas están dirigidas a medir el nivel logrado por los alumnos en el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo con una escala de

tres categorías M; R y B. Se asume como criterio, la cantidad de indicadores que se responden correctamente.

M: ejecuta hasta dos indicadores adecuadamente.

R: ejecuta correctamente hasta cinco indicadores.

B: ejecuta seis o más indicadores bien (entre ellos el 3 de la dimensión 1).

La población está conformada por 113 alumnos de octavo grado, matriculados en la ESBU "Cándido González" municipio Matanzas y tres profesores de Matemática. La muestra es de 30 alumnos (el 26,5% de la población), se selecciona de forma intencional, por ser el grupo de resultados más bajos en el aprendizaje de la Matemática, además tres profesores que representan el 100% de la población. Se consideró conveniente trabajar con los tres profesores porque son graduados universitarios de perfil pedagógico en la especialidad Matemática, uno de ellos es Máster, y el promedio de años de experiencia como profesores en la educación Secundaria Básica es de más de 15, con un trabajo científico metodológico meritorio.

Para constatar y caracterizar el estado actual de la búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo se emplean diferentes instrumentos a los individuos de la muestra, los que se estructuran de manera que ofrezcan la información sobre el comportamiento de la variable, a partir de las tres dimensiones que se derivan de ella, comprobando la presencia o no de los indicadores establecidos para cada una. Se aplicó una prueba pedagógica a los alumnos como diagnóstico inicial (Anexo I), con la intención de evaluar el dominio de los conocimientos, métodos y procedimientos por los alumnos para la búsqueda de proposiciones matemáticas según las dimensiones e indicadores declarados en la variable de investigación.

Los resultados por dimensiones y sus indicadores correspondientes se expresan en las tablas de frecuencias absolutas y relativas en el Anexo V. Se verifica la existencia de dificultades en la búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de la muestra, con la prueba Kolmogórov Smirnovf (Anexo VI), según los resultados que aportados por la prueba pedagógica inicial.

Se aplica una entrevista a los profesores de la muestra (Anexo II) para obtener información de su preparación para la conducción del proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo. Se realiza la observaron de siete clases referidas a esas unidades temáticas (Anexo III) para constatar el desempeño de los alumnos y el modo de actuación del profesor en la conducción del proceso de búsqueda de proposiciones.

Se concibe el análisis documental (Anexo IV) para el estudio del programa de matemática de octavo grado, con la intención de conocer la concepción del tratamiento del contenido y las orientaciones ofrecidas para el trabajo de búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo. También los planes de clases de los profesores de octavo grado para conocer cómo conciben el modo de actuación para la conducción del proceso de búsqueda de proposiciones, de manera que se estimule el desempeño de los alumnos hacia niveles superiores de desarrollo.

2.1.1 Resultados del diagnóstico

Prueba pedagógica inicial. Se analizan los resultados en cada dimensión, en la primera (OBP) se evidencian insuficiencias en la motivación hacia la búsqueda de un nuevo conocimiento, le resulta difícil vincular a situaciones de la práctica y explicar por qué es necesario estudiar las relaciones entre estas figuras geométricas. Por lo general expresan la información que brinda el gráfico y las diferencias, reconociendo los puntos comunes entre las figuras, pero le es difícil mencionar los contenidos geométricos conocidos que necesita aplicar.

El 60% de los alumnos evaluados demuestran dificultades en responder acertadamente, pues muestran bajo desarrollo en la búsqueda de relaciones y dependencia entre lo que conoce y la nueva exigencia en representaciones gráficas, en cambiar las condiciones dadas, por insuficiente dominio del contenido geométrico ya tratado.

Con respecto al trabajo en la búsqueda de la proposición (dimensión 2), se constató que 17 alumnos (56,6%) de la muestra presentan dificultades en la utilización de los métodos y procedimientos matemáticos necesarios para establecer las relaciones en el proceso de búsqueda de la proposición y formularla.

En la dimensión 3, (EVE) presentaron limitaciones al responder 22 alumnos de la muestra (73%) donde debían describir los métodos y procedimientos utilizados desde el inicio de la solución de la tarea, valorar si las proposiciones enunciadas reflejan las relaciones del objetivo y ofrecer argumentos de la necesidad de demostrar o no las proposiciones formuladas.

Al tabular el dominio del contenido en las respuestas de los alumnos, con los indicadores declarados en las dimensiones para la búsqueda de la proposición matemática en el estudio de la circunferencia y el círculo en el octavo grado y las categorías de la escala asumida, se tiene la cantidad de indicadores correctamente según la escala, los resultados son:

Escala			Total
B	R	M	

Cantidad de alumnos.	3	8	19	30
Por ciento (%)	10%	26.7%	63.3%	100%

Obtuvo calificación de B solo el 10% de los alumnos. Es significativo que el 63.3% de los alumnos de la muestra no encuentran proposiciones, no logran dominio de al menos tres indicadores, solo el 26.7% de ellos dominan de tres a cinco. No resultaran aprobados el 90% de los alumnos de la muestra en este instrumento por no dominar al menos seis indicadores.

A partir de los resultados constatados en la prueba pedagógica inicial realizada, el autor aplica la prueba Kolmogórov Smirnovf con un nivel de significación de 0.05, para verificar con apoyo de un recurso estadístico la existencia de dificultades en la búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de la muestra.

Se aplica la entrevista a los tres profesores de la muestra y se constata:

- Con respecto a las habilidades que declara el programa para el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas el 66,6% de los profesores responde con cierta precisión, qué lograr en sus alumnos, en ocasiones se expresan habilidades que no corresponden a la búsqueda de la proposición.
- Entre las barreras el 100% de los entrevistados expresan que no se logran los objetivos que declara el programa, falta motivación en los alumnos para la búsqueda y no implementan métodos y procedimientos con independencia. En las potencialidades coinciden que el tiempo asignado en el programa es suficiente, que los alumnos determinan algunas condiciones previas en el campo de la geometría y varios alumnos realizan descripciones retrospectivas de cómo lo hicieron. Llama la atención que se ofrecen razones centradas en los alumnos y no en el trabajo del profesor y la manera en que se organiza y dirige el aprendizaje.
- Con respecto a las acciones esenciales para dirigir la búsqueda de proposiciones de circunferencia y el círculo, el 33,3% de los profesores ofrecen criterios referidos a la motivación, asegurar condiciones previas, aplicar procedimientos heurísticos y la necesidad de demostrar la proposición para asegurar su veracidad. Se aprecia en las respuestas de los profesores que no se sienten comprometidos con la conducción de este proceso y no se diferencian los momentos de orientación, búsqueda y evaluación.
- En las valoraciones ofrecidas sobre la utilidad metodológica de las sugerencias e indicaciones que se ofrecen en los documentos de planificación para dirigir el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas, el 100% de los profesores expresan criterios referidos a las formas de organizar el

proceso en su estructuración didáctica externa y no a promover operaciones y procesos lógicos del pensar que deben ser estimulados en la orientación, búsqueda y evaluación de la proposición.

- No se socializan experiencias profesionales de su trabajo en el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas sobre la circunferencia y el círculo. No hay pronunciamiento a medios de enseñanza y asistentes matemáticos.

En la observación de clases se constata que en el 42,9% de ellas, se intencionan los objetivos a la búsqueda de proposiciones, solo en dos se realiza algunas veces la comprobación parcial y total del cumplimiento del objetivo. Sin embargo, la estructuración didáctica de las clases es formal, se organiza de forma frontal y la interrelación entre sus componentes no favorece la implicación de los alumnos en el proceso de búsqueda de proposiciones, resultando insuficiente el tiempo dedicado a dicho proceso, donde prima la actividad del profesor y se dictan las proposiciones. Esta estructuración de las clases no favorece la realización de las dimensiones e indicadores que se determinaron para el estudio de la variable de investigación, por lo que se observó el comportamiento siguiente.

La orientación hacia la búsqueda de la proposición se motiva muy poco y algunas veces se precisan las condiciones y características de la proposición que se desea encontrar, la determinación de las condiciones previas del campo matemático a que corresponde la proposición casi nunca se hace conscientemente en los alumnos, esta regularidad se manifiesta en el 100% de las clases visitadas.

En el trabajo en la búsqueda de la proposición, se estimula algunas veces que los alumnos precisen los métodos y procedimientos a implementar en la búsqueda del enunciado, la que generalmente casi nunca es formulada por los alumnos, sino el profesor la formula, dicta o indica anotarla por el libro de texto. Casi nunca se trabaja en buscar los contenidos matemáticos a aplicar en ese proceso.

En las clases visitadas se observa regularmente, con respecto a la evaluación de la vía empleada en la búsqueda de la proposición, que casi nunca se realiza el análisis retrospectivo de los métodos y procedimientos implementados y algunas veces se compara si la proposición enunciada se ajusta con el objetivo planteado. Sin embargo, con frecuencia se plantea la necesidad de demostrar la proposición.

La revisión de documentos estuvo centrada en el programa del grado y en el plan de clases del profesor.

El programa de Matemática se revisó para constatar la concepción y orientaciones ofrecidas a los profesores para el trabajo de búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo.

El programa en su concepción posee una caracterización general de la disciplina en el nivel, los objetivos generales de la asignatura (nivel y grado), plan temático del grado, objetivos por unidades, la estructura interna de las unidades, el sistema de contenidos propuestos por unidades y exigencias planteadas para

los métodos, medios, evaluación y forma de organización, así como los tipos de ejercicios y problemas que se proponen. La concepción se considera orientadora para el trabajo de planificación del profesor y ofrece pautas para el intercambio de los profesores en las sesiones de preparación metodológicas y tareas de autopreparación individual.

En cuanto a las orientaciones para la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo, aparecen precisiones en diferentes partes del programa, en la caracterización general de la disciplina se expresa sobre la implementación de lineamientos del enfoque metodológico general de la asignatura, el trabajo con las líneas directrices y con los núcleos temáticos. Los objetivos generales de la asignatura (nivel y grado) hacen precisiones sobre la búsqueda de proposiciones o conjeturas, en los objetivos por unidades se puntualizan aspectos a lograr, las orientaciones generales para el trabajo en la unidad y exigencias para la evaluación del contenido, precisan las habilidades que deben lograrse.

Se considera que con toda esta información y precisión dada, apoyándose en el libro de texto, y medios de enseñanza existentes, se puede dirigir el proceso de búsqueda de proposiciones con efectividad y propiciando la actividad consciente e independiente de los alumnos en el mismo.

Se constató en la revisión de los planes de clases de los profesores con la intención de constatar cómo el profesor planifica la conducción del proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas, de manera que se estimule el desempeño de los alumnos hacia niveles superiores de desarrollo. Se aprecia que no se logra la implementación de los lineamientos del enfoque metodológico general de la asignatura como orienta el programa, tampoco el trabajo con las líneas directrices y con el tratamiento de búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo, aunque los objetivos generales de la asignatura (nivel y grado) hacen precisiones sobre este proceso. Las clases requieren de un enfoque metodológico actualizado, según las indicaciones y aspiraciones expresadas en el III perfeccionamiento SNE.

En los planes de clases la estructuración de los componentes no personales del proceso para favorecer la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo no están concebidos de forma coherente y en: orientación, trabajo en la búsqueda y evaluación de la vía empleada. Se proponen en ocasiones acciones aisladas como creación de una motivación, precisión de los métodos y procedimientos heurísticos a implementar, el análisis retrospectivo de los procedimientos implementados y el ajuste de la proposición enunciada con lo que se quería obtener.

El 100% de los profesores de la muestra dominan el contenido asociado a las proposiciones matemáticas sobre circunferencia y círculo, pero la planificación de la clase en su concepción didáctica y metodológica no potencia el proceso de búsqueda de proposiciones.

A partir de los resultados de la aplicación de los instrumentos se realizó el análisis del comportamiento de las dimensiones e indicadores mediante lo cual se pudo constatar que existen potencialidades y barreras, para la búsqueda de proposiciones en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado. Entre las potencialidades se constata:

- Los profesores de la asignatura son graduados universitarios en la especialidad Matemática, poseen preparación y experiencia profesional, están motivados y comprometidos con la labor que realizan.
- La institución cuenta con los documentos que norman e indican las formas de desarrollar y evaluar los contenidos del grado, posee software educativo y dos laboratorios de informática.
- Con cierta regularidad el profesor en clases intenta motivar hacia la búsqueda de la proposición. Los alumnos si se les estimula cooperan en el análisis retrospectivo de los métodos y procedimientos heurísticos implementados en la búsqueda y en la necesidad de demostrar la proposición formulada.

Entre las barreras se constata:

- Deficiencias en los profesores en la orientación hacia la búsqueda de proposiciones, la búsqueda de conjeturas y evaluación de la vía implementada. Los objetivos que plantea el programa en la dirección del del proceso de búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo no se logran.
- Según las indicaciones y orientaciones del programa del grado, no se estructura metodológicamente la búsqueda de proposiciones, en la precisión de las condiciones y características de la proposición, en asegurar las condiciones previas del campo matemático a que corresponde, los métodos y procedimientos heurísticos a implementar, la búsqueda de relaciones entre los contenidos matemáticos a aplicar para enunciar la proposición y su correspondencia con el objetivo planteado.
- Los alumnos desconocen las formas de trabajo y pensamiento de la matemática en general, y para la búsqueda de teoremas (conjeturas o proposiciones) en particular.

Las barreras antes señaladas hacen necesaria la elaboración de un sistema de actividades didácticas con el propósito de elevar la efectividad del proceso de enseñanza aprendizaje de la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo en octavo grado.

2.2 Sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo

Para dar solución al problema científico formulado y responder la tercera pregunta científica, se expone el sistema de actividades didácticas elaborado para lograr la búsqueda de proposiciones matemáticas a partir del marco teórico referencial establecido.

Se hace inevitable comenzar el epígrafe con el análisis del concepto sistema de manera general. Diversos son los investigadores que en este sentido revelan en sus trabajos distintos rasgos así como una amplia tipología de estos, González (2007) (como se citó por Campos, 2011) plantea:

Un sistema es un todo unitario, integrado y dialéctico de elementos organizados e interconectados que pueden aparecer recursivamente tanto en un sistema de orden inferior como superior, delimitados por un medio con el que interactúan, por sus objetivos, metas y funciones. (p. 16)

El autor de esta investigación asume la definición dada por Valle (2010) cuando concibe el sistema como “conjunto de componentes lógicamente interrelacionados que tienen una estructura y cumple ciertas funciones con el fin de alcanzar determinados objetivos” (p.215).

Para los autores Pérez, Valdés, & Pino (2015) a todo sistema le es intrínseco las características de contar con diversos elementos con vínculos, nexos e interrelaciones entre cada uno de ellos, que conforman un todo con sus componentes del desarrollo. Su unidad interna está proporcionada por el objetivo, que resulta trascendental para el logro de la coherencia de sus elementos, todos se tributan recíprocamente, cada uno de ellos tiene su propio significado, mantienen su identidad; pero en función del cumplimiento del objetivo.

Desde una perspectiva investigativa un sistema visto, como resultado científico puede referirse a: sistema de ejercicios, sistemas de problemas y sistemas de actividades, sistema de tareas y sistema de acciones

El resultado científico en esta tesis es un sistema de actividades, para su caracterización el autor es consecuente con la definición dada por (Martínez, s/f) que declara como un “conjunto de actividades relacionadas entre sí de forma tal que integran una unidad, el cual contribuye al logro de un objetivo general como solución a un problema científico previamente determinado” (p. 11)

El sistema de actividades concebido de acuerdo al contexto es de carácter docente y extra docente y coherente a los objetivos declarados se clasifica el resultado científico como sistema de actividades didácticas, pues su objetivo está dirigido a contribuir al perfeccionamiento del proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática en general, mediante la búsqueda de proposiciones matemáticas sobre circunferencia y círculo. Se caracteriza el sistema de actividades didácticas como:

Un conjunto de actividades de situaciones intra y extra matemáticas que requieren el empleo de las proposiciones sobre la circunferencia y el círculo, relacionadas entre sí de forma tal que forman una unidad, para desarrollar la búsqueda de proposiciones y contribuir al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje. (Martínez, s/f, p. 12).

2.2.1 Fundamentos del sistema de actividades didácticas para desarrollar la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo

El sistema de actividades didácticas se sustenta en los principios, leyes y categorías de la Filosofía Marxista Leninista, reflejados en la teoría del conocimiento, que adquiere un valor trascendental como base filosófica para la obtención del nuevo conocimiento.

En este sentido los fundamentos de la teoría del conocimiento materialista dialéctico, formulados por Lenin (1974) plantean que el conocimiento no debe ser considerado como terminado, como inalterable, pero se debe determinar cómo el conocimiento emerge de la ignorancia, cómo el conocimiento incompleto e inexacto se torna completo y más exacto.

En la concepción, del sistema de actividades didácticas a partir de la realidad de sus alumnos (grupos – clases) el profesor implementa recursos psicológicos para despertar el interés y mantener su atención en el proceso de enseñanza - aprendizaje; de modo que al conducir el proceso de abstracción de los conocimientos; evite el olvido y propicie la solidez de lo aprendido. Para determinar los ritmos de aprendizaje de los alumnos y ajustara sus posibilidades la selección del contenido de enseñanza y los métodos adecuados para estimular el protagonismo y la creatividad en la búsqueda de nuevas proposiciones y en el proceso de autorreflexión de cómo aprende.

El Enfoque Histórico Cultural asociado a los resultados de L. Vygotsky que considera: “la formación del hombre como ser social y cultural es un resultado del proceso de apropiación de la experiencia histórico - social, que es transmitida de una a otra generación” (Vygotsky, 1987, p.86).

En esta posición, Vygotsky reconoce el papel del desarrollo individual en el colectivo, del desarrollo integral de la personalidad y el papel preponderante de las condiciones sociales e históricas, así como el rol de la actividad en la conformación de la personalidad.

Desde esta teoría, categorías como zona de desarrollo próximo (en lo adelante ZDP), explicitan la naturaleza de la enseñanza y el efecto de los agentes educativos. Además, ellas resaltan el importante rol que desempeña la educación en el proceso de crecimiento y desarrollo intelectual y personal, es decir, lo que el alumno puede hacer hoy en cooperación, mañana podrá hacerlo solo. Es por ello que en el sistema se conciben actividades diversas y con diferentes niveles de complejidad para potenciar el desarrollo de las funciones psicológicas en el alumno.

De esta manera se activa el aprendizaje, puesto que se le exige al alumno movilizar sus conocimientos para cumplir con las actividades propuestas por el profesor. Así, se agudiza la relación entre el nivel de exigencia de la situación de aprendizaje y el nivel de desarrollo alcanzado por el alumno. Por tal razón se establece la relación dialéctica entre la educación, el aprendizaje y el desarrollo, estos son procesos que

poseen una relativa independencia y singularidad propia, pero que se integran al mismo tiempo en la vida humana, y conforman una unidad dialéctica.

El sistema de actividades didácticas se fundamenta en los principios y categorías de la Didáctica General. Pues según el alemán Lothar Klineberg (como se citó por Sachipia, 2018):

Los principios didácticos son postulados generales sobre la estructuración del contenido, la organización y los métodos de enseñanza que se derivan de las leyes y de los objetivos de la enseñanza, que expresan el complejo carácter de esta y que por dicho motivo han de verse y considerarse por su complejidad. (p. 18)

Por otra parte, se asume las categorías de la Didáctica General, que constituyen un sistema y se dan en una relación dialéctica como: objetivo, contenido, métodos de enseñanza, medios de enseñanza, evaluación y formas de organización, así como sus principios: principio de la unidad del carácter científico e ideológico, principio de la vinculación de la educación con la vida, el medio social y el trabajo, principio de la unidad de lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador, principio del carácter colectivo e individual de la educación y principio de la unidad entre la actividad, la comunicación y la personalidad, considerados para la determinación de las actividades.

La Didáctica de la Matemática, retoma este conjunto de teorías y posiciones filosóficas y psicológicas, así como resultados y experiencias de la práctica escolar para estructurar el proceso de enseñanza – aprendizaje de la disciplina, sistematizado en el tratamiento de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática, en el trabajo con las líneas directrices y en el enfoque metodológico general de la asignatura, a partir de experiencias pedagógicas avanzadas y resultados de investigaciones.

Estos presupuestos permitieron la implementación de las dimensiones e indicadores en el sistema de actividades didácticas y establecer el siguiente objetivo general: Resolver actividades que demanden la búsqueda de proposiciones (conjeturas) de la circunferencia y el círculo con la aplicación consciente de métodos (reductivos y deductivos), procedimientos heurísticos y medios de enseñanza.

El sistema de actividades didácticas está estructurado por nueve actividades con varias tareas, de las unidades temáticas la circunferencia y el círculo. Dichas actividades pueden ser resueltas por los alumnos, sus exigencias se corresponden con las declaradas en los objetivos del programa para la unidad, en ese grado. El objetivo específico de cada actividad está derivado de los de la unidad y el contenido de su resolución está diseñado para desarrollar la actividad mental en los alumnos, de manera que el proceso de enseñanza aprendizaje tenga un enfoque desarrollador, o sea, “tanto la enseñanza como el aprendizaje son subsistemas que garantizan la apropiación activa, creadora, reflexiva, significativa y motivada del contenido como parte de la cultura general integral, teniendo en cuenta el desarrollo actual, con el

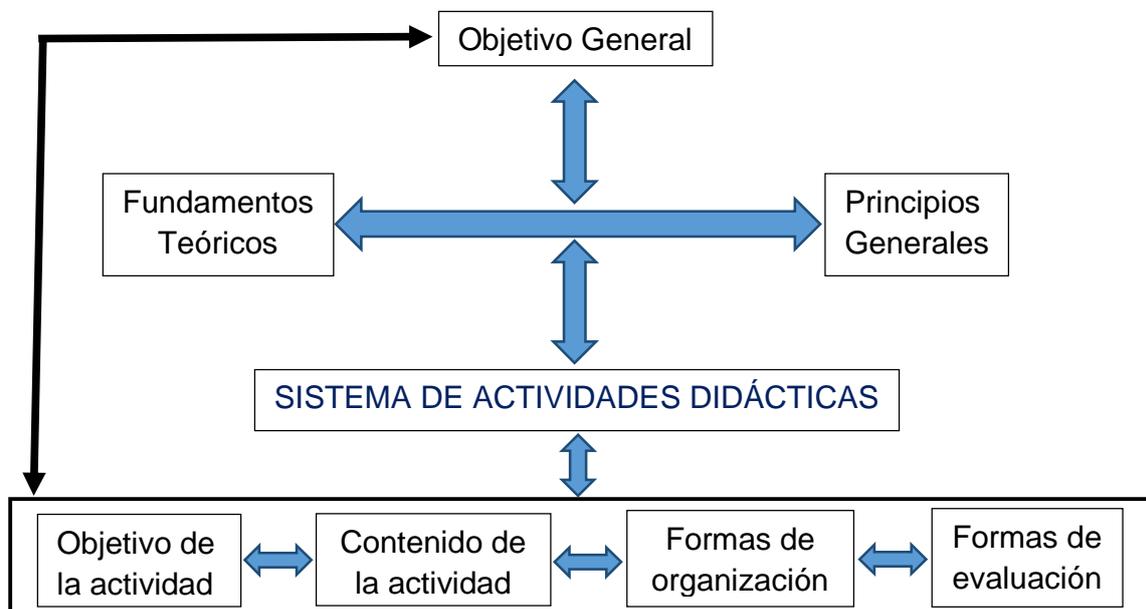
propósito de ampliar continuamente los límites de la zona de desarrollo próximo potencial” (Ballester, 2018, p. 8).

El Dr. C. Mariano Héctor Jiménez, puntualiza que un aprendizaje para ser desarrollador tendrá que cumplir con tres criterios básicos: “a) promover el desarrollo integral de la personalidad del educando (...), b) potenciar el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y a la autorregulación (...), c) desarrollar la capacidad para realizar aprendizajes a lo largo de la vida (...)” (Jiménez, 2013, p. 1-2).

Conforme a los fundamentos establecidos, al objetivo declarado en la investigación, dimensiones e indicadores de la variable definida y los criterios básicos para el aprendizaje con enfoque desarrollador, se concibe y diseña el sistema de actividades didácticas, a partir de:

- Los objetivos declarados en el programa (octavo grado).
- Dosificación del contenido de la unidad 2 de octavo grado
- Diseño de actividades que garanticen:
 - Motivar el estudio de lo nuevo con situaciones del entorno, con otros contenidos matemáticos, otras asignaturas y con hechos de la historia de la Matemática.
 - Estimular la creatividad, lógica del pensar y el buen gusto en su realización.
 - Emplear el contenido matemático para buscar la proposición nueva y fijar lo aprendido.
 - Propiciar en la búsqueda de proposiciones el empleo de las formas de trabajo y pensamiento fundamentales de la ciencia Matemática.
 - Combinar actividades individuales y grupales y realizar en (y fuera) de la clase.
 - Apoyar la familiarización, la ejecución y el control de la aplicación de conocimientos, procedimientos y métodos de búsqueda de proposiciones.
 - Concientizar cómo buscar nuevas proposiciones en la matemática, cómo se aplican conocimientos, procedimientos y métodos de búsqueda.

Estructura del sistema de actividades didácticas



Orientaciones generales para la puesta en práctica el sistema de actividades didácticas.

La implementación de estas actividades didácticas se hace en clases de la unidad "Geometría plana" para estimular en los alumnos su protagonismo en la búsqueda de las proposiciones. Las mismas deben incorporarse al estructurar el sistema de clases como espacios de aprendizaje y disfrute, donde reine el debate e intercambio de criterios, el enriquecimiento del contenido a través de un trabajo colectivo, se deben destacar los avances alcanzados por los alumnos y el grupo, al implementar formas individuales y colectivas de evaluación.

Las actividades didácticas del sistema se han conformado para ambas temáticas de la unidad: ángulos en la circunferencia (15 h/c) y longitud de la circunferencia y área del círculo (14 h/c). Sin embargo, para la primera temática se diseñaron siete actividades y para la segunda dos, lo que obedece a las características del contenido matemático. En la primera de ellas, se estudia un mayor número de proposiciones de gran diversidad en los métodos y procedimientos de búsqueda, contando con 15 h/c para su tratamiento, existe una clases de repaso sobre propiedades de la circunferencia y el círculo y seguidamente se tratan las propiedades y teoremas sobre ángulo central, ángulo inscrito y ángulo seminscrito. En la segunda temática se estudian circunferencias inscritas y circunscritas a polígonos, así como la obtención de proposiciones que conducen a las fórmulas para el cálculo de la longitud de la circunferencia y área del círculo, como se aprecia son procedimientos de búsqueda más particulares.

Resulta necesario que los alumnos se familiaricen, ejecuten y controlen los procedimientos de búsqueda de proposiciones. Para ello, se diseña el sistema en los momentos de familiarización (actividades 1 y 2), ejecución (actividades de la 3 a la 7) y control (actividades 8 y 9). Las actividades en su conformación incluyen tareas que potencian esos procesos en los alumnos, lo que se logra mediante la selección de las proposiciones a buscar, la correspondencia con los contenidos conocidos, su nivel de complejidad y exigencias al trabajo mental.

Esta concepción permite al profesor garantizar el carácter de sistema de las actividades diseñadas en los sistemas de clases de cada temática, pues decide en los análisis metodológicos, en que clase realizarse, cómo dirigir el proceso de resolución y controlar el desempeño que logra cada alumno, según las particularidades. Cada actividad ofrece orientaciones específicas para su realización en clases.

Actividades didácticas del sistema.

Actividad 1 Traza, mide, compara y enuncia propiedades

Objetivo. Enunciar propiedades sobre puntos interiores, fronteras y exteriores de la circunferencia y las relaciones entre diámetro y radio mediante el trazado, la medición y la comparación de longitudes de los elementos mencionados.



SABÍAS QUE...

En Mesopotamia 3500 años a.n.e para trazar circunferencias empleaban una cuerda o cordel estirado con uno de sus extremos fijos a una estaca como se muestra en la fig. 1.

En las clases de matemática para trazar circunferencias en las libretas se utiliza el compás, aunque se sigue empleando en la actualidad el procedimiento de la estaca en trabajos de jardinería y albañilería porque los radios de las circunferencias son de longitudes mayores a las que puede abarcar el compás.



Figura 1



Figura 2

- Traza dos circunferencias diferentes con radios: r_1 y r_2 de manera que sus longitudes en centímetros son dos números primos consecutivos.
- Escoge una cualquiera de esas circunferencias y trace varios radios:
 - Mídelos y compáralos.

- Traza diámetros en dicha circunferencia, establece relaciones entre las longitudes del diámetro y el radio. Anótelas en su cuaderno con palabras y en símbolos.
 - ¿Cuántos radios (diámetros) se pueden trazar en una circunferencia?
 - Enuncie proposiciones que se deriven de las interrogantes resueltas.
- c) En la otra circunferencia sitúe los puntos A, B y C de manera que uno sea interior, otro exterior y el tercero pertenece a la circunferencia. Compare las distancias del centro a cada uno de esos puntos con la longitud del radio y formule proposiciones.
- d) Reflexiona qué conocimientos empleaste para llegar a las conclusiones obtenidas.
- e) Señala los tropiezos que tuviste. Cómo los resolviste.
- f) Describe cómo buscaste las proposiciones. Argumente si los resultados corresponden con lo que se quería buscar.

Orientaciones metodológicas específicas.

Propiciar el diálogo con los alumnos sobre lo expresado en el sabías que... destacando por qué aparece el compás como instrumento de trazado en las clases de matemática. Se precisan los conceptos de circunferencia, radio, diámetro.

Se invita a los alumnos para que expliquen a sus compañeros como emplear el compás correctamente. Deben señalarse sus posibilidades de empleo. (Trazar circunferencias, transportar longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos).

La actividad puede concebirse para realizar de estudio individual o en la clase 1 de la unidad, según decida el profesor para reactivar conocimientos ya trabajados en el séptimo grado. Debe realizarse de manera individual, el profesor debe comprobar el dominio del objetivo y de ser necesario reactivará los conocimientos sobre estos elementos de la circunferencia. De manera que controle el nivel de cumplimiento del objetivo en el desempeño de los alumnos. Debe insistir en el empleo adecuado de la simbología y terminología matemática al comunicar las conclusiones a las que arribaron.

Actividad 2. Reflexiona, investiga y aprende

Objetivo. Enunciar proposiciones estudiados en séptimo grado sobre circunferencia y sus elementos en la forma "si... entonces...", invirtiendo premisa y tesis y con representaciones gráficas usando los instrumentos de trazado y construcción con limpieza, exactitud y destreza.



SABÍAS QUE...

Los instrumentos de dibujos eran usados también por las grandes civilizaciones para resolver problemas de construcciones que se les presentaban, o sea, para determinar rectas, segmentos, circunferencias, etc. Estas utilidades se transportan a nuestros tiempos para resolver problemas de esa índole.



1. Investiga en Wiquipedia, en el libro Matemática 7º grado capítulo 2, en entrevista con tus profesores, papás, vecinos y compañeros de estudio, acerca de:
 - ¿Qué instrumentos de trazado y medición se utilizan en la enseñanza de la Matemática en la Secundaria Básica?
 - ¿Por qué surgen esos instrumentos?
 - ¿Qué utilidad tienen para aprender?
 - ¿En qué actividades de la asignatura Matemática se utilizan los mismos?
 - ¿Sabes utilizarlos correctamente? Describe cómo se utiliza cada uno con ejemplos prácticos.

Procesa la información recopilada de manera que puedas exponerla ante tu grupo. Confeccione pancartas o presentación de Power Point para apoyar la exposición (en un tiempo de 10 minutos aproximadamente)

2. Represente usando los instrumentos de trazado los teoremas T1 y T2 (estudiados en séptimo grado):

T1: La mediatriz de una cuerda cualquiera pasa por el centro de la circunferencia.

T2: La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que tiene como extremo al punto de tangencia.

 - a) Enuncie los teoremas T1 y T2 en la forma "si ... entonces ..."
 - b) Formule el recíproco de dichos teoremas.

3. Sobre la actividad desarrollada exprese:
 - a) Enumere qué conocimientos fueron necesarios para resolver la tarea.
 - b) Señala qué tropiezos tuviste en su realización. ¿Cómo los resolviste?
 - c) Describe cómo buscaste la solución. Argumente si los resultados corresponden con lo que se quería buscar.

Orientaciones metodológicas específicas.

Al concluir la unidad 1 se debe indicar esta actividad para desarrollarla como tarea extraclase. Se orienta a buscar la información sobre los instrumentos de trazado y medición que se utilizan en geometría,

consultando libros de textos de matemática y/o dibujo técnico (ediciones actuales o no), enciclopedias impresas o digitales, información de otros medios (periódicos, revistas, artículos, noticias, radio, TV, etc.).

La realización de la tarea 2 de esta actividad se trabajará también de manera extraclase pues son contenidos recibidos en el séptimo grado que se retoman con carácter de profundización.

La tarea números 3 se trabajará en la clase donde se presente el resultado de su actividad 2 en la tarea extraclase como vía para evaluar el desempeño individual y por equipos de los alumnos del grupo, además se evaluará de manera individual (presentación de la ponencia de un equipo, desempeño de cada alumno en el acto de defensa) y a través de la revisión de libretas.

Se consideran los indicadores siguientes para emitir la calificación: entrega de la ponencia en tiempo, estructura, originalidad, calidad de la información procesada, calidad de las respuestas a las preguntas formuladas y dominio del contenido. Los mejores trabajos serán presentados en el día de la Matemática que se celebra cada mes en la escuela.

Actividad 3. El tamaño del diámetro.

Objetivo. Enunciar la propiedad del diámetro como la cuerda mayor de una circunferencia generalizando el resultado demostrado en un ejercicio resuelto (portador de información).



SABÍAS QUE....

La primera medición científica del diámetro la Tierra se hizo en el año 240 a. de J. C., por el director de la biblioteca de Alejandría, Eratóstenes de Cirene, nacido en 194 a.C., fue matemático, astrónomo



y geógrafo griego. El día 21 de junio leyó que el Sol sobre la ciudad de Siena no proyectaba sombra alguna al medio día, en esa misma fecha y hora, en Alejandría el Sol si proyectaba una sombra, llegó a la conclusión de que se debía a la curvatura de la Tierra. Teniendo en cuenta el ángulo de la sombra en Alejandría y la distancia entre ambas ciudades calculó el diámetro de la Tierra en 12 000 Km. En la actualidad con técnicas avanzadas se determinó que el diámetro es 12 757 Km.

1. Analiza lo dado, observa la figura y responde:

Los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia de centro O. La cuerda AB pasa por O.
Demuestra que $AC < AB$

forma generalizada para aplicarlo como un resultado de validez general en cualquier ejercicio matemático.

Enunciado con palabras	En toda circunferencia _____ _____
Enunciado con símbolos	En la $C(O; r)$ con ...

4. Reflexiona sobre:
- ¿Cómo se procedió para buscar la idea de demostrar la relación pedida?
 - ¿Qué conocimientos matemáticos se utilizaron para fundamentar cada paso?
 - ¿Cómo se descubrió la necesidad de trazar una línea auxiliar en la figura?
 - Señala las barreras que tuviste al demostrar. ¿Cómo las resolviste?
 - Describe cómo obtuviste la propiedad. Argumente si los resultados corresponden con lo que se quería buscar.

Orientaciones metodológicas específicas.

Debe asegurarse el nivel de partida para realizar esta actividad. Para ello, el profesor asegurará el dominio de los alumnos sobre los conceptos de circunferencia, radio, cuerda, diámetro, relación entre radio y diámetro, así como características del triángulo isósceles y propiedades de los lados de un triángulo para que sea construible. Por ejemplo: argumente si los lados de un triángulo pueden medir 4 cm, 3 cm y 8 cm respectivamente.

Se realiza apoyándose en una pancarta u hoja de trabajo que racionalice la actividad de copiado (también puede tenerse preparada de antemano en un pizarrón). Debe propiciarse que los alumnos trabajen de forma independiente e intercambien los resultados que van obteniendo con sus compañeros de mesa.

El profesor irá controlando el desempeño de cada alumno e insistirá en las cuestiones esenciales que resulten conclusiones de los análisis y las anotará en el pizarrón. Al final insistirá en el dialogo reflexivo de la actividad realizada.

Actividad 4. Experimenta con ángulos y arcos en la circunferencia.

Objetivo. Enunciar la relación (proposición) sobre la amplitud del ángulo central y su arco correspondiente a través de un experimento para variar condiciones y establecer relaciones y dependencia midiendo y comparando.



SABÍAS QUE...

Uno de los sistemas de medidas más empleados para medir ángulos es: el sistema sexagesimal, el cual tiene su origen con los babilonios y posiblemente esa división de la circunferencia en 360 partes estuvo basada en lo próximo de este número con la duración de un año, 365 días.



1. Sobre su mesa de trabajo aparecen los materiales siguientes: una chinche, dos placas transparentes y una cartulina. Observe detenidamente la hoja y las placas transparentes. ¿Qué observas en ellas? Compara las características de los objetos dados y fija las condiciones que cumplen.
 - a) Realiza el siguiente experimento y arriba a conclusiones.
 1. Coloca la placa transparente (con la circunferencia) sobre la cartulina de modo que coincidan los centros de las circunferencias y fíjelos con la chincha.
 2. Gira alrededor del centro la cartulina transparente hasta lograr hacer coincidir los ángulos dados, puesto que son iguales por hipótesis.
 3. ¿Qué observas con respecto a los arcos \widehat{AB} y $\widehat{A'B'}$ de las circunferencias dadas? Anota en su cuaderno lo que observas.
 4. Utiliza la circunferencia de la cartulina y el ángulo de la otra transparencia y superponga los vértices de los ángulos. Gírelo hasta hacerlos coincidir.
 5. ¿Qué observas con respecto a los arcos \widehat{AB} y $\widehat{A'B'}$ que corresponden dichos ángulos?
 - b) Enuncia como una proposición los dos resultados del experimento. Intercambia con tus compañeros.
 - c) Exprésala en la forma si... entonces...
 - d) Separe premisa y tesis.
 - e) Enuncie el recíproco del mismo.

Premisas	
Tesis	

6. Reflexiona sobre:
 - a) ¿Cómo se procedió para buscar las nuevas proposiciones?
 - b) ¿Qué conocimientos matemáticos se utilizaron?
 - c) Señala las barreras que tuviste al buscar las proposiciones. ¿Cómo las resolviste?

- d) Argumente si los resultados corresponden con lo que se quería buscar.
- e) ¿Puede considerarse válido para cualquier ángulo central y arco correspondiente el resultado obtenido?

Orientaciones metodológicas específicas.

Esta actividad se debe concebirse en la clase que se trabaje con ángulo central, en elaboración conjunta con carácter de experimento. Se ubica sobre cada puesto de trabajo de los alumnos los medios necesarios (una chinche, dos placas transparentes y una cartulina) para su correcta realización.

Los pasos para realizar el experimento pueden entregarse por escrito en una tarjeta de manera que proporcione una base orientadora para la actividad. El profesor irá apoyando y controlando el desempeño de las distintas parejas de alumnos al realizar los experimentos, aprovechando para evaluar de forma individual a los alumnos, según el nivel de independencia mostrado, su participación en el proceso de búsqueda, rapidez en la obtención de los resultados, el empleo de la terminología y simbología matemática al ofrecer las respuestas.

Actividad 5. El ángulo inscrito y su arco correspondiente.

Objetivo. Enunciar una suposición (proposición) sobre la relación que existe entre la amplitud del ángulo inscrito y la de su arco correspondiente mediante el empleo de recursos heurísticos y del semicírculo graduado para el logro de la fijación del nuevo conocimiento.



SABÍAS QUE...

Los ángulos los utilizamos o vemos diariamente en nuestra vida cotidiana. Por ejemplo en construcciones de casa, escaleras, en nuestros útiles escolares, en nuestras casas, etc.



En conclusión existen varios tipos de ángulos y es necesario conocerlos ya que están presentes en nuestra vida diaria. Los utilizamos todas las personas sin darnos cuenta de su importancia.

1. Atrévete y aprende
 - a) Dibuje y denote con el empleo de los instrumentos de trazados tres ángulos inscritos en una circunferencia de $C(O; 4 \text{ cm})$, cuya amplitud de sus arcos correspondientes sean números pares mayores que 30.
 - b) Halla las amplitudes de estos ángulos inscritos utilizando el semicírculo graduado y complete la tabla 1.

Ángulos Inscritos	longitud de los arcos correspondientes	Amplitud de los ángulos inscritos.

Tabla 1

¿Existirá alguna relación matemática entre las amplitudes de los ángulos inscritos y las amplitudes de sus arcos correspondientes? Averígualo comparando dichas amplitudes.

- c) ¿A qué conclusión arribaste? Enuncia la proposición encontrada en la forma si... entonces...
2. Sobre la actividad desarrollada exprese:
- ¿Qué se obtuvo?
 - ¿Qué condiciones dadas permitieron realizar la búsqueda?
 - Enumere qué conocimientos fueron necesarios para resolver la actividad.
 - Señala qué tropiezos tuviste en su realización. ¿Cómo los resolviste?
 - Describe cómo buscaste la solución. Argumente si los resultados corresponden con lo que se quería buscar.

Orientaciones metodológicas específicas.

Esta actividad puede realizarse dentro de la clase que se estudia los ángulos inscritos en la circunferencia, así como sus propiedades. Se recomienda que el profesor una vez comenzada la clase tenga escritas las orientaciones en la pizarra en aras de racionalizar el tiempo de realización de la misma. Los alumnos deben de trabajar de manera individual en su puesto de trabajo siempre con la guía del profesor, el cual a su vez evaluara a todos los alumnos según su desempeño, organización en el trabajo, limpieza y calidad de las respuestas. Al final de la actividad se deben dar las evaluaciones destacando siempre los alumnos más destacados.

Actividad 6 El teorema de Tales

Objetivo. Enunciar la proposición del ángulo inscrito sobre el diámetro de una circunferencia empleado una hoja de trabajo para contribuir a la estructuración racional y efectiva de este proceso de búsqueda.

 SABÍAS QUE...

Tales fue un Filósofo y matemático griego que nació en Mileto (Jonia), ciudad situada a las orillas del Mar Egeo, alrededor del año 630 a.C. y murió hacia el año 546 a.C. Fue considerado uno de los Siete Sabios de Grecia. Su filosofía, basada en la razón, se interesó por el estudio del universo y de la naturaleza.



Teorema de Tales

1. Escriba el teorema de los ángulos inscritos.

2. Trace en la circunferencia de centro O un diámetro \overline{AB} .
 - a) Dibuje tres ángulos inscritos sobre el diámetro trazado y denote sus vértices por C_1, C_2 y C_3 .
 - b) Halle sus amplitudes.
 - c) Complete la tabla siguiente:

Ángulos	Amplitud	Tipo

3. ¿Cómo son sus amplitudes? ¿Por qué? _____

4. Ahora usted puede suponer una proposición.
 a) Escriba su proposición _____

5. Precise su proposición si es necesario. Escríbela en la forma si _____ entonces _____.

6. Sobre la actividad desarrollada exprese:
- f) ¿Qué se obtuvo?
 - g) ¿Qué condiciones dadas permitieron realizar la búsqueda?
 - h) Enumere qué conocimientos fueron necesarios para resolver la actividad.
 - i) Señala qué tropiezos tuviste en su realización. ¿Cómo los resolviste?
 - j) Describe cómo buscaste la solución. Argumente si los resultados corresponden con lo que se quería buscar.

Orientaciones metodológicas específicas

Esta hoja de trabajo está dirigida a la búsqueda del teorema de Tales, a partir del repaso del teorema del ángulo inscrito en una conversación de clase, además se hace consideraciones de la existencia de un ángulo inscrito sobre una cuerda especial para lograr un aseguramiento del nivel de partida adecuado que

permita la realización exitosa de la misma. Una vez asegurado el nivel de partida los ejercicios de la hoja de trabajo pueden ser resueltos de forma independiente por los alumnos.

Al final de la actividad se precisa el enunciado exacto del teorema y se da paso a la evaluación que será de forma individual según el desempeño de cada alumno.

Actividad 7. Ángulos inscritos sobre un mismo arco.

Objetivo: Enunciar una suposición (proposición) sobre los ángulos inscritos sobre un mismo arco mediante procedimientos deductivos para el desarrollo del pensamiento lógico de los alumnos.



SABÍAS QUE...

Un proyectil disparado por una pistola alcanza su mayor distancia cuando es lanzado con un ángulo de 45 grado con respecto a la superficie.



Traza una circunferencia $C(O; 4\text{cm})$, en ella un arco BD . Dibuje

- Dos ángulos cualesquiera (α y β) inscritos sobre el arco BD con vértice A y A' respectivamente.
- Seleccionen un punto C de la circunferencia situado en el arco BD .
- Denote el ángulo BCD con la letra griega γ .

2. En la figura se han determinado los cuadriláteros inscritos: _____ y _____. a) Enuncie la propiedad que cumplen los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia.

3. Completa y fundamenta las expresiones siguientes apoyándose en dicha propiedad.

- $\alpha + \gamma =$ _____ por _____.
- $\beta + \gamma =$ _____ por _____.
- Entonces $\alpha =$ _____ por _____.

A partir de los resultados obtenidos, enuncie la propiedad que cumplen los ángulos inscritos sobre un mismo arco en la forma si... entonces...

4. Reflexiona sobre:

- ¿Cómo se procedió para buscar las nuevas proposiciones?
- ¿Qué conocimientos matemáticos se utilizaron?
- Señala las barreras que tuviste al buscar las proposiciones. ¿Cómo las resolviste?
- Argumente si los resultados corresponden con lo que se quería buscar.
- ¿Puede considerarse válido para todos los ángulos inscritos sobre un mismo arco?

Orientaciones metodológicas específicas

Para la realización de esta actividad se recomienda dividir el aula en equipos de 5 o 6 integrantes y entregarle a cada equipo una tarjeta previamente confeccionada por el profesor con las indicaciones de la actividad. La misma se orientará de tarea extraclase al concluir la última sobre ángulos. Cada equipo presentará sus resultados en la siguiente clase donde se les otorgará las evoluciones en correspondencia de la calidad del trabajo realizado. El mejor equipo será reconocido en el matutino del día siguiente.

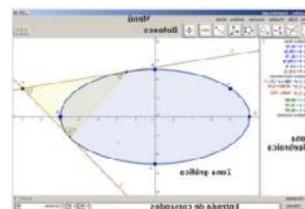
Actividad 8. Busca relaciones con el GeoGebra.

Objetivo. Enunciar la propiedad de los ángulos opuestos de un cuadrilátero (convexo) inscrito en una circunferencia como proposición buscando relaciones y dependencias entre sus amplitudes, apoyándose en el asistente matemático GeoGebra.



SABIAS QUE...

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para el aprendizaje y enseñanza de la Matemática que combina elementos de Aritmética, Geometría, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística. Está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas.



Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo, por lo que puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas.

1. Con el asistente matemático GeoGebra dé respuesta a las siguientes interrogantes.
 - a) Trace una circunferencia $C(O; r)$ y en ella sitúa los puntos A, B, C y D. ¿Qué polígono determinan dichos puntos? _____ ¿Qué relación existe entre la circunferencia y el polígono ABCD? _____
 - b) Exprese en la tabla 1 la amplitud de cada uno de sus ángulos interiores.
2. Varía la posición del punto D en el arco \widehat{AC} (en 3 momentos), coloque en cada caso los resultados de las amplitudes de los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD en la tabla 1. Comente entre sus compañeros de equipo las regularidades que observan.

Ángulos	Situación de	Momentos	¿Qué relaciones observas entre las

	partida	1	2	3	amplitudes de los ángulos opuestos?
ABC					
BCD					
CDA					
DAB					

Tabla 1

3. Al observar la última columna de la tabla 1 se aprecia que existe una relación entre las amplitudes de los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Enuncie la propiedad que cumplen dichos ángulos como una proposición.
- Reformule la proposición en la forma si ... entonces ...
 - Describa paso a paso cómo obtuvo la proposición.
 - Relacione los conocimientos matemáticos utilizados en la obtención de dicha proposición.
 - ¿Se cumplirá para todo cuadrilátero inscrito? ¿Cómo comprobarlo?

Orientaciones metodológicas específicas

Antes de la realización de la actividad es importante recordar la definición de polígono y polígono inscrito, así como aspectos importantes sobre el trabajo con el asistente (trazar circunferencia, hallar amplitudes de ángulos, deslizar puntos, etc.).

La actividad puede concebirse para realizar en el tiempo de máquinas como un estudio individual al concluir la primera clase de la unidad temática dos, por lo que servirá de enlace a clase que le sigue. Debe realizarse de manera grupal formando grupos de acuerdo a la cantidad de computadoras disponibles en el laboratorio. Cada grupo debe entregar por escrito una descripción del trabajo realizado (1 cuartilla), por donde se le otorgará la evaluación. También la actividad se puede desarrollar como una clase de Laboratorio que puede ser dosificada en el fondo de tiempo de la unidad (de ser posible y el programa de la asignatura lo facilite, este tipo de clases se propone como parte del III perfeccionamiento como parte del tratamiento dinámico de los contenidos matemáticos).

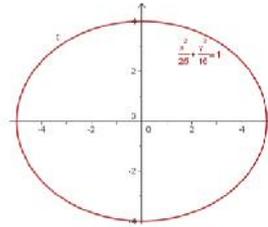
Actividad 9. ¿Cómo calcular el perímetro de una circunferencia?

Objetivo. Enunciar una proposición realizando mediciones experimentales de la longitud y el diámetro de una circunferencia, descubriendo la proporcionalidad que existe entre esas longitudes por comparación, para la obtención de la fórmula de cálculo de la longitud de la circunferencia.



SABÍAS QUÉ...

El hombre ha tenido que realizar en múltiples ocasiones mediciones para resolver problemas diversos, tales como: distancias (longitudes) entre dos puntos (ciudades), tamaños (longitudes) de objetos, capacidad de recipientes, superficies de terrenos, el tiempo, la temperatura y otras.



¿Cómo lo ha hecho?

Para medir una longitud se utilizan diferentes instrumentos como regla graduada, cartabones graduados, cinta métrica y otros. Si el objeto a medir no posee lados rectilíneos, ¿Cómo hacerlo?, ¿Cómo determinar el perímetro o longitud de una circunferencia? Reflexione:

- a) ¿De qué depende que una circunferencia sea más grande o más pequeña?
- b) Significa que existe una relación entre la longitud L de la circunferencia y su diámetro d . ¿Cuál es esa relación? Si a mayor diámetro mayor es la longitud de la circunferencia, entonces existe proporcionalidad entre L y d .
- c) Realice el siguiente experimento:
 - I. Buscar objetos que tengan caras circulares, (monedas metálicas, tapas de recipientes, envases cilíndricos u otros).
 - II. Tome una cuerda flexible y colóquela tensada en el borde de la circunferencia que limita al objeto.
 - III. Separe la cuerda del objeto y estírela sobre una regla graduada.
 - IV. Media la longitud que abarca y coloque el resultado en la tabla.
 - V. Mida el diámetro de cada objeto y colóquelo en la tabla según corresponda a la longitud obtenida.
 - VI. Complete la tabla con los datos obtenidos.

Objetos	Longitud circunferencia (L)	Diámetro (d)	Cociente $\frac{L}{d}$	Resultado (K)

a) ¿Qué regularidad observas en los resultados obtenidos? Confróntalos con otros compañeros.

El cociente $\frac{L}{d}$ para todos los pares de valores es aproximadamente constante, la proporcionalidad puede admitirse. Ese cociente es el factor de proporcionalidad y se designa por la letra griega π (se lee: pi). El número π es irracional, o sea, se representa mediante una expresión decimal infinita no periódica ($\pi = 3,1415926535\dots$). Al calcular con esa constante al resolver problemas se utiliza un valor aproximado a 3,14.

- b) Si $\frac{L}{d} = \pi$ ¿cómo calcular la longitud de una circunferencia de diámetro d ?, ¿Qué elementos de la circunferencia se requieren conocer para determinar su longitud?
- c) ¿Qué sucede si se conoce la longitud de un radio?, ¿Cómo expresar la fórmula?
- d) Enuncie como una proposición la relación obtenida.

Orientaciones metodológicas específicas

La primera parte de esta actividad que llega hasta el completamiento de la tabla se debe orientar al final de la clase de ejercicios sobre polígonos inscritos y circunscrito como una tarea para la casa. Una vez realizada esta primera parte, en la clase posterior se continúa el trabajo con la segunda parte en una elaboración conjunta. El profesor irá apoyando y controlando el desempeño de las distintas parejas de alumnos al realizar los incisos restantes, aprovechando para evaluar de forma individual a los alumnos, según el nivel de independencia mostrado, su participación en el proceso de búsqueda, rapidez en la obtención de los resultados, el empleo de la terminología y simbología matemática al ofrecer las respuestas.

2.3 Valoración del sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo

El sistema de actividades didácticas elaborado para la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas, se somete al criterio de expertos para su valoración teórica y se procesa mediante el método de Delphi.

En la investigación se asume como definición de expertos: "tanto al individuo en sí como a un grupo de personas u organizaciones capaces de ofrecer valoraciones conclusivas de un problema en cuestión y

hacer recomendaciones respecto a sus momentos fundamentales con un máximo de competencia" (Fiallo y Cerezal, 2003, p. 59).

Para el cumplimiento de este propósito el autor selecciona a 18 candidatos a expertos (anexo VIII), con amplia experiencia en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática, con una formación académica que asegura el nivel y profundidad de los conocimientos sobre la temática en cuestión.

Para la aplicación del método criterio de expertos, se siguieron los pasos o etapas siguientes:

Se elabora el contenido de la encuesta (anexo VII) para determinar coeficiente de conocimiento K (anexo VIII), y se obtienen valores del 0,35 al 1. De los candidatos seleccionados, 13 son de alto coeficiente de competencia ($0,8 \leq K \leq 1$), uno de coeficiente de competencia medio ($0,5 \leq K < 0,8$) y cuatro son de coeficiente de competencia bajo ($0 \leq K < 0,5$). En tal sentido de acuerdo a los resultados el autor selecciona a los 14 expertos con K alto y medio respectivamente (anexo VIII).

El grupo de expertos seleccionado posee la experiencia suficiente para emitir un juicio de valor sobre la búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas.

De los 14 expertos seleccionados (anexo VIII) cinco tienen la categoría docente de profesor titular, 6 de Profesor Auxiliar, dos de asistente y uno no posee porque trabaja en la enseñanza. Del total de los expertos, seis poseen el título académico de Doctor en ciencias, y ocho el de Máster en ciencias.

Se entregó a los 14 expertos un documento con la variable que se investiga, dimensiones e indicadores declarados, el sistema de actividades didácticas elaborado para el estudio y análisis, con finalidad de perfeccionar su estructuración metodológica y de contenido. Se comprobó que todos los aspectos analizados en el sistema de actividades, fueron evaluados por los expertos con las categorías de muy adecuado y bastante adecuado. (Anexo X, Tabla 1).

El análisis cualitativo de los por cientos de la evaluación por categorías de los aspectos incluidos en el sistema de actividades didácticas corroboró que:

- El 71.4%, de los expertos valoró de muy adecuada la concepción teórica y práctica de del sistema de actividades didácticas que refleja los principios teóricos que la sustentan, mientras el 28.6% lo consideran bastante adecuada.
- El 85.7% evaluó de muy adecuada la concepción estructural y metodológica del sistema de actividades didácticas, pues favorece el logro del objetivo por el cual se elaboró, y el 14.3% lo valoran de bastante adecuada.

- En lo referente a las dimensiones e indicadores para el estudio de la variable, el 92.9% evaluó de muy adecuada, mientras el 7.15% de los expertos la evaluó de bastante adecuada.
- Once expertos evaluaron nivel de satisfacción práctica del sistema de actividades didácticas de muy adecuado (representa el 78.6%) como solución al problema, y las posibilidades reales de su puesta en práctica. En este marco el 21.3% de los expertos evaluaron de bastante adecuada.
- La contribución que realiza el sistema de actividades didácticas al proceso de enseñanza-aprendizaje y en los fenómenos de la práctica social fue evaluada por el 71.4% muy adecuada, y bastante adecuada por el 56,25.

Además se calculó la opinión grupal del panel de expertos, obteniéndose la frecuencia relativa por aspectos evaluados. De esta forma, el proceso de valoración del sistema de actividades didáctica que en esta tesis se presenta obtuvo una consideración positiva por un panel que fue conformado según el Método Delphi. Los resultados obtenidos son positivos, destacándose el predominio de la más alta categoría evaluativa (Muy adecuado) en la mayoría de los aspectos del sistema de actividades didácticas objeto de análisis. Se arribó a este resultado a partir del análisis de los puntos de corte en comparación con las imágenes de las frecuencias relativas acumuladas en una distribución normal estándar, estos resultados se muestran en la tabla 4 del anexo X.

El análisis de las sugerencias dadas por los expertos, ayudó al autor realizar las modificaciones pertinentes para perfeccionar el sistema de actividades didácticas.

Conclusiones del capítulo

El estado actual del problema manifiesta dificultades en los alumnos en la orientación hacia la búsqueda de proposiciones, la búsqueda de conjeturas y evaluación de la vía implementada. En la conducción del proceso de búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo, los profesores no alcanzan éxitos, necesitan perfeccionar su modo de actuación, por lo que no logran los objetivos que plantea el programa.

El sistema de actividades didácticas que se ha propuesto como resultado de esta investigación, está conformado por un objetivo general, fundamentos teóricos, principios generales, que tienen salida en las actividades diseñadas a partir de las dimensiones e indicadores declarados y en las vías para su cumplimiento. Se han diseñado las actividades para momentos de familiarización, ejecución y control, de manera que desde situaciones de la vida, del estudio de contenidos matemáticos, de otras asignaturas y de hechos de la historia de la Matemática se sistematicen y apliquen conocimientos en la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo.

Las reflexiones teóricas y el criterio de los expertos sobre el sistema de actividades didácticas propuesto por el autor, condujo a inferencias sobre la forma en que deben desarrollarse las actividades de búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo, afirmando que es realizable y constituye una vía para ser utilizada por los profesores y contribuir al aprendizaje de los alumnos.

Conclusiones

Al realizar las tareas de investigación previstas se arriba a las siguientes conclusiones.

- La teoría del conocimiento del materialismo dialéctico, el enfoque histórico cultural de Vygotsky, la actividad y la comunicación de los alumnos, los principios de la Didáctica General concretados en los componentes del proceso de enseñanza aprendizaje, garantizan implementar el enfoque metodológico de la asignatura Matemática, sus líneas directrices, y el tratamiento metodológico de teoremas matemáticos y sus demostraciones. Estos fundamentos teóricos posibilitan dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática desde un enfoque desarrollador, lo que se concreta al elaborar el sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo en octavo grado.
- La aplicación de los diferentes instrumentos y técnicas constatan que al investigar el comportamiento de la variable búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo en octavo grado, los alumnos no logran el desempeño que declara el programa. Aunque se poseen las condiciones materiales y tecnológicas en la escuela, profesores graduados del nivel superior, responsables, motivados y comprometidos con sus alumnos, impone que transformen su modo de actuación en la conducción del proceso de enseñanza aprendizaje e inciten las actividades de búsqueda independiente.
- El sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado, debe contener las operaciones que exige cada dimensión, que propicie la profundización y sistematización del contenido en las diferentes actividades, utilizar formas colectivas e individuales de aprendizaje, para estimular la gestión del conocimiento, apoyándose en medios de enseñanza que racionalicen su actividad.
- Los criterios emitidos por los expertos permiten afirmar que el sistema de actividades didácticas favorece la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado, así como a la profundización y sistematización de los contenidos de la geometría plana, enseña a los alumnos las vías, métodos y procedimientos para la búsqueda de proposiciones. Las acciones previstas en el sistema ofrecen un modelo para emplear formas colectivas e individuales de aprendizaje, sustentándose en medios de enseñanza que hagan más racional el trabajo mental.

Recomendaciones

Para implementar las conclusiones, se impone plantearse las siguientes recomendaciones generales:

- Continuar profundizando en la sistematización de los referentes teóricos y metodológicos que sustentan la elaboración de sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado.
- Perfeccionar en esta temática para divulgar los resultados en eventos científicos de carácter pedagógico y de forma específica en la Didáctica de la Matemática.
- Desarrollar investigaciones en otros aspectos del tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones, referidos a la búsqueda de demostraciones, el uso de asistentes matemáticos en esta situación típica y otros.

Bibliografía

- Acosta, S., Domínguez, O., Quintana, A., Gort, M., Báez, L., y Cantón, J. (2018). Orientaciones metodológicas. Matemática octavo grado. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Acosta, S., Domínguez, O., y Gort, M. (2018). Programa Provisional. Matemática octavo grado. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Alfaro, C., Flores, P., y Valverde, G. (2020). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemática. *Revista Universidad y Sociedad*, 33(2), 55-75.
- Almeida, B. A. & Valdivia, M. de los A. (2009). La heurística en la matemática: un recurso para aprender a pensar. En O. Rodríguez (Presidencia). Curso realizado en el evento internacional FIMAT. Holguín, Cuba.
- Almeida, B. A. & Aportela, I. B. (2019). La autorregulación de la actividad de estudio al aprender Matemática. *Transformación*. Vol 15(3), pp. 334-346. Recuperado de <http://scielo.sld.cu/pdf/trf/v15n3/2077-2955-trf-15-03-263.pdf> Cuba. ISSN: 2077-2955, RNPS: 2098
- Álvarez, M. M. (2003). Lógica y procedimientos lógicos. (Material adicional). La Habana: CD de la Carrera de Profesor de Ciencias Exactas para la Enseñanza Media Superior. Curso Regular Diurno. Ministerio de Educación.
- Álvarez, M., Almeida, B., y Villegas, E. J (2014). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Anhalt, C. O., Staats, S., Cortez, R., & Civil, M. (2018). Mathematical modeling and cultural y relevant pedagogy. In *Cognition, metacognition, and culture in STEM education*. Springer, Cham.
- Ballester, S., García, J. E., Almeida, B., Álvarez, M. M., Rodríguez, M., González, R. A., Villegas, E., Fonseca, A. L., y Púig, N. (2018). *Didáctica de la Matemática Tomo I*. La Habana, Cuba: Félix Varela.
- Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I., Arango, C., García, M., Álvarez, A., Rodríguez, M., Batista, L.C., Villegas, E., Almeida, B., y Torres, P. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática Tomo I*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

- Campos, L. M. C. (2011). Sistema de actividades didácticas para el desarrollo de la competencia sociocultural en idioma inglés en los alumnos de la Licenciatura en Turismo, Cuadernos de Educación y Desarrollo,3(31), 11 – 24.
- Carrasco, A. (2012). Heurística. Aprender Matemática resolviendo problemas. La Habana: Pueblo y Educación.
- Cuesta, A., Pino, M. G. y Almeida, B. A. (2022). Traducir al lenguaje algebraico. Innovar la calidad de la enseñanza en la escuela Secundaria Básica. Atenas, Vol. 1 (57), 128-144. <http://atenas.umcc.cu>
- Editorial Grijalbo. (2008). Diccionario práctico Grijalbo. Grijalbo Mondadori.
- Fiallo, J., y Cerezal, J. (2003). Estadística aplicada a la investigación pedagógica y diseño experimental. Lima, Perú: Magisterial.
- Fundación Wikimedia. (2013). Wikipedia: la enciclopedia libre.<https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada>
- Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (2013). El tercer perfeccionamiento del sistema nacional de educación. Cambios más significativos. La Habana, Cuba. Material en soporte digital.
- Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. (2011). Bases generales para el perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación. La Habana: Ministerio de Educación.
- Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. (2011a). La escuela de educación general. Proyecciones y exigencias educativas. La Habana: Ministerio de Educación.
- Jiménez, M. H. (2010). Análisis Matemático en R. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Jiménez, M. H. (2013). Enfoque desarrollador en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática. La Habana: Pueblo y Educación.
- Jungk, W. (1981). Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 2 (segunda parte). Ciudad de La Habana: Libros para la Educación.
- Lenin, V. I. (1974). Materialismo y Empirio – Criticismo, Moscú, URSS, Ediciones en lenguas extranjeras Pekín.
- Martí, J. (1975). Obras Completas, t. 8. La Habana: Ciencias Sociales.
- Martínez, A. (2020). Tratamiento de teoremas de la matemática superior mediante la vía deductiva y la reductiva. Revista Conrado, 16(74), 370-378.
- Martínez, L. E. (s.f.). El sistema de actividades como resultado científico en la maestría en ciencias de la educación: ¿ser o no ser? Cuba: Pueblo y Educación.

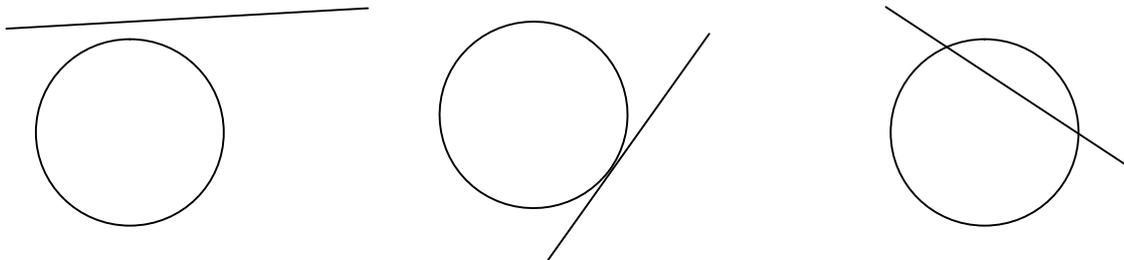
- Ministerio de Educación (2020). Adaptaciones curriculares para el curso escolar 2020-2021. Educación Secundaria Básica. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Pérez, J. B., Valdés, L. P., & Pino, M. R. (2015). Sistema de actividades metodológicas que contribuya al desarrollo de las habilidades comunicativas. En O. Díaz (Presidencia), taller internacional "maestro ante los retos del siglo XXI". Taller llevado a cabo en X Congreso Internacional de Matemática, Mayabeque, Cuba.
- Pietzsch, G., & et al. (1982). Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 3. Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.
- Rodríguez, J. B. (2003). Una propuesta metodológica para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones matemáticas. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona". La Habana, Cuba.
- Romero, R. (2018). Uso del lenguaje matemático para la resolución de situaciones problemáticas. Ejes (nº 4), pp. 64 – 67). ISSN 2357 – 3724
- Sachipia, J. M. C. (2018). La resolución de problemas: su incidencia en el perfeccionamiento del Proceso de Enseñanza – Aprendizaje del Análisis Matemático (tesis de maestría), Universidad Central "Marta Abreu" De Las Villas, Cuba.
- Sánchez, C. (1982). Análisis Matemático. Tomo I. Teoría de los límites. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Soto, E. (2011). Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos (3a ed.). <https://www.coursehero.com/file/26235598/Diccionario-Ilustrado-deConceptosMatem%C3%A1ticospdf/>
- Suárez, J., Duardo, C., y Rodríguez, R. (2020). El desarrollo de la competencia Matemática mediante problemas con aplicaciones de las funciones. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. CHAKIÑAN. Artículo de investigación, 12, 118-134.
- Torres, P. (1996). PROMET. Proposiciones Metodológicas. Didácticas cubanas en la enseñanza de la Matemática. La Habana, Cuba: Academia.
- Torres, P. A. (2000). La instrucción heurística de las matemáticas escolares. La Habana: Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona".
- Torres, P. A. (2013). El arte de enseñar científicamente. Consejos útiles a los profesores. La Habana: Pueblo y Educación.

- Torres, P. A. (2014). La instrucción heurística en la formación de profesores. En C. Dolores, M del S. García, J. A. Hernández y L. Sosa (Editores). *Matemática Educativa: la formación de profesores*. (Pp. 205 – 221). Chilpancingo, Gro, México: Ediciones Díaz de Santos, S. A.
- Valdivia, M. de los A. (Noviembre 2016). Argumentar matemáticamente: una habilidad en el adiestramiento lógico lingüístico. En B. Almeida. (Presidencia) Curso desarrollado en el XVIII Evento Internacional "La Matemática, la Estadística y la Computación: enseñanza y aplicaciones". Varadero, Matanzas, Cuba.
- Valle, A. (2010). Algunos resultados científico pedagógicos. Vías para su obtención. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. Cuba
- Vygotsky, L. S. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*, La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Zilmer, W. (1981). *Complementos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. La Habana: Editorial Libros Para la Educación.

Anexos

Anexo I. Prueba pedagógica inicial

I. En cada gráfico se representan circunferencias y rectas.



Observe cada representación y responda:

- Asocie a cada representación gráfica, una situación de la práctica. Explique por qué es necesario estudiar las relaciones entre estas figuras geométricas.
- Enumere en cada gráfico qué se conoce. ¿Por qué son diferentes? Denota los puntos comunes a la circunferencia y la recta en cada caso.

Se quiere establecer relaciones de posición entre circunferencia y recta, y la existencia de puntos comunes entre esas figuras. Puntualice al respecto:

- Contenidos geométricos conocidos que necesitas.
- ¿Cómo procederías en cada gráfico para establecer las relaciones?
- Relaciona los contenidos matemáticos a aplicar para formular proposición(es).
- Formula proposición(es) de las relaciones existentes.

Evalúa la vía utilizada, deténgase a pensar cómo lo hizo.

- Describa los métodos y procedimientos utilizados desde el inicio.
- Valore si las proposiciones enunciadas reflejan las relaciones deseadas.
- Argumente si considera necesario demostrar las proposiciones formuladas.

Anexo II. Entrevista a profesores

I. Parte inicial.

Objetivo: Constatar cómo los profesores conducen el proceso de enseñanza aprendizaje de la búsqueda de proposiciones matemáticas relacionadas con la circunferencia y el círculo.

Graduado de: _____ Año graduación: _____

Experiencia profesional en años: Educación _____ Secundaria Básica ____ Octavo grado _____

Superación recibida en los últimos 2 años: _____

Profesor, se realiza una investigación para perfeccionar el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas sobre circunferencia y círculo. Sus opiniones de la práctica pedagógica diaria y experiencia acumulada ayudaran a este propósito. Se agradece profundamente sus valoraciones y criterios.

Muchas gracias.

II. Parte principal.

1. En el programa de octavo grado se declaran habilidades con respecto al proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas que los alumnos deben lograr. Enumere al menos 3 de ellas.
2. En el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas existen potencialidades y barreras. Exprese al menos dos de cada una que se manifiesten en sus alumnos.
3. En las clases sobre la circunferencia y el círculo, se realizan acciones esenciales para dirigir la búsqueda de proposiciones matemáticas. Diga cuáles usted promueve en sus alumnos en los momentos de:
 - 3.1 Orientación hacia la búsqueda de la proposición.
 - 3.2 Trabajo en la búsqueda de la proposición.
 - 3.3 Evaluación de la vía empleada.
4. Valore la utilidad metodológica de las sugerencias e indicaciones que se ofrecen en el programa, las orientaciones metodológicas y el libro de texto para dirigir el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas sobre la circunferencia y el círculo.
5. Socialice las experiencias profesionales de su trabajo en el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas sobre la circunferencia y el círculo, de considerarlo conveniente.

Anexo III. Guía de observación a clases

Objetivo: Observar el desempeño de los alumnos y el modo de actuación del profesor en la conducción del proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas sobre la circunferencia y el círculo según las dimensiones e indicadores declarados.

Datos generales:

Nombre(s) y Apellidos del profesor: _____

Graduado de: _____

Año de la licenciatura: _____ Máster: _____

Grado: _____ Grupo: _____ Matrícula: _____ Asistencia: _____ %: _____

Asunto de la clase: _____

Objetivo de la clase: _____

Forma de organización del proceso: _____ Tipología de clase: _____

Categoría a evaluar. MB: Se aprecia siempre, B: Se aprecia frecuentemente,

R: Se aprecia algunas veces, I: Se aprecia muy poco M: Nunca

Aspectos a evaluar	MB	B	R	I	M
Intención de los objetivos de la clase a la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo.					
Realización de la comprobación parcial y total del cumplimiento de los objetivos.					
Las actividades planteadas a los alumnos están concebidas para la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo.					
Los métodos de enseñanza que favorecen la participación de los alumnos en la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo.					
Se emplean medios de enseñanza que apoyan la ejecución de acciones en la búsqueda de proposiciones sobre la circunferencia y el círculo en los alumnos (asistentes matemáticos).					
Orientación hacia la búsqueda de la proposición					
4. Creación de una motivación hacia la búsqueda.					
5. Precisión de las condiciones y características de la proposición.					
6. Determinación de las condiciones previas del campo matemático a que corresponde la proposición.					
Trabajo en la búsqueda de la proposición.					
1. Precisión de los métodos y procedimientos a implementar.					
2. Búsqueda de los contenidos matemáticos a aplicar.					
3. Enunciado de la proposición.					
Evaluación de la vía empleada.					
1. Análisis retrospectivo de los métodos y procedimientos implementados.					
2. Ajuste de la proposición enunciada con el objetivo planteado.					
3. Motivación de la necesidad de demostrar la proposición.					
Se realiza un uso racional del tiempo en el proceso de búsqueda de proposiciones					

Anexo IV. Guías para el análisis de los documentos

Guía para la revisión del programa de Matemática de octavo grado.

Objetivo: Obtener información de la concepción y orientaciones ofrecidas a los profesores para el trabajo de búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo.

Elementos a considerar en el análisis.

1. Concepción general del programa.

- Orientaciones que se ofrecen para la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo (según dimensiones e indicadores de la variable)

Guía para la revisión del plande clases.

Objetivo. Observar en la planificación de clases cómo se concibe el modo de actuación del profesor en la conducción del proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas sobre la circunferencia y el círculo, de manera que se estimule el desempeño de los alumnos hacia niveles superiores de desarrollo.

Elementos a considerar en el análisis.

- Concepción de la clase a partir de lo indicado en el enfoque metodológico general de la asignatura, la realización de las líneas directrices y el tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones.
- Estructuración de los componentes no personales del proceso para favorecer la búsqueda de proposiciones de la circunferencia y el círculo (según dimensiones e indicadores de la variable)

Anexo V. Resultados de la prueba pedagógica inicial

La prueba aprecia el dominio por los alumnos de los conocimientos, métodos y procedimientos para la búsqueda de proposiciones matemáticas, según las categorías de medición de las dimensiones e indicadores declarados en la variable de investigación.

Las evaluaciones se recogen por dimensiones e indicadores en una tabla de frecuencias.

INDICADORES	DIMENSIONES					
	OBP		TBP		EVE	
	Fi	Fi	Fi	fi	Fi	fi
1	16	0,533	18	0,60	18	0,6
2	8	0,266	9	0,30	7	0,23
3	6	0,2	3	0,10	5	0,17
TOTAL	30	1	30	1	30	1

Leyenda:

OBP: Orientación hacia la búsqueda de la proposición. TBP: Trabajo en la búsqueda de la proposición.

EVE: Evaluación de la vía empleada.

Se evidencia que los alumnos no tienen conciencia de la necesidad de la orientación hacia la búsqueda de una proposición. El indicador más deprimido es la precisión de las condiciones y características de la proposición que solo la cuarta parte de la muestra lo responde favorablemente.

La pregunta 2 dirigida a conocer cómo el alumno opera con los indicadores que se declaran para el trabajo en la búsqueda de la proposición, se constata:

Que solamente el 10 % de los alumnos fueron capaces de enunciar la proposición, lo que implica que existen dificultades en la utilización y empleo de métodos y medios que sustentan este indicador.

Está intencionada a determinar el comportamiento de la dimensión evaluación de la vía empleada. Se constata que el 8% de los alumnos de la muestra poseen los recursos para ello, comportamiento similar se manifestó al realizar el análisis retrospectivo de los métodos empleados en el proceso de búsqueda y en el ajuste de la proposición obtenida con el objetivo planteado. Además no se refieren a la motivación de la necesidad de una demostración cuando se emplea la vía reductiva.

Anexo VI. Prueba Kolmogórov Smirnovf

Criterio de veracidad

Basados en los resultados que arrojó el instrumento aplicado (Prueba pedagógica inicial). ¿Se puede afirmar que existen dificultades en la búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas?

H₀ (hipótesis nula): no existen dificultades en el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas.

H₁ (hipótesis alternativa): Si existen dificultades en el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas.

Regla de decisión:

Rechazar H₀: $D_{max} > D_{n1}^*$.

No rechazar H₀: $D_{max} \leq D_{n1}^*$.

Calculando el estadígrafo D_{max} :

Resultados	Fi	Fai ↓	Fi	fai ↓	ei	fie	fiea	D
------------	----	-------	----	-------	----	-----	------	---

M	19	19	0.63	0.63	10	0.33	0.33	0.30
R	8	27	0.26	0.89	10	0.33	0.66	0.23
B	3	30	0.1	1	10	0.33	0.99	0.01
Total	30		1					

Con un nivel de confianza asumido de $\alpha=0.05$ y el $D_{\max}=0.30$.

El percentil (libro de tablas estadística pág. 56) $D_{n_1-\alpha} = D^{30}_{1-0.05} = D^{30}_{0.95}$

Como $D_{\max}=0.30 > D^{(30)}_{0.95} = 0.24$.

R: / Por lo tanto $D_{\max} > D_{n_1-\alpha}$ se rechaza H_0 , luego podemos afirmar basado en los resultados de la muestra con un nivel de significación de 0.05, que existen dificultades en el proceso de búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado de la ESBU "Cándido González" municipio, Matanzas.

Anexo VII. Encuesta para la selección de los expertos

Objetivo: Determinar el coeficiente de competencia de los expertos candidatos para la selección de los que participarán en la valoración teórica del sistema de actividades didácticas.

Estimado(a) colega: es de nuestro interés someter a criterio de expertos la valoración teórica de un sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en octavo grado. Sus criterios son de extraordinaria importancia para la investigación, por lo que se solicita su cooperación. ¡Muchas Gracias!

Datos generales:

Nombres y apellidos _____

Título académico que posee: _____

Labor que desempeña _____

Años de experiencia en la docencia: _____ y en la Educación Secundaria Básica: _____

Años de experiencia en la dirección metodológica: _____

Categoría científica: _____ Categoría docente: _____

Centro de trabajo: _____

1. En la tabla aparece una escala que le permitirá expresar el nivel de conocimiento que usted considera poseer, para valorar un sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones

matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en octavo grado. Marque con una "X" en la casilla que considere el valor que se corresponde con el grado de conocimiento que usted tiene acerca del tema. El cero (0) corresponde al mínimo y el 10 al máximo.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Si usted tuviera que argumentar sus criterios acerca sistema de actividades didácticas para la búsqueda de proposiciones matemáticas en el estudio de la circunferencia y el círculo en octavo grado, tendría que apelar a su capacidad de análisis, experiencia, etc. Señale con una X el grado de influencia que tienen las fuentes expuestas en la tabla en la argumentación de los criterios que usted puede ofrecer sobre el tema.

Fuentes de argumentación	Grado de influencia		
	Alto (A)	Medio (M)	Bajo (B)
Sus análisis teóricos sobre el tema			
Sus experiencias en el trabajo profesional			
Consultas de trabajos de autores nacionales			
Consultas de trabajos de autores extranjeros			
Sus conocimientos sobre el tema en el extranjero			
Su intuición			

TABLA DE PATRÓN PARA DETERMINAR K_a

Fuentes de argumentación	Grado de influencia de cada una de las fuentes en sus criterios		
	Alto (A)	Medio (M)	Bajo (B)
1. Análisis teóricos realizados.	0.3	0.2	0.1
2. Experiencia obtenida.	0.5	0.4	0.2
3. Trabajos de autores nacionales.	0.05	0.05	0.05
4. Trabajos de autores Extranjeros.	0.05	0.05	0.05
5. Conocimiento del estado actual del problema en el extranjero.	0.05	0.05	0.05
6. Intuición.	0.05	0.05	0.05
TOTAL	1.00	0.8	0.5

Anexo VIII. Relación de los candidatos a expertos y su coeficiente de competencia

No	GC/CD	Centro	Cargo	AE	$K = \frac{1}{2} (Kc + Ka)$	Valor
1	Dr. C/Titular	UC	Profesor	44	0,5 (1 + 1)	1
2	Ms.C/ Auxiliar	UM	J/Dpto	19	0,5 (1 + 0,9)	0,95
3	Dr. C/Titular	UO	Profesora	24	0,5 (0,8 + 0,9)	0,85
4	Dr. C/Titular	UCV	Profesor	42	0,5 (1 + 0,9)	0,95
5	Ms.C/ Auxiliar	UM	Profesora	23	0,5 (1 + 0,9)	0,95
6	Ms.C/ Asistente	UM	Profesora	19	0,5 (1 + 0,9)	0,95
7	Dr. C/Titular	UH	Profesora	22	0,5 (1 + 1)	1
8	Dr. C/Titular	UM	Profesora	37	0,5 (0,8 + 0,9)	0,85
9	Ms.C/ Auxiliar	UM	Profesor	31	0,5 (1 + 0,9)	0,95
10	Dr. C/Asistente	UM	Profesor	7	0,5 (1 + 0,9)	0,95
11	Ms.C/ Auxiliar	UM	Profesora	22	0,5 (1 + 1)	1
12	Ms.C/ Instructor	UM	Profesora	6	0,5 (0,5 + 0,4)	0,45
13	Ms.C/ Auxiliar	UM	V/D Inv.	20	0,5 (1 + 0,9)	0,95
14	Ms.C/ Auxiliar	UM	Profesora	22	0,5 (1 + 0,9)	0,95
15	Ms.C/ Asistente	UM	Profesor	15	0,5 (0,4 + 0,4)	0,4
16	Ms.C/ Auxiliar	UM	Profesora	18	0,5 (0,5 + 0,3)	0,4
17	Ms.C	S/B	Profesora	27	0,5 (0,4 + 0,3)	0,35
18	Ms.C	DMEC	Metodólogo	28	0,5 (0,7 + 0,8)	0,75

Expertos seleccionados

No	GC/CD	Centro	Cargo	AE	K
1	Dr. C/Titular	UC	Profesor	44	1
2	Ms.C/ Auxiliar	UM	J/Dpto	19	0.95
3	Dr. C/Titular	UO	Profesora	24	0.85
4	Dr. C/Titular	UCV	Profesor	42	0.95
5	Ms.C/ Auxiliar	UM	V/D Inv.	20	0.95
6	Ms.C/ Asistente	UM	Profesora	19	0.95
7	Dr. C/Titular	UH	Profesora	22	1

8	Dr. C/Titular	UM	Profesora	37	0.85
9	Dr. C/Asistente	UM	Profesor	7	0.95
10	Ms.C/ Auxiliar	UM	Profesora	22	1
11	Ms.C/ Auxiliar	UM	Profesora	23	0.95
12	Ms.C/ Auxiliar	UM	Profesor	22	0.95
13	Ms.C/ Auxiliar	UM	Profesor	31	0.95
14	Ms.C	DMEC	Metodólogo	28	0.75

Anexo IX. Encuesta para expertos.

Como parte del trabajo de investigación que se desarrolla sobre la elaboración de un “sistema de actividades didácticas que apoye la búsqueda de proposiciones sobre circunferencia y el círculo en los alumnos de octavo grado”, se le pide su colaboración como experto para que exprese sus valoraciones y criterios de la propuesta presentada, los que serán de gran valor científico y metodológico por su experiencia profesional.

Aspectos a evaluar por los expertos

ASPECTOS A EVALUAR	5	4	3	2	1
	MA	BA	A	PA	I
1. Concepción teórica y práctica del sistema de actividades didácticas.					
2. Estructuración metodológica del sistema de actividades didácticas					
3. Variable de investigación y dimensiones e indicadores propuestos					
4. Nivel de satisfacción práctica del sistema de actividades didácticas, y posibilidades reales de su puesta en práctica.					
5. Contribución del sistema de actividades didácticas al proceso de enseñanza-aprendizaje					

MA: Muy adecuado; BA: Bastante adecuado; A: Adecuado; P: Poco adecuado; I: inadecuado;

- Otras observaciones que considere conveniente ofrecer con relación a la propuesta presentada.

Anexo X: Resultados de la valoración del sistema de actividades didácticas por el panel de expertos

Objetivo: Valorar los resultados de los criterios de validez emitidos por los expertos sobre el sistema de actividades didácticas propuesto para la búsqueda de proposiciones matemáticas de la circunferencia y el círculo.

Tabla 1. Frecuencia absoluta por categorías

Atributos	C1	C2	C3	C4	C5
A1	10	4	0	0	0
A2	12	2	0	0	0
A3	13	1	0	0	0
A4	11	3	0	0	0
A5	10	4	0	0	0

Tabla 2. Frecuencia absoluta acumulada por categorías

Atributos	C1	C2	C3	C4	C5
A1	10	14	14	14	14
A2	12	14	14	14	14
A3	13	14	14	14	14
A4	11	14	14	14	14
A5	10	14	14	14	14

Tabla 3. Frecuencia relativa acumulada por categorías

Atributos	C1	C2	C3	C4	C5
A1	0.7143	1	1	1	1
A2	0.8572	1	1	1	1
A3	0.9286	1	1	1	1
A4	0.7858	1	1	1	1
A5	0.7143	1	1	1	1

Tabla 4. Imagen de las frecuencias relativas acumuladas y puntos de corte

Atributos	C1	C2	C3	C4	Suma	Promedio	N-P	Valoración
A1	0.56	0	0	0	0.56	0.14	0.08	Muy adecuado
A2	1.07	0	0	0	1.07	0.27	-0.05	Muy adecuado
A3	1.47	0	0	0	1.47	0.37	-0.15	Muy adecuado
A4	0.80	0	0	0	0.80	0.20	0.02	Muy adecuado
A5	0.56	0	0	0	0.56	0.14	0.08	Muy adecuado
Puntos de corte	0.89	0	0	0	4.45			