UNIVERSIDAD DE MATANZAS

EL TRATAMIENTO DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN LA UNIDAD: CURVAS DE SEGUNDO GRADO EN LA ENSENAÑZA PREUNIVERSITARIA

Tesis presentada en opción al Título Académico de Máster en Matemática Educativa

Autora: Lic. Anya Díaz Cutiño

Tutor: Dr. C. Maritza Petersson Roldán

Matanzas 2022

"(...) busquen distintas maneras de hacer; socializar mejor los conocimientos; hablar y contar historia de las matemáticas y los buenos matemáticos; y buscar apoyo constante en las tecnologías de la informática y las comunicaciones; todo ello sin obviar la formación continua de profesores (...)"

Miguel Díaz Canel 2019

Presidente de la República de Cuba

AGRADECIMIENTOS

- A mi tutora la Dr.C Maritza Petersson Roldán, a Lourdes Tarifa y a todo el claustro de la maestría, por la exigencia, la ayuda, el apoyo y la confianza depositada en mí.
- A mis padres y familia por el apoyo, la ayuda y comprensión incondicional.
- A mis amistades y compañeros por ofrecer su ayuda siempre que ha sido necesario.
- A todos los que de cualquier forma contribuyeron en mi desarrollo profesional.

Gracias a todos por confiar en mí.

La autora

DEDICATORIA

- A mis padres y familiares por el esfuerzo, y todo el amor depositado para cumplir mis sueños.
- A mi tutora y por la confianza y el apoyo que me ofrecieron.
- A mis amistades y compañeros por la ayuda que me ofrecieron.

Resumen

El tratamiento de los conceptos en la Unidad: Curvas de segundo grado es de gran importancia para potenciar en los estudiantes la comprensión de las relaciones matemática, el adiestramiento lógico lingüístico y permite transmitir importantes nociones ideológicas referentes a la teoría del conocimiento y el desarrollo de numerosas propiedades. Sin embargo, los estudiantes no tienen motivación para su estudio, asimilan solo la forma para expresar el concepto y no su contenido y se muestra además como es insuficiente la preparación del colectivo pedagógico para contribuir al tratamiento de los conceptos en la Unidad: Curvas de segundo grado en los estudiantes. En tal sentido, la investigación persigue como objetivo elaborar un sistema de actividades didácticas para el tratamiento de los conceptos de las secciones cónicas en onceno grado del IPU Félix Varela Morales. Esta es conducida bajo la égida del método filosófico dialéctico materialista y en consecuencia se aplicaron métodos teóricos, empíricos y estadísticos de investigación. La autora, en el desempeño como docente en la enseñanza de la Matemática en en el Instituto Preuniversitario Félix Varela Morales del municipio de Cárdenas constató algunas dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas, de acuerdo a esto, se elaboró el sistema actividades didácticas, encaminado al perfeccionamiento del tratamiento de los conceptos en la Unidad Curvas de segundo grado. Posteriormente se realizó la validación de la propuesta mediante el empleo de los métodos empíricos y estadísticos.

INDICE

Contenido **página**

INTRODUCCIÓN

La matemática constituye una poderosa herramienta para la descripción del mundo, sus fenómenos, relaciones y problemas, además es una ciencia presente en los diferentes niveles educativos tanto por sus valores utilitarios para sí misma, como para otras ciencias, pero sobre todas las cosas por sus potencialidades para desarrollar el pensamiento lógico, la adquisición de estrategias cognitivas de orden superior y otras destrezas intelectuales indispensables para enfrentar la era o sociedad del conocimiento, inmersa en transformaciones caracterizadas por procesos colaborativos, altamente dinámicos y complejos (Hassen, Turki et al., 2016).

Muchos estudiosos en el tema de la enseñanza de las matemáticas consideran que esta ciencia configura actitudes y valores en los estudiantes (Petersson y Rivero, 2021) pues durante el estudio de esta asignatura no solo se imparten contenidos y procedimientos de solución que se deben poner en práctica sino también se desarrollan habilidades, hábitos, cualidades, convicciones y actitudes en los estudiantes en los diferentes subsistemas de educación.

En tal sentido la enseñanza de la Matemática en el preuniversitario está encaminada a lograr el desarrollo y la formación integral de la personalidad del estudiante con una base cultural en correspondencia con los ideales de la sociedad socialista cubana, además de fomentar formas de sentir, pensar y actuar, de acuerdo con sus particularidades e intereses individuales, en correlación con las necesidades sociales, que le permita asumir una concepción científica del mundo y prepararse para la vida.

En este nivel educativo los estudiantes tienen que ser capaces de apropiarse, ampliar, profundizar y aplicar el contenido en la interpretación de hechos, objetos, procesos y fenómenos de la naturaleza, aunque en la mayoría de los casos ese proceso se ve afectado por una serie de estereotipos creados alrededor del estudiante que son percibidos, vividos y transmitidos en todos los entornos donde interactúa, propiciando en él un cúmulo de prejuicios con respecto al aprendizaje matemático, que afectan de forma significativa su proceso académico (Prada, Gamboa y Avendaño, 2020), además de generar apatía y rechazo a esta ciencia (Murillo, 2020).

Esta falta de motivación por parte de los estudiantes tiene origen multifactorial, pero sin duda, en su mayoría vinculadas en cómo históricamente se ha enseñado esta ciencia, donde ha predominado una escasa interactividad en el aula y el poco uso de metodologías acorde a las necesidades del individuo de acuerdo al contexto en que se desarrolla.

En el empeño de revertir tal situación se hace necesario utilizar nuevas estrategias en la enseñanza de la Matemática, atentas a los elementos cognitivos y procedimentales de la instrucción y que considere los aspectos afectivos y motivacionales con el suficiente grado de importancia y rigor, a partir de su constatada influencia tanto en los procesos como en los resultados del aprendizaje.

Disímiles son las investigaciones que se realizan con el objetivo de modificar las metodologías y los medios de enseñanza en el perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática y en tal sentido es relevante el desarrollo alcanzado por las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC), que aportan herramientas que "facilitan el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, mediante recursos que proporcionan una real experiencia en los estudiantes, quienes a través de la experimentación matemática se vuelven protagonistas de su proceso de aprendizaje" (Grisales, 2018, p.198).

Los conceptos son una categoría especial en la enseñanza de la Matemática, pues constituyen la forma fundamental con que opera el pensamiento matemático en especial y de manera general en cualquier ciencia (Bueno, Naviera y González, 2020). Con su formación se contribuye a la consecución del importante objetivo de la matemática: representar la relación entre la matemática y la realidad objetiva. En el estudio de las secciones cónicas en onceno grado de la Educación Preuniversitaria es de vital importancia que el estudiante comprenda cada uno de los conceptos a tratar para lograr distinguir sus elementos y observe qué sucede cuando se varía alguno de ellos, de manera que permita arribar a conclusiones y establecer generalidades. "Por lo general los estudiantes presentan dificultades a la hora de interiorizar el aprendizaje de los conceptos matemáticos, porque se carece de herramientas de aprendizaje que incluyan aplicaciones reales de las temáticas, y que sean de fácil acceso y contextualizadas" (Murillo, 2020, p. 22).

Una revisión de la literatura especializada en el tema (Jorge, 2012; Sánchez, 2015; Peña, Zipa y Deldago, 2020; Beltrán, 2019; González, Garcés y Romay, 2021), se pudo constatar que existen algunas dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas y que pueden resumirse en los siguientes elementos:

- Los estudiantes aprenden de memoria las ecuaciones, no hacen procesos de análisis y tienen dificultad en relacionar las diversas escrituras algebraicas, además de no relacionar de forma lógica una representación algebraica con una geométrica.
- Existe debilidad para modelar matemáticamente fenómenos de la realidad.
- El tratamiento que se da en las aulas prioriza la enseñanza de ecuaciones y algoritmos y se asocian representaciones gráficas como definiciones, dejando de lado el componente geométrico espacial característico de las cónicas.

La autora de esta investigación, en su experiencia como docente en la enseñanza de la Matemática en diferentes instituciones del nivel educativo preuniversitario, constata elementos coincidentes con los expuestos y precisa algunas de las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas que se relacionan a continuación:

- Los estudiantes ven el concepto con su respectiva definición como algo que deben memorizar y que será importante para la resolución de ejercicios en clases posteriores.
- Asimilan solo la forma para expresar el concepto y no su contenido.
- Conocen distintos conceptos, distintas definiciones, pero no pueden explicarlos, traer ejemplos de la vida, analizar algún hecho sobre la base de la definición estudiada.
- Predomina la expresión mecánica externa del objeto matemático sobre su contenido en la consciencia y en la memoria de los estudiantes.
- En la mayoría de los casos no son capaces de ver la utilidad que tienen los conceptos relativos a las secciones cónicas, o sea su aplicación en la práctica cómo le pueden ayudar a resolver problemas de la vida cotidiana.
- Estudian sus conceptos y las ecuaciones que las definen, pero mayormente el estudio de estas se centra en resolver ejercicios de cálculo.
- Se ofrece muy poco tratamiento a la utilización de medios de enseñanza donde el estudiante pueda construir el nuevo concepto y su definición, identificar representantes y no representantes y a partir de ahí llegar a establecer generalizaciones.
- Es muy escasa la utilización de los programas informáticos que favorecen la asimilación de este contenido para su posterior aplicación y utilidad en la vida práctica.

Es válido destacar la existencia de ejercicios variados en los libros de texto actuales relacionados con el contenido de las secciones cónicas, pero están en función del trabajo con las ecuaciones que identifican a las secciones cónicas, es decir, obvian ejercicios relacionados al tratamiento de estos conceptos y sus definiciones, a lo relacionado con su aplicación práctica y a la utilización de la tecnología en su aprendizaje.

Se cuenta con el programa de la asignatura, sus orientaciones metodológicas y de un espacio de preparación metodológica, tanto individual como colectiva, para el tratamiento de contenidos matemáticos, pero es insuficiente la metodología que se propone a emplear por los profesores en el tratamiento de los conceptos y sus definiciones, con carencia del uso de las tecnologías en la enseñanza de las secciones cónicas, que jugarían un papel fundamental para la visualización de los conceptos.

Se expresa una contradicción entre lo que desde la Didáctica de la Matemática se plantea para el tratamiento de los conceptos y sus definiciones y lo que en la realidad se observa en la escuela (estudiantes memorizan y no reflexionan). Es por ello, que la autora de la investigación declara el siguiente **problema científico:** ¿Cómo contribuir al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas en onceno grado del Instituto Preuniversitario Urbano (IPU) Félix Varela Morales?

Se considera como **objeto de la investigación:** El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria, mientras que el **campo de acción** se corresponde con el proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas en onceno grado del IPU Félix Varela Morales. Constituye **objetivo de la investigación** elaborar un sistema de actividades didácticas para el tratamiento de los conceptos de las secciones cónicas en onceno grado del IPU Félix Varela Morales.

Para abordar el objetivo propuesto, la investigación responde a las **preguntas científicas:**

1- ¿Cuáles son los fundamentos teórico-metodológicos que sustentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas en la Educación Preuniversitaria?
2- ¿Cuál es el estado actual del tratamiento de los conceptos de las secciones cónicas en onceno grado del IPU Félix Varela Morales?
3- ¿Qué elementos deben considerarse en la elaboración del sistema de actividades didácticas en la unidad Curvas de Segundo Grado para el tratamiento de los

conceptos relativos a las secciones cónicas que propicien el perfeccionamiento del proceso de su enseñanza y aprendizaje?

4- ¿Cuáles son los resultados de la validación del sistema de actividades didácticas para el tratamiento de los conceptos de las secciones cónicas en onceno grado del IPU Félix Varela Morales?

Para dar respuesta a las preguntas científicas se han determinado las **tareas de investigación** que a continuación se mencionan:

1- Determinación de los fundamentos teórico-metodológicos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas en la Educación Preuniversitaria.
2- Caracterización del estado actual del tratamiento de los conceptos de las secciones cónicas en onceno grado del IPU Félix Varela Morales.
3- Estructuración de las actividades didácticas que han de incluirse en un sistema para el tratamiento de los conceptos de las secciones cónicas en onceno grado del IPU Félix Varela Morales.
4- Valoración de los resultados que se obtienen con la aplicación parcial del sistema de actividades didácticas propuesto y su evaluación por el criterio de especialistas, que demuestran su validez.

La investigación se fundamenta en el método dialéctico materialista como enfoque que orienta el proceso de obtención del conocimiento. Asimismo, se utilizaron métodos generales del conocimiento científico, tanto del nivel teórico como empírico. Los métodos del nivel teórico empleados fueron:

El método histórico-lógico facilitó el estudio y valoración a partir del desarrollo de las diferentes concepciones sobre el tratamiento de los conceptos en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, delimitar tendencias y puntos de vista al respecto.

El método inductivo-deductivo, permitió la determinación de los fundamentos teóricos que se expresan en la bibliografía por diferentes autores e inducir y/o interpretar las principales regularidades que aportaron los instrumentos aplicados, además para realizar la modelación de las actividades a incluir en el sistema que se propone, de manera que contribuya a la transformación que se desea en el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas en onceno grado.

El método analítico-sintético, se empleó para el estudio de la bibliografía consultada, para el análisis de las diferentes posiciones acerca de la concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas en onceno grado y precisar los fundamentos teóricos que sustentan la enseñanza de los conceptos.

La modelación para el establecimiento de interrelaciones entre los fundamentos teórico-metodológicos del sistema propuesto y para establecer la relación entre todos sus componentes y el vínculo con la práctica pedagógica.

Los métodos del nivel empírico empleados fueron:

Revisión de documentos que rigen la política de trabajo como planes de estudio, programas, orientaciones metodológicas, modelos, así como bibliografía actualizada, los cuales brindan información acerca de la necesidad de garantizar el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas en onceno grado.

La observación a clases para constatar el trabajo de los profesores en el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas en onceno grado y el tratamiento que hacen de los conceptos relativos al tema.

Entrevista al coordinador general del área de Ciencias Exactas del IPU Félix Varela Morales para conocer las potencialidades y debilidades del claustro en el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas en onceno grado.

Encuestas a profesores del colectivo pedagógico para conocer el nivel de preparación que poseen para el tratamiento de los conceptos de las secciones cónicas en onceno grado y en el uso de los medios tecnológicos en el proceso de enseñanza aprendizaje del tema.

La significación teórica de esta investigación está en la sistematización de los referentes teóricos que fundamentan el sistema de actividades didácticas para contribuir al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas en la enseñanza preuniversitaria.

Su significación práctica está dada en la transformación que produce la introducción del sistema de actividades didácticas en el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas en el preuniversitario que contribuye al aprendizaje de los conceptos por los estudiantes de onceno grado del IPU Félix Varela Morales.

La tesis es novedosa porque con un enfoque teórico-metodológico para el tratamiento de los conceptos de las secciones cónicas en onceno grado se logran organizar un conjunto de actividades didácticas como un sistema que incorpora la visualización con objetivos establecidos en las diferentes etapas de la formación de los conceptos.

La investigación fue desarrollada bajo el paradigma cualitativo y su informe se estructura en introducción y dos capítulos. En el capítulo 1 se analizan los elementos teóricos metodológicos que fundamentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas en el preuniversitario. En el capítulo 2 se diseña y elabora el sistema de actividades didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas en onceno grado del IPU Félix Varela Morales a partir de la constatación de las deficiencias y carencias actuales en dicha institución, además se presenta la valoración de la propuesta.

Posteriormente, se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de la investigación; la bibliografía consultada y un grupo de anexos de necesaria inclusión, como complemento para la comprensión de los resultados obtenidos durante la investigación.

CAPÍTULO I

LAS SECCIONES CÓNICAS SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN EL PREUNIVERSITARIO

En este capítulo se presentan los fundamentos teórico-metodológicos que sustentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria. Se abordan los elementos esenciales del proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos, así como su tratamiento en la escuela. Se realiza una caracterización de las secciones cónicas y su enseñanza destacándose el papel de la visualización en el estudio de la matemática.

1.1 El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario

Los conocimientos matemáticos surgidos de la necesidad de dar explicación a los fenómenos complejos de la realidad, tienen un gran valor para la vida. "La aplicación de la Matemática juega un importante papel en la planificación de la economía, la dirección de la producción, el diagnóstico y tratamientos de enfermedades, el estudio de rendimiento de atletas" (Ballester, et al, 2015, p.11), invadiendo así, todos los campos del saber de la humanidad.

La Matemática, como asignatura, por sus características y posibilidades educativas, brinda una contribución importante a la formación de la concepción científica del mundo, a la capacidad de poder valorar hechos y fenómenos de la realidad desde el punto de vista matemático, sobre la base de principios y valores de la sociedad cubana y al desarrollo de cualidades, convicciones, valores y actitudes positivas en los estudiantes, a la vez que permite satisfacer las demandas de preparación del hombre para su inserción en el mundo contemporáneo, desarrollar una elevada disposición hacia el trabajo y a la adquisición de habilidades tales como demostrar, identificar, comparar, calcular y elevar la cultura económica del individuo.

El estudio de la Matemática potencia el desarrollo y la formación integral de la personalidad del estudiante. Su estudio en la escuela cubana según Ballester, et al., 2018 está fundamentado en tres elementos básicos:

- El reconocido valor de los conocimientos matemáticos para la solución de los problemas que deben enfrentarse en la edificación de toda la sociedad.
- Las potencialidades que radican en el aprendizaje de la Matemática para contribuir al desarrollo del pensamiento.

• La contribución que puede prestar la enseñanza de la Matemática al desarrollo de la conciencia y la educación de las nuevas generaciones. (p.9)

La asignatura Matemática en el nivel educativo preuniversitario, como última fase del subsistema de Educación General en Cuba, pretende desarrollar en los estudiantes una concepción científica del mundo y una cultura político-ideológica, jurídica, económica y tributaria mediante el modo en que se aplican los conocimientos matemáticos, para utilizar estos conocimientos en la comprensión de las necesidades vitales del país mediante la aplicación de procesos del pensamiento, técnicas y estrategias de trabajo y la utilización de conceptos, relaciones y procedimientos de la estadística descriptiva y las probabilidades, la aritmética, el álgebra, la geometría y la trigonometría. Además, desarrolla hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental al potenciar procesos mentales como la abstracción, la inducción y la jerarquización entre otros. Contribuye a la formación de cualidades de la personalidad como el esfuerzo, la dedicación, la responsabilidad. Todas estas cualidades garantizan un adecuado desempeño a los estudiantes cuando ingresan en la educación superior a formarse en un programa tecnológico o profesional (Prada, Gamboa y Avendaño, 2020), además de que le permiten la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelve.

El proceso de enseñanza-aprendizaje no se desarrolla espontánea ni empíricamente, sino que transcurre con objetivos bien determinados y según regularidades históricamente comprobadas, de ahí que su desarrollo debe realizarse sobre bases científicas.

La enseñanza de la Matemática debe ser a partir de contradicciones que deben resolver a través de su aprendizaje de manera que los contenidos matemáticos tengan sentido, que permita al estudiante ingresar al universo matemático, no sólo conocer y aprender los conceptos fundamentales, sino también conocer y practicar las actividades propias de esta ciencia, su forma de actuar, de obtener nuevos resultados, de validarlos, y que fundamentalmente le permita involucrarse en el aprendizaje. (Chevallard et al., 1997, p.335)

En la clase de Matemática se debe velar por el volumen de información que pueden asimilar los estudiantes, distribución de la carga de trabajo para evitar el cansancio y la monotonía, es necesario lograr que no prevalezca el incremento de información, sino en contraposición con la fragmentación que ello implica, se logren marcos de pensamiento interdisciplinarios que ayuden a los estudiantes a solucionar los problemas complejos de la realidad y descubrir los vínculos existentes entre los hechos y fenómenos aparentemente aislados e inconexos.

El proceso enseñanza-aprendizaje tiene como propósito esencial contribuir al desarrollo de la personalidad integral de los estudiantes y exige que "el profesor deberá concebir la clase de una forma desarrolladora (…), en un proceso de enseñanza-aprendizaje con un enfoque desarrollador e interdisciplinar (…)". (MINED, 2012, p. 26).

El proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador:

"(…) aquel que garantiza en el individuo la apropiación activa y creadora de la cultura, propiciando el desarrollo de su auto-perfeccionamiento constante, de su autonomía y autodeterminación, en íntima conexión con los necesarios procesos de socialización, compromiso y responsabilidad social". Y exige para ello tres criterios básicos: (…) activar la apropiación de conocimientos, destrezas y capacidades intelectuales en estrecha armonía con la formación de sentimientos, motivaciones, cualidades, valores, convicciones e ideales (…); potenciar el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y a la autorregulación, así como el desarrollo en el sujeto de la capacidad de conocer, controlar y transformar creadoramente su propia persona y su medio; desarrollar la capacidad de realizar aprendizajes a lo largo de toda su vida, a partir del dominio de la habilidades, estrategias y motivaciones para aprender a aprender, y de la necesidad de una autoeducación constante". (Castellanos, et al, 2001, p. 33).

Esta concepción presupone como dimensiones del aprendizaje desarrollador: la activación-regulación, la significatividad y la motivación por aprender.

"(...) debe ser aquel que constituye un sistema donde tanto la enseñanza como el aprendizaje, como subsistemas, se basan en una educación desarrolladora, lo que implica una comunicación y actividad intencionales, cuyo accionar didáctico genera estrategias de aprendizajes para el desarrollo de una personalidad integral y autodeterminada del educando, en los marcos de la escuela como institución social transmisora de la cultura (…)". (Addine, et al, 2004, p. 52).

Este revela como característica esencial, la integración de lo cognitivo y lo afectivo y de lo instructivo y lo educativo en el marco de las relaciones que se dan entre profesor y estudiantes y entre estudiantes, donde se hace explícito el accionar didáctico que debe caracterizar dicho proceso.

El análisis de las concepciones de los autores anteriormente citados permite asumir que:

"(…) un aprendizaje desarrollador de la matemática es el que garantiza en el individuo la apropiación activa y creadora del saber y poder matemático, de estrategias de aprendizaje generales y específicas, de los procesos de pensamiento y las formas de trabajo propias de la matemática, su simbología y terminología, que al ser estructurados en forma de sistema, le permitan comprender y transformar el mundo que le rodea y a su vez transformarse, potenciando el desarrollo de su independencia cognoscitiva en estrecha relación con los necesarios procesos de socialización, compromiso y responsabilidad social (…) (Suero, 2001, p.11).

Esta definición conduce a la necesidad de plantear cómo se expresan los tres criterios básicos que debe cumplir el aprendizaje desarrollador de la matemática, así como identificar los elementos que caracterizan sus dimensiones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el Preuniversitario. Además, se eleva el nivel de desarrollo intelectual, en tanto se promueve el pensamiento lógico, reflexivo e integrador, en correspondencia con la naturaleza integral y compleja del contenido seleccionado.

El diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de la Matemática abarca dialécticamente los componentes didácticos tradicionales reconocidos por diferentes autores (objetivo, contenido, método, medios, evaluación, formas de organización) y las relaciones entre los protagonistas (estudiante-profesor-grupo), incluye las relaciones de subordinación y coordinación que se establecen entre ellos. (Ballester, et al, 2015, p.14).

En este proceso donde el estudiante reflexiona, valora y controla su actividad, se pone metas, repasa lo aprendido y lo que aún no ha logrado y donde es el protagonista y beneficiario directo está inmerso en un espacio de constante interacción con sus compañeros donde intercambian saberes y se forman cualidades de su personalidad y es este espacio grupal donde el profesor debe utilizar como herramienta a la diversidad, además de "orientar, promover, estimular y controlar el proceso de apropiación activa, creadora, reflexiva, significativa y motivada, para lo cual organizará situaciones de aprendizaje que amplíen la zona de desarrollo próximo" (Ballester, et al, 2015, p.15).

Relacionado con lo expresado por Ballester en 2015 es de vital importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador los componentes dialécticos mencionados con anterioridad, donde el objetivo actúa como componente rector del proceso en su función orientadora y determinante respecto al resto de los componentes; el contenido como aquella parte de la cultura y de experiencia social que debe ser adquirida y que depende del objetivo propuesto; los métodos son el componente dinámico del proceso que desarrolla el pensar activo, cooperado y flexible, la independencia cognoscitiva, además de permitir evaluar y calificar colectivamente; la evaluación con su carácter regulador que permite comprobar el logro de los objetivos; los medios de enseñanza son el soporte material de los métodos con estricta dependencia de los objetivos permite la utilización del libro de texto, videos relacionados con la enseñanza de la matemática, la computadora, los software entre otros que estimulen la apropiación del conocimiento y las forma de organización reflejan las relaciones entre los estudiantes, el grupo y el profesor.

En la búsqueda de la calidad requerida en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en la enseñanza preuniversitaria en Cuba se han precisado un conjunto de lineamientos de trabajo (Álvarez, M. Almeida, B. y Villegas, E. 2014, p.7-8) para el trabajo metodológico. Las ideas expuestas en ellos enfatizan la ejemplaridad del docente como guía del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática que junto a la familia y la comunidad contribuye a la formación integral de la personalidad del estudiante desarrollando valores y actitudes acorde a los principios de la Revolución, así como que este sea capaz de comprender la utilidad e importancia de la matemática en las diferentes esferas de la vida, como el arte, las ciencias y la tecnología con una concepción científica del mundo.

Se hace referencia a como para la comprensión de los objetos, operaciones y relaciones matemáticas es de gran utilidad el uso de tecnologías incluidas las de informática y la comunicación (Arroyo y Yanés, 2020), con la utilización de nuevos software como lo es el Geogebra y programas televisivos como las teleclases, entre otros permiten a los estudiantes adquirir de forma más clara y rápida distintos conocimientos que requieren de determinada abstracción para su comprensión o que simplemente en el aula no están disponible los medios que se requiere; además esta nueva revolución informática posibilita que se familiaricen no solo los estudiantes con las nuevas tecnologías, sino también los profesores que deben estar preparados para su utilización para afrontar y ser capaces de darle cumplimiento a estas actividades.

El estudio y análisis a fondo de cada uno de los lineamientos que rigen el trabajo metodológico de la asignatura Matemática, hace posible que en cada una de las escuelas y aulas cubanas se logre un aprendizaje desarrollador, o sea, contribuye a la apropiación activa y creadora de la cultura, promueve el desarrollo integral de la personalidad a través de la unidad de lo cognitivo y lo afectivo valorativo, desarrolla el autoperfeccionamiento constante, autonomía y autodeterminación en conexión con los procesos de socialización, compromiso y responsabilidad social.

Una de las funciones que tienen la enseñanza de la Matemática en la escuela cubana es la de hacer comprender a los estudiantes la importancia creciente de esta ciencia en la vida social, además de contribuir a la formación de su personalidad aprovechando las potencialidades que tiene esta ciencia para el desarrollo del pensamiento y para dar solución a problemas que el país tiene que enfrentar en la edificación de la sociedad socialista.

A través de la enseñanza de esta asignatura y sus aplicaciones prácticas se contribuye a la reafirmación de sentimientos patrióticos, hábitos de disciplina, valores morales, normas de conducta y convicciones política ideológica acorde con las necesidades de la sociedad.

La Educación Preuniversitaria como último nivel de los subsistemas de Educación posibilita la integración de contenidos y el afianzamiento de los conocimientos en la medida que se realice una buena planificación del proceso enseñanza aprendizaje, donde la selección de los ejercicios es de vital importancia, en este sentido las funciones[1] que desempeñan los ejercicios contribuyen al desarrollo del pensamiento de los estudiantes y al desarrollo multilateral de su personalidad.

En el transcurso de la asignatura por cada uno de los grados y de las distintas enseñanzas se ha mostrado el carácter integrador de esta, la relación existente entre los contenidos que se comienzan a enseñar desde los primeros años de vida a los niños, estos conocimientos se perfeccionan y adquieren un mayor grado de rigor al transcurrir estos por los diferentes niveles de enseñanza. Los conocimientos matemáticos existen en forma de conceptos que se fijan en el lenguaje, en el sistema de signos. Asimilar un sistema de conocimientos matemáticos significa asimilar dichos conceptos (Angulo, Arteaga y Carmenate, 2020).

[1]Instructiva: está dirigida a la formación en el alumno del sistema de conocimientos, capacidades, habilidades y hábitos matemáticos que se corresponden con su etapa de desarrollo.
Desarrolladora: está encaminada a fomentar el pensamiento de los estudiantes y a dotarlos de métodos efectivos de actividad intelectual.
Educativa: está orientada a la formación de la concepción científica del mundo en los alumnos.
Control: se orienta a determinar el nivel de cumplimiento de las tres funciones anteriores, o sea, en qué medida se cumplen los objetivos de la signatura en el tratamiento de problemas.

Las particularidades del proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos no son iguales en cada etapa escolar, pues ello está en correspondencia con el nivel de desarrollo del estudiante, en particular con el nivel de desarrollo del lenguaje y del pensamiento. En el siguiente epígrafe se exponen las particularidades de este proceso en la enseñanza básica.

1.2 Los conceptos matemáticos y su tratamiento en la escuela

Los conceptos matemáticos son abstractos, por tanto, solo tienen existencia en la mente humana; se forman a partir de objetos o grupos de objetos, reales o pensados, a los cuales se considera desprovistos de contenidos; son siempre genéricos porque se refieren a grupos de objetos que tienen características comunes. De ahí que muchos autores consideren los conceptos como una representación de la realidad objetiva o de la conciencia sobre la base de las características invariantes (Ballester et al., 1992, Angulo y Arteaga, 2018). Vale destacar que el concepto, como resultado del conocimiento del objeto, no es una simple idea de los caracteres distintivos o rasgos esenciales del objeto, sino que es una idea compleja, la suma de una serie de juicios e inferencias precedentes que definen elementos esenciales del objeto, las propiedades, su pertenencia a una clase, su posición o relación con respecto a otros objetos y otras clases (Font, 2012).

En opinión de Zilmer (1981) y de Ballester y otros (1992, 2001, 2002), la correcta formación de un concepto presupone que los estudiantes puedan comprender las diferentes relaciones matemáticas, así como que este proceso es una premisa indispensable para el desarrollo de la capacidad de aplicar lo aprendido de forma segura, activa y creadora, que representa un punto esencial para el adiestramiento lógico-verbal y que se pueden trasmitir importantes nociones ideológicas y referentes a la teoría del conocimiento.

Según Ballester et al (1992) en cada concepto se pueden distinguir el contenido y la extensión. Por contenido del concepto se entiende el conjunto de propiedades esenciales que determinan el mismo y extensión al conjunto de objetos que poseen esas propiedades esenciales, estos guardan una íntima relación: cuanto más amplio sea el contenido del concepto, más estrecha será su extensión y viceversa.

Al referirse a cómo se forman los conceptos González (2005), afirma que un concepto no se forma repentinamente. Se forma progresivamente y es ampliado y profundizado a medida que son encontradas nuevas instancias de él y son establecidas sus relaciones con otros conceptos del mismo sistema conceptual al cual pertenece.

La afirmación de González, deja entrever que en el proceso de formación de conceptos hay etapas y niveles. Un concepto matemático se puede formar en una determinada etapa, a un cierto nivel y después puede ser ampliado y profundizado en etapas y niveles superiores.

Autores como Ballester, et al. (2002); Curbeira, Bravo y Bravo (2013), refiriéndose al tratamiento metodológico de los conceptos a largo plazo, reconocen que se pueden identificar tres etapas, que son:

- La primera etapa está caracterizada por consideraciones y ejercicios preparatorios.
- La segunda etapa consiste en la formación del concepto (esta etapa está estrechamente relacionada con el objetivo de capacitar al estudiante para definir).
- La tercera etapa consiste en la asimilación y fijación del concepto.

La autora de la presente investigación coincide con Angulo, Arteaga y Carmenate (2020), cuando reconocen que la etapa de formación del concepto es en sí misma un proceso formado por tres etapas:

Etapa conceptual – informal: donde predomina el pensamiento en imágenes, es decir, lo que se forma es una imagen del concepto, que es el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, pudiendo tratarse de una representación visual o bien de una serie de impresiones o experiencias. Esta etapa transcurre en el preescolar y como resultado se forman los llamados conceptos cotidianos o espontáneos. Esta etapa es la base para la formación o construcción de los conceptos en la educación primaria.

Etapa concreto - conceptual: en esta etapa, el proceso de formación de los conceptos se realiza a través del paso del pensamiento de imágenes al conceptual, en ella se forman los denominados conceptos empíricos, sobre la base de generalizaciones empíricas, es decir, sobre la base de las características externas, observables de los “objetos matemáticos”, donde los conceptos no se definen, se forman con ayuda de los métodos sustitutos para la definición de conceptos, tales como: comparación, distinción, ejemplificaciones, descripciones y caracterizaciones o la combinación de estas dos últimas.

En esta etapa predomina el razonamiento empírico – inductivo y tiene lugar básicamente en la educación básica primaria, aunque no se excluye la posibilidad y la conveniencia de utilizarlos en la educación básica secundaria.

Etapa abstracto - conceptual: Esta etapa el proceso de formación de conceptos se efectúa a través del paso del pensamiento concreto – conceptual al abstracto – conceptual. En ella se definen formalmente los conceptos matemáticos a partir de la identificación de sus atributos relevantes (rasgos esenciales). Se comprende la estructura lógica de una definición y se logran formular definiciones de conceptos, incluyendo la elaboración de otras definiciones para conceptos ya definidos. Predomina el razonamiento lógico – abstracto; se realizan generalizaciones de contenido, es decir, sobre la base de las características o atributos relevantes de los *objetos matemáticos.*

En relación con las vías para la formación de conceptos, Ballester, et al. (2002), coincidiendo con González (2005), reconoce que se utilizan dos vías o estrategias que son la vía inductiva y la vía deductiva, aunque Ballester et al. añaden otra vía, que es la vía constructiva.

La vía inductiva se parte de ejemplos. El concepto se desarrolla partiendo de explicaciones y descripciones hasta llegar a la explicación o definición. Esta vía parte por lo tanto de lo particular a lo general y cuenta con los siguientes pasos: asegurar el nivel de partida; motivar y orientar hacia el objetivo; poner a disposición de los estudiantes objetos de análisis (representantes o representaciones del concepto); analizar los objetos respecto a las características comunes y no comunes, establecer un sistema de características necesarias y suficientes (rasgos esenciales del concepto) y la definición o explicación del concepto.

La vía deductiva se parte de la definición del concepto y mediante el análisis de ejemplos se descubre el contenido. Esta vía conduce, por tanto, de lo general a lo particular. De ello resultan los siguientes pasos: asegurar el nivel de partida; motivar y orientar hacia el objetivo; presentar la definición y analizar cada una de las partes; poner a disposición de los estudiantes ejemplos y contraejemplos que deben ser examinados uno a uno según las características del concepto; analizar con los estudiantes cual sería si se omitiese una característica; ordenamiento del concepto en el sistema de conocimiento.

La vía constructiva, considerada por Ballester et al. (2002), como una modificación de la vía inductiva, se utiliza cuando no es posible poner a disposición de los estudiantes objetos que sean representantes del concepto que se desea formar ya que estos no son conocidos por ellos y se requiere entonces construir esos objetos. Utilizando esta vía se siguen los siguientes pasos: motivación y orientación hacia el objetivo, averiguar un principio para la construcción de estos objetos y construir los objetos.

Varias son las posiciones de los diferentes autores al realizar una clasificación de los principales conceptos matemáticos, aunque merece señalar que entre ellos hay puntos de coincidencia.

Para Gamboa (1996), las experiencias con los "objetos" (entiéndase: cosas reales o mentales, acciones sobre cosas, relaciones entre cosas y sistemas de cosas organizadas), configuran entonces la formación de diferentes tipos de conceptos matemáticos. Cada tipo supone un mayor proceso de abstracción en el estudiante y por lo tanto se sustenta en los tipos anteriores. Él considera que se pueden distinguir cuatro tipos de conceptos matemáticos:

1- Conceptos de conjuntos: Se forman mediante experiencias sobre objetos de cualquier naturaleza (Cuadrado, Número natural, Función).
2- Conceptos de operaciones: Se forman mediante la experiencia sobre operaciones con objetos (Adición, Diferenciación, Bisecar un ángulo)
3- Conceptos de relaciones: Se forman mediante la experiencia sobre las relaciones entre los objetos (Es menor qué, Divisor de, Es paralela a, Es congruente con).
4- Conceptos estructurales: Se forman mediante la experiencia sobre organizaciones de objetos en estructura.

Según Zilmer (1981) y Ballester y otros (1992, 2001, 2002), en matemáticas se diferencian tres tipos de conceptos, estos pueden ser clasificados como sigue:

1. Concepto de objetos: Designan clases de objetos reales que se pueden caracterizar por medio de representantes.
2. Conceptos de operaciones: Designan las acciones que se efectúan con los objetos.
3. Conceptos de relaciones: Refleja las relaciones existentes entre los objetos.

La situación típica de la enseñanza de la Matemática que se trabaja con más fuerza en la unidad: Curvas de segundo grado es el tratamiento de conceptos y sus definiciones, además también se trabaja, los teoremas y sus demostraciones, las construcciones geométricas, problemas y ejercicios de aplicación y los procedimientos algorítmicos.

Las definiciones de conceptos

La definición del concepto es una acción propia de la etapa dos de la formación del concepto si se asume lo expresado por Curbeira, Bravo y Bravo (2013) que definir es emitir, con ayuda de la palabra, las características necesarias y suficientes que distinguen a un objeto, proceso, una clase, una idea. Se reconoce la definición como "el reflejo verbal de una clase de individuos, procesos, relaciones de la realidad objetiva o de la conciencia (o el reflejo de una clase de clases), sobre la base de sus características invariantes" (Ballester et al., 1992, p.281) y se asume para la presente investigación por definición:

a) Es una determinación conveniente de qué es un objeto, cómo se origina o cómo se reconoce; o

b) Una regla que establece como se utiliza un signo verbal; o

c) Una determinación o una regla, que indica o establece que significa o debe significar un signo verbal.

En consecuencia, con lo antes planteado en la investigación se asume el criterio de Ballester y otros, por considerar que en ella se encuentran fases de identificación, aplicación y valoración tan importante en la elevación del pensamiento de los estudiantes hacia niveles crecientes de asimilación.

La línea directriz adiestramiento lógico lingüístico está estrechamente vinculado a operar con conceptos, donde se proponen los objetivos a lograr en cada una de las enseñanzas.

En los primeros grados de la enseñanza primaria, entre primer y quinto grados se prepara a los estudiantes para la formulación del concepto, en este nivel se utilizan procedimientos semejantes a definiciones.

En sexto grado se trata directamente de definir, se introduce el concepto definición, se comparan los conceptos definición y teorema, se definen algunos conceptos utilizando definiciones existenciales.

De séptimo a duodécimo grados se capacita a los estudiantes para definir, estos conocen mejor la relación entre definición y teorema, aplican las definiciones en demostraciones sencillas, las definiciones son formuladas en forma precisa, se definen independientemente conceptos utilizando el concepto superior y las características esenciales.

Es necesario destacar que operar con conceptos no concluye en el preuniversitario, continúa en la Educación Superior la preparación del estudiante para definir conceptos más abstractos (podría desarrollarse en elaboración conjunta con ayuda del profesor o de forma independiente), en esta etapa ya el estudiante es capaz de diferenciar definiciones de teoremas, además de estar consiente en cuándo se refiere a un concepto y cuando se habla de la definición del concepto (o sea comprenden la rigurosidad de una definición), para definir los nuevos conceptos aplican las definiciones ya conocidas, además de hacer valoraciones sobre qué vía se ha utilizado para definir el concepto planteado.

Desde la psicología diferentes autores de pensamiento psicológico constructivista hicieron sus aportes a la teoría del desarrollo humano y, por consiguiente, a los modelos educativos derivados de ella, dentro de los mismos destaca la figura de Vigotsky.

Algunas de las aportaciones más importantes que hizo Vigotsky a la psicología y a la educación tienen que ver con el proceso de construcción del conocimiento en los niños, la influencia del aprendizaje en el desarrollo, la importancia del contexto social y el lenguaje en el mismo. En el área de la educación destaca su concepto denominado zona de desarrollo próximo, que es el área que existe entre la ejecución espontánea que realiza el niño o el adolescente utilizando sus propios recursos y el nivel que puede alcanzar cuando recibe apoyo externo. Es en esta zona de desarrollo próximo donde la educación debe intervenir.

La importancia de este concepto está en la diferencia que se establece entre lo que el estudiante es capaz de hacer por sí solo, el autoaprendizaje, y lo que es capaz de hacer o aprender con la ayuda de una persona más experta. Así, Del Río (2006) explica que, de acuerdo con la definición de zona de desarrollo próximo, las experiencias de aprendizaje no se diseñarían ya exclusivamente sobre el nivel de desarrollo alcanzado por el sujeto (evaluado por cualquier instrumento psicológico diseñado exprofeso); sería deseable que se incluyeran también aquellas experiencias de enseñanza-aprendizaje más difíciles pero resolubles con un poco de ayuda de otros más capaces. De ser una experiencia individual, el aprendizaje se convertía en un proceso social, donde los otros podían ser agentes de desarrollo.

Vigotsky (1995) en sus estudios sobre la formación de conceptos distingue entre conceptos espontáneos y conceptos científicos.

Conceptos espontáneos

1- Cúmulos no organizados (conglomeraciones sincréticas): agrupación de objetos dispares sin ninguna base común. La etapa se caracteriza por el uso de palabras como "nombres propios".

2- Pseudoconceptos*:* Agrupan objetos adecuadamente, pero a partir de rasgos sensoriales inmediatos, sin que el sujeto tenga una idea precisa de los rasgos comunes de los objetos. Los pseudoconceptos no sólo aparecen en el pensamiento infantil, porque, aunque a partir de la adolescencia, los sujetos ya son capaces de formar auténticos conceptos, los adultos conviven simultáneamente con ambas formas de pensamiento. En la medida en que los pseudoconceptos se basan en una generalización de rasgos generales, éstos son una vía en el camino de la formación de los conceptos genuinos, además de generar conceptos potenciales o la abstracción de un rasgo constante en una serie de objetos.

Conceptos científicos

Estos son los conceptos científicos adquiridos a través de la instrucción. Se caracterizan por:

a) Forman parte de un sistema.

b) Se adquieren a través de una toma de conciencia de la propia actividad.

c) Implican una relación espacial con el objeto basada en la internalización de la esencia del concepto.

Esto precisa que los maestros empleen variadas formas de trabajo para lograr niveles de asimilación, profundidad y sistematicidad en la adquisición de los conocimientos, haciendo transitar a los estudiantes por acciones sensoriales y lógicas de manera que las observaciones y juicios sean más complejos y precisos, facilitando que en la búsqueda del conocimiento se obtengan los elementos necesarios para el análisis reflexivo y consigan plantear hipótesis, hacer comparaciones, clasificar y ejemplificar, así como desarrollar otras habilidades que permitan el re-descubrimiento de detalles y elementos que pueden pasar inadvertidos, cuyos matices conducen a comprender manifestaciones que garantizan la transferencia del conocimiento, a través de la interpretación de situaciones de las cuales su expresión constituye causa o consecuencia de fenómenos o procesos estudiados en clases (Cornell, 2019).

Dentro de los contenidos a estudiar en la enseñanza preuniversitaria se encuentra las secciones cónicas, temática ubicada dentro de la geometría, rama de las matemáticas que tradicionalmente los estudiantes presentan dificultades para su aprendizaje. Muchas de las limitaciones que ellos manifiestan sobre su comprensión se deben al tipo de enseñanza que han tenido. Asimismo, el tipo de enseñanza que emplea el docente depende, en gran medida, de las concepciones que él tiene sobre lo que es Geometría, cómo se aprende, qué significa saber esta rama de las Matemáticas y para qué se enseña.

1.3 Las secciones cónicas, su caracterización y enseñanza

La geometría es la ciencia que modela el espacio que percibimos, además permite adentrarse en formas de pensamiento avanzado: la Geometría trabaja con objetos ideales que se pueden manipular mentalmente, que no dependen de lo percibido por los sentidos. Su tratamiento en el aula no consiste sólo en la transmisión de los contenidos geométricos sino en adentrar al estudiante en todo un mundo de experiencias en el conocimiento del espacio que percibe y en formas de pensamiento propias de la Geometría.

Con frecuencia algunos profesores identifican a la Geometría sólo a las cuestiones métricas; otros docentes, la principal preocupación es dar a conocer a los estudiantes las figuras o relaciones geométricas con dibujos, su nombre y su definición, reduciendo las clases a una especie de glosario geométrico ilustrado. Ambas posiciones no aprovechan las potencialidades que tiene para desarrollar destrezas mentales de diversos tipos, como la intuición espacial, la integración de la visualización con la conceptualización, y la manipulación y experimentación con la deducción (Vargas y Gamboa, 2013).

Es importante reflexionar sobre las razones para enseñar Geometría.

- Se aplica en la realidad (en la vida cotidiana, la arquitectura, la pintura, la escultura, la astronomía, los deportes, la carpintería, la herrería, etcétera).

- Se usa en el lenguaje cotidiano (por ejemplo, se dice: calles paralelas, columnas cilíndricas, la escalera en espiral, etcétera).
- Sirve en el estudio de otros temas de las Matemáticas (por ejemplo, un modelo geométrico de la multiplicación de números o expresiones algebraicas lo constituye el cálculo del área de rectángulos).
- Permite desarrollar en los estudiantes su percepción del espacio, su capacidad de visualización y abstracción, su habilidad para elaborar conjeturas acerca de las relaciones geométricas en una figura o entre varias y su habilidad para argumentar al tratar de validar las conjeturas que hace.
- Constituye el ejemplo clásico de ciencia organizada lógica y deductivamente (a partir de axiomas y postulados se deducen teoremas).

En particular, el tema de las secciones cónicas, como objeto matemático, resulta especialmente interesante, por su historia de cómo surgieron al estar emparentado con uno de los tres problemas clásicos griegos -la duplicación del cubo- y por sus aplicaciones en la vida moderna.

El surgimiento de las secciones cónicas se dio debido a la preocupación de orden práctico de algunos matemáticos para solucionar uno de los tres problemas clásicos de la antigua matemática griega, los cuales debían hacerse a través de intersecciones de rectas y circunferencias, utilizando solamente la regla sin marcas y el compás, “como son el de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo” (Muñoz, 2015).

Fue Menecmo discípulo de Platón, astrónomo y geómetra, quien dio origen a las nociones de las curvas como las secciones cónicas en respuesta a la necesidad de resolver el problema clásico de “la duplicación del cubo”. Las situaciones problémicas se presentaban mediante aspectos geométricos. El origen de las secciones cónicas por Menecmo está relacionado con las intersecciones de las generatrices de un cono circular recto con un plano que no pase por el vértice del cono (Pérez, 2018).

Al igual que Menecmo el matemático Apolonio de Perga, realizó estudios de las secciones cónicas, “mencionando como tal el tratado más importante sobre ellas, para ello las mostró como cortes de un cono por un plano, donde cada corte genera una característica respecto a focos, ejes y diámetros” (Aragón y Quintero, 2017. p.10)

Las situaciones problémicas estudiadas por el matemático Johann Kepler vienen dadas por aspectos físicos, astronómicos y geométricos, descubrió las leyes que rigen los planetas en una de las cuales menciona: cada planeta describe una elipse y uno de sus focos está ocupado por el sol. Kepler utilizó las cónicas (elipse) en el estudio astronómico, y esta viene representada como la órbita del planeta.

Descartes, a través de los razonamientos geométricos y el uso de notaciones apropiadas, llega a ecuaciones, la cual representa lugares geométricos como la elipse, la parábola, la hipérbola, entre otros. Descartes se interesó por la resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas, para llegar a las ecuaciones de las cónicas. Los procedimientos y argumentos se vieron muy influenciados por los aspectos geométricos y algebraicos.

Las cónicas tienen una amplia utilización en las diferentes esferas de la vida, son resumidas por Alegría (2014):

- En tres dimensiones, un efecto interesante consiste en diseñar una sala con techo elipsoidal (de revolución). Emitiendo un sonido desde uno de los focos, ese sonido se oirá con toda nitidez desde el otro foco (las ondas sonoras rebotan en las paredes y se reflejan en el otro foco; incluso el tiempo que tardan es el mismo, sea cual sea la dirección inicial). Una “cámara de eco” famosa se encuentra en el edificio del Capitolio en Washington. Este efecto permite también la insonorización de habitaciones.
- La propiedad reflexiva de las hipérbolas se usa también en lentes telescópicas. Una aplicación interesante permite conocer la posición de un barco en alta mar.
- El paraboloide es una superficie que se obtiene al girar una parábola alrededor de su eje. Los espejos parabólicos tienen forma de paraboloide, y se usan principalmente en la construcción de telescopios y antenas: los rayos de luz recibidos desde una fuente lejana (como las estrellas) viajan paralelos al eje de la parábola y se reflejan para converger en el foco de la misma. Inversamente, cuando la fuente de luz está en el foco, los rayos de luz se reflejan y viajan paralelos al eje de la parábola. Este es el principio usado en los faros de los automóviles, proyectores y radares.
- Los cables de los puentes colgantes tienen forma parabólica (forman la envolvente de una parábola). Se creía hace tiempo que las cuerdas o cadenas que se suspenden agarradas únicamente por sus extremos también formaban parábolas (hoy se sabe que la curva que describen es un coseno hiperbólico).
- Las trayectorias de los proyectiles tienen forma parabólica. Los chorros de agua que salen de un surtidor tienen también forma parabólica.
- La forma de los telescopios, detectores de radar y reflectores luminosos son parabólicas.
- Las órbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas.
- En óptica y propagación de ondas se utilizan lentes elípticas.
- En diseño artístico es común encuadrar retratos y fotografías en un marco con forma elíptica. La mayoría de los dispositivos usados para recortar figuras elípticas están basadas en las ecuaciones de la elipse

Imposible que en el tiempo que se dispone para el estudio de las cónicas en la enseñanza preuniversitaria se recree toda la historia de siglos de su surgimiento, pero si el docente debe tener conocimiento de la misma para en determinados momentos enriquecer las situaciones didácticas de su enseñanza y en el caso de las diversas aplicaciones para mostrar a los estudiantes cómo las cónicas están en el mundo fuera del aula. Ambas cuestiones demuestran como la matemática es una ciencia en evolución que debe su desarrollo a las exigencias de la realidad para dar respuesta a problemas que se le presenta a la sociedad en su desarrollo.

A continuación, se procederá a mostrar las definiciones de las secciones cónicas como lugar geométrico, en correspondencia ha como se estudia en la escuela cubana actual:

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano cuya distancia r a un punto C llamado centro es constante.

Si P, P_1, P_2, P_3, …, P_n, … son puntos de la circunferencia y si C es el centro de la misma, entonces:

$$CP = CP_1 = CP_2 = CP_3 = \cdots = CP_n = \cdots = r$$

La Parábola es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano cuyas distancias a una recta l llamada directriz y un punto F llamado foco que no pertenece a la recta l, son iguales.

Sean los puntos P, P_1, P_2, P_3, …, P_n, … de una parábola y sean los puntos E, E_1, E_2, E_3, …, E_n, … pertenecientes a la directriz tales que:

$$FP = PE, FP_1 = P_1E_1\ , FP_2 = P_2E_2\ , FP_3 = P_3E_3\ ,= \ ... = FP_n = P_nE_n\ , ... F\ ... = \cdots ...$$

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos F y F´ distintos, llamados focos, es constante. Esto es, si P, P_1, P_2, P_3, …, P_n, … son puntos pertenecientes a la elipse, entonces:

$$PF + PF' = P_1F + P_1F' = P_2F + P_2F' = \ P_3F + P_3F'\ ,= \ ... = P_nF + P_nF'\ = 2a$$

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano, tal que el valor absoluto de las diferencias de sus distancias con respecto a dos puntos F y F´, llamados focos, es constante. Esto es, si P, P_1, P_2, P_3, …, P_n, … son puntos de la hipérbola, entonces:

$$|PF - PF'| = |P_1F - P_1F'| = |P_2F - P_2F'| = |P_3F - P_3F'\ |,= \ ... = |P_nF - P_nF'\ | = 2a$$

En el tratamiento de los conceptos relativos de las secciones cónicas como lugar geométrico hay un conjunto de conceptos involucrados, algunos previos y otros que emergen en el propio proceso de formación del concepto. Dentro de los conceptos previos se encuentran: distancia, distancia en el plano, distancia entre un punto y una recta, coordenadas cartesianas, teorema de Pitágoras. En el caso de los emergentes están los compontes de las cónicas (centro, foco, distancia focal, ejes, radio, asíntotas, entre otros), las ecuaciones que la representan

El estudio de las secciones cónicas, corresponde a la enseñanza preuniversitaria, particularmente en el onceno grado en la unidad # 5, donde se estudian cada una de las definiciones de las secciones cónicas como lugar geométrico, así como sus elementos, ecuaciones y representación gráfica correspondiente; además de las relaciones de posición entre ellas o con la recta y sus aplicaciones geométricas, en la vida práctica y en la esfera científica.

En esta unidad el estudiante tiene que ser capaz de:

- Explicar y describir las secciones cónicas como lugares geométricos y reconocer los elementos fundamentales que las caracterizan.
- Reconocer aplicaciones de las secciones cónicas en situaciones de la vida práctica y de la esfera científica.
- Resolver y formular problemas en los cuales es necesario identificar las ecuaciones de las secciones cónicas y determinar a partir de ellas sus elementos, propiedades, representación gráfica y viceversa.
- Obtener las ecuaciones de las secciones cónicas, a partir de sus elementos o de la representación gráfica.
- Resolver y formular problemas matemáticos y extramatemáticos en los que es necesario determinar la relación de posición entre una recta y una curva de segundo grado (secciones cónicas) y hallar, si existen, los puntos de intersección entre secciones cónicas y rectas y entre secciones cónicas. (Rodríguez et al., 2018. p.23)

En las cuatro primeras unidades temáticas de la unidad 5 se estudian cuatro curvas de segundo grado (circunferencia, elipse, hipérbola y parábola) que tienen una característica algebraica: sus ecuaciones son de segundo grado en dos variables reales, y una característica geométrica: se obtienen como secciones planas de un cono circular recto, por lo que se reconocen como secciones cónicas.

En el estudio de esta unidad hay que tener en cuenta que lo primordial son “los procedimientos y no “las fórmulas”; no se trata de que el estudiante memorice fórmulas relacionadas con las curvas, sino que comprenda cómo puede utilizar las coordenadas y las ecuaciones de estas curvas, para estudiar sus propiedades” (Castillo et al., 2018, p.66)

Como contenido precedente para el estudio de estas curvas los estudiantes conocen la circunferencia y la parábola, se introduce en esta unidad la elipse y la hipérbola. De la circunferencia conocen su caracterización como un lugar geométrico y de la parábola su ecuación.

La circunferencia es conocida por los estudiantes de grados anteriores como el conjunto de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro y en esta unidad deben representar analíticamente los puntos de las curvas mediante una ecuación y aplicar el procedimiento analítico al estudio de la circunferencia.

La parábola se parte de la ecuación, que representa lo conocido de años anteriores por los estudiantes, y se deriva la propiedad geométrica que caracteriza los puntos de la curva. “Este enfoque representa una diferencia con el tratamiento tradicional que presenta la parábola en un plano, igual que el de la elipse y la hipérbola, como si no se supiera nada de ella.” (Castillo et al., 2018, p.67)

El estudio de esta unidad es de gran importancia para el desarrollo del pensamiento y de la personalidad de los estudiantes, pues contribuye al adiestramiento lógico-lingüístico de los estudiantes exige el trabajo con conceptos y teoremas, la realización de razonamientos deductivos y reductivos y la utilización del lenguaje y la terminología matemática para denotar las figuras geométricas, representar las propiedades y relaciones geométricas y comunicarse de forma oral, escrita o visual. Ellos permiten profundizar en los procedimientos lógicos asociados a las diferentes formas del pensamiento abstracto.

Para el estudio de esta unidad se pueden utilizar medios de enseñanza como: láminas, videos, el software Geoebra y otras fuentes de información para estimular, visualizar y racionalizar el desarrollo de la actividad intelectual y su autorregulación, el establecimiento de relaciones significativas y las motivaciones por aprender a aprender matemática.

Con el uso de la tecnología y de los programas que esta ofrece se facilita el estudio de esta disciplina y se desarrolla la visualización que ocupa un lugar primordial en el estudio de la geometría en la enseñanza de la matemática.

1.4 La visualización, su papel en el estudio de la matemática

Desde hace algunos años, la visualización matemática ha sido investigada como recurso para lograr el aprendizaje de conceptos matemáticos, estas han tenido el propósito de explorar distintas formas de "mirar" objetos matemáticos abstractos, los cuales apoyan y median el surgimiento y desarrollo de conceptos matemáticos.

La historia de las matemáticas registra como entre los siglos XIX y gran parte del siglo XX la visualización no era considerada necesaria para el desarrollo de las matemáticas, y si un obstáculo. Ya con la aparición de los computadores gráficos y de los programas informáticos junto al desarrollo de estudios sobre el funcionamiento de la mente propició el interés de la visualización en los últimos decenios (Marmolejo et al., 2020, p. 292).

En la actualidad, el estudio de la visualización en el pensamiento matemático es objeto de numerosas investigaciones, entre otras cosas debido al surgimiento de la computadora como un recurso didáctico para la comprensión de conceptos matemáticos, esta opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura.

Diversos autores han expresado sus puntos de vista al respecto, Gatica y Ares (2012) señalan que la visualización no es más que un medio con el que cuenta el estudiante para poder realizar un mejor entendimiento y visualizar un concepto, es comprender un concepto a través de una imagen visual. Además, expresa que Cantoral y Montiel (2001) ven a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende.

Para Duval (2002) la visualización plantea tres problemas desde el punto de vista del aprendizaje: (1) discriminación de las características visuales relevantes; (2) el procesamiento figural, cambios entre registros visuales (descomponer, recomponer una figura; reconfiguración); cambio de perspectiva; (3) coordinación con el registro discursivo.

La autora asume en la presente investigación que “la visualización representa una tarea del proceso comunicativo, porque a través de ella se transforman datos abstractos y fenómenos y, por lo tanto, supone una nueva vía de descubrimiento de conocimiento” (González y Bolzicco, 2019, p.198).

La visualización es un medio de ilustración que sirve de fundamento de la percepción sensorial, en la enseñanza problémica se muestra como un medio auxiliar que sirve de apoyo para la solución del problema, sirve para el diseño de problemas docentes y la creación de situaciones problémicas, y permite crear marcos de referencia para el procesamiento de la información verbal. Al considerar la visualización como proponen Phillips et al. (2010) como un medio para que el individuo pueda acceder a las propiedades, características y dar sentido al objeto matemático analizado se evidencia sus potencialidades para ser utilizada en las diferentes fases de formación de los conceptos.

La visualización matemática se suele emplear “para describir representaciones; en otras, se usa para determinar cómo funciona cierta representación específica en la comprensión o resolución de problemas matemáticos; o bien, para definir la actividad cognitiva del sujeto cuando hace uso de representaciones” (Briseño y Guzmán, 2016, p.222).

Duval (1999) menciona que la visualización se refiere a la capacidad de reconocer las unidades significativas de los registros para pasar de una representación a otra en forma bidireccional. En el caso de las cónicas se plantean tres registros de representación semiótica, identificados como Lenguaje Común, Lenguaje Algebraico y Esquema Gráfico (Valbuena, Gutiérrez y Berrio, 2021).

Lenguaje común: utiliza signos del lenguaje, sintaxis y gramática propia del lenguaje natural, permite realizar explicaciones, y dar definiciones. Se evidencia cuando los estudiantes dan la definición de las cónicas como lugar geométrico o como sección cónica, describiendo sus características y elementos;

Lenguaje algebraico: utiliza signos y reglas propias de la Matemática, y concretamente para este caso del álgebra, este se evidencia cuando los estudiantes escriben las ecuaciones canónica y general de una cónica;

Esquema gráfico: este registro utiliza el plano cartesiano y la relación entre los ejes coordenados para representar una cónica, permite visualizar las características y elementos propios a este objeto matemático.

Son variadas las investigaciones que se han realizado sobre la utilización de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en todas se evidencia como el uso de recursos visuales en el aprendizaje, ha estado sujeto históricamente al desarrollo de los medios de enseñanza que se implementan en las clases; cada paso de avance en la tecnología de los medios visuales ha provocado el desarrollo de la visualización; la aparición del cine y la televisión, los proyectores de vistas fijas, los retroproyectores, se convirtieron casi inmediatamente en medios auxiliares eficaces en la enseñanza.

En la actualidad con el desarrollo de la informática se han desarrollado un conjunto de aplicaciones que han tenido gran impacto sobre la Educación que facilitan la explicación, el entendimiento y aprendizaje de ciertos temas. En el caso de la geometría destaca el software educativo Geogebra.

GeoGebra es un software diseñado para la educación matemática en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas (Linux, Windows, Mac, etc.). "Reúne dinámicamente aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente." (Sitio Oficial GeoGebra). Además, el programa cuenta con la ventaja de ver las representaciones de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas (gráficamente, algebraicamente).

El uso de este software tanto para desarrollar actividades de aula o de estudio independiente en que los estudiantes interactúen con los objetos matemáticos, en este caso con las cónicas, como que el docente construya recursos didácticos para utilizarse en la enseñanza del contenido contribuye a la formación de los conceptos implicados en la temática (Diaz, Rodríguez y Lingán, 2018).

Conclusiones del Capítulo

Lo expuesto hasta el momento fundamenta el estudio de la matemática en la enseñanza preuniversitaria que pretende fomentar en los estudiantes la función de la actividad científico- técnica contemporánea que exige la sociedad actual, mediante el aprendizaje de los conceptos y su aplicación a la resolución y formulación de problemas que potencien en los estudiantes no solo el desarrollo de conocimientos sino también que los dotes de habilidades, hábitos, cualidades, convicciones y actitudes.

La determinación de las etapas de formación del concepto es de vital importancia para la investigación por cuanto define el tratamiento metodológico del proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos en general y en particular de los conceptos geométricos que son el objeto que ocupa esta investigación. Se asume el aprendizaje desde el enfoque desarrollador para propiciar que los estudiantes participen de manera activa en el proceso de formación de los conceptos y con ello contribuir al desarrollo integral de la personalidad del educando.

Además, se destaca la importancia de la visualización en el tratamiento de los conceptos matemáticos, en especial los referentes a las secciones cónicas que se hace referencia en la investigación y las aplicaciones que tienen en situaciones de la vida para lograr la motivación de los estudiantes para su estudio.

CAPÍTULO II

SISTEMA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA EL TRATAMIENTO DE LOS CONCEPTOS DE LAS SECCIONES CÓNICAS EN ONCENO GRADO DEL IPU FÉLIX VALERA MORALES

Este capítulo describe la situación actual de la enseñanza-aprendizaje de los conceptos relativos a la unidad Curvas de Segundo Grado del programa de Matemática en el onceno grado del preuniversitario Félix Varela Morales. Incluye el diseño del sistema de actividades elaborado en consideración con los planteamientos teórico-metodológicos presentados en el primer capítulo, así como su constatación parcial.

Para la realización de la investigación se contó con una población de 6 profesores, la secretaria docente, un coordinador general del área de Ciencias Exactas y 4 grupos de onceno grado con un total de 83 estudiantes. Se toma como muestra intencional para la aplicación de la propuesta a un profesor de onceno grado y tres grupos de onceno grado con un total de 60 estudiantes.

2.1 Estado actual del tratamiento de los conceptos en la unidad Curvas de segundo grado en preuniversitario Félix Valera Morales

El análisis de la situación actual del tratamiento de los conceptos en la unidad Curvas de Segundo Grado fue realizado a partir de la aplicación de varios instrumentos que permitieron a la autora la obtención de informaciones. Estos instrumentos fueron:

- Revisión y análisis de documentos relacionados con la enseñanza de las curvas de segundo grado.
- Observación a clases para constatar en el proceso de enseñanza aprendizaje el tratamiento de los conceptos en la unidad: Curvas de Segundo grado. En el Anexo1 se muestra la guía utilizada para la observación de clase.
- Entrevista al coordinador general del área de Ciencias Exactas para constatar el proceder metodológico en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos y sus definiciones. La guía para esta entrevista se recoge en el Anexo 2.
- Entrevista a los profesores de onceno grado para constatar el proceder metodológico en la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la comprensión de conceptos y definiciones de las secciones cónicas. El Anexo 3 presenta la guía utilizada para este propósito

Revisión de documentos

Los documentos revisados fueron:

- El programa de Matemática de onceno grado específicamente la unidad 5 que trata el tema de las curvas de segundo grado y las secciones cónicas.
- El libro de texto de onceno grado.

En el análisis del programa se constató que considera el estudio de un conjunto de conceptos propios al tema de las curvas de segundo grado y otros relativos a la geometría analítica que ayudan a la comprensión de estas curvas como lugares geométricos. El programa contiene:

- Las líneas directrices de la Matemática referidas al desarrollo de contenidos matemáticos esenciales en esta unidad están presentes las líneas: Geometría. Cálculo con magnitudes y aproximaciones. Trabajo con variables. Ecuaciones e inecuaciones.

La línea directriz geometría es la de mayor peso en la unidad y está presente al reconocer figuras geométricas y sus principales propiedades y la aplicación de estos conocimientos a la representación, análisis y construcción de estas figuras y al cálculo en ellas, así como al aplicar sus conocimientos algebraicos y aritméticos al trabajo geométrico y a la solución de problemas prácticos de carácter geométrico.

El calcular y obtener los resultados con la aproximación adecuada según los datos, aplicando las reglas del cálculo aproximado pone de manifiesto la aplicación de la línea directriz cálculo con magnitudes y aproximaciones.

El trabajo con variables es esencial en la geometría analítica, teniendo presente las formas de factorización en la solución de ecuaciones y en el caso de las curvas de segundo grado, cuando se quieran obtener elementos de éstas, dadas sus ecuaciones desarrolladas.

El análisis de las ecuaciones de las curvas de segundo grado y la aplicación de los sistemas de ecuaciones en la determinación de los puntos de intersección entre curvas revela la presencia de la línea directriz ecuaciones e inecuaciones.

- El sistema de conocimientos: conceptos, relaciones y procedimientos, que se resume en la Tabla 1

- El sistema de habilidades y hábitos: habilidades para la ejecución de procedimientos matemáticos y hábitos de planificación, organización, ejecución, monitoreo y control del trabajo práctico y mental.
- La experiencia de la actividad creadora: métodos para la resolución de problemas y situaciones significativas.
- El sistema de relaciones con el mundo: convicciones filosóficas, políticas, morales e ideológicas y cualidades de la personalidad.

Tabla 1. Sistema de conocimientos

Conceptos	**Relaciones**	**Procedimientos**
• Plano • Circunferencia • Radio • Recta • Recta tangente a cada una de las cónicas • Recta secante a cada una de las cónicas • Recta exterior a cada una de las cónicas • Parábola • Focos de la parábola, de la elipse y de la hipérbola • Vértices de la parábola, de la elipse y de la hipérbola • Parámetro de la parábola • Línea directriz de una parábola • Elipse • Excentricidad de la elipse y de la hipérbola.	• Ecuaciones de la circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. • Relación entre el radio y el diámetro de una circunferencia. • Posiciones relativas de recta y cónica y entre cónicas. • Distancia del vértice al foco de una parábola. • Distancia del vértice a la línea directriz de una parábola. • Ecuación de la línea directriz de una parábola. • Distancia del foco a la línea directriz de una parábola. • Excentricidad.	• Identificar diferentes cónicas, aplicando propiedades. • Construir cónicas sobre la base de sus propiedades. • Determinar las ecuaciones de las secciones cónicas, dados sus elementos o representación gráfica. • Determinar, si existen, los puntos de intersección de secciones cónicas y rectas o de secciones cónicas entre sí. • Determinar a partir de las ecuaciones o gráfico de las secciones cónicas sus

• Eje mayor de una elipse • Eje menor de una elipse • Distancia, semidistancia focal. • Hipérbola • Eje principal de una hipérbola • Eje no principal de una hipérbola • Asíntotas de la hipérbola	• Distancia, semidistancia focal. • Longitud de ejes. Relación entre ejes y semidistancia focal. • Ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola.	elementos y viceversa.

Habilidades a desarrollar a lo largo de la unidad:

- Describir las secciones cónicas como lugares geométricos.
- Reconocer los elementos fundamentales que caracterizan las secciones cónicas.
- Conocer ejemplos de aplicaciones de las secciones cónicas.
- Identificar las ecuaciones de las secciones cónicas.
- Determinar a partir de las ecuaciones o gráfico de las secciones cónicas ellas sus elementos y viceversa.
- Representarlas gráficamente.
- Determinar las ecuaciones de las secciones cónicas, dados sus elementos o representación gráfica.
- Determinar, si existen, los puntos de intersección de secciones cónicas y rectas o de secciones cónicas entre sí.

Para el desarrollo de la habilidad describir las secciones cónicas como lugares geométricos los estudiantes deben conocer las características esenciales de cada una de ellas, de ahí que el programa de onceno grado en las orientaciones metodológicas establece definir cada una de estas secciones cónicas, sin embargo, no especifica cómo tratar los conceptos para que ellos sean construidos por los estudiantes transitando por las diferentes etapas de su formación.

El texto básico de esta asignatura "Matemática para onceno grado" de un colectivo de autores consta de seis capítulos y los relativos al tema que ocupa esta investigación son los capítulos 2 y 3. En el dos se abordan contenidos de geometría analítica referidos a la ecuación cartesiana y paramétrica de la recta y se recuerdan e introducen conceptos que son básicos para la comprensión de las cónicas, estas últimas se abordan en el capítulo 3. A continuación se describe el análisis realizado a sus diferentes epígrafes.

En la introducción del capítulo aparece una breve historia de las secciones cónicas, muy descriptiva sin una representación gráfica que ayude a la comprensión de lo expuesto, además sería muy saludable que se reflejaran las aplicaciones que en la actualidad tienen la cónicas.

En el epígrafe 1 referido a la circunferencia se comienza directamente con la presentación de su ecuación, o sea su expresión analítica, lo cual no contribuye a comprenderla como lugar geométrico. Se presentan seis ejemplos resueltos donde se trabaja la circunferencia como lugar geométrico. Se proponen 25 ejercicios que van en aumento el nivel de dificultad de los mismos, donde predomina la presentación analítica carente de visualización.

El epígrafe 2 se dedica a la parábola, comienza describiendo como construirla evidenciando en el proceso las propiedades de esta curva. Posteriormente se formaliza a través de un teorema el concepto de parábola como lugar geométrico. Se presentan cuatro ejemplos resueltos en tres de ellos se apoyan en una representación gráfica para su desarrollo. Se proponen 15 ejercicios, donde solo en dos se presenta una gráfica.

La elipse es tratada en el epígrafe 3, el cual inicia con la definición del concepto y a partir de él se explica una vía de construirla. A través de un teorema se presenta la expresión analítica de la elipse. Se desarrollan seis ejemplos en todos se aprovecha la representación gráfica para su solución. Se proponen 18 ejercicios donde solo en uno se presenta un gráfico.

El epígrafe 4 trata la hipérbola y comienza con la definición de ella como lugar geométrico. A continuación, se describen sus características auxiliándose de una representación gráfica. En un teorema se presenta la ecuación de la hipérbola y se procede a su demostración analítica. Se presentan 4 ejemplos resueltos generalmente dedicados a obtener la ecuación a partir de sus parámetros, se utiliza en el proceso de solución de dos ellos una representación gráfica. Se proponen veintidós ejercicios.

A manera de resumen se puede afirmar que el libro de texto constituye un material fundamental al docente para la preparación de sus clases, solo que este debe estar claro de cómo organizar las actividades a realizar con él en función de la fase de formación del concepto que se proponga trabajar. Debe tener presente que la mayoría de los ejemplos y ejercicios propuestos son propios para la etapa de asimilación y fijación del concepto, hay muy pocos para la fase de formación y casi nulo para la fase de preparación.

Observación a clases

Se observaron tres clases y se evidenciaron dificultades que están vinculadas con la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje, que constituyen barreras para el aprendizaje de los conceptos estudiados. En el tratamiento que se sigue para el trabajo con los conceptos y sus definiciones es insuficiente el énfasis que se realiza en los conocimientos que los estudiantes poseen y que son necesarios para introducir la nueva definición. Existen dificultades en la metodología que se emplea para la formación del concepto por las vías inductiva y deductiva, donde se privilegia la vía inductiva. La utilización de los medios de enseñanza es muy limitada, se desaprovecha el empleo de estos para favorecer el cumplimiento de los objetivos de la clase. Los estudiantes reciben excesiva guía en el pensamiento para obtener la definición que se trabaja durante la clase.

Resultados de la entrevista al coordinador general del área de Ciencias Exactas y a los profesores de onceno grado.

En la entrevista realizada al coordinador general del área de Ciencias Exactas se destaca que las actividades que se realizan para el tratamiento de los conceptos en la unidad: Curvas de segundo grado son las preparaciones metodológicas donde se realizan clases demostrativas, pero que están encaminadas fundamentalmente al trabajo con los teoremas que plantean las ecuaciones de cada una de las secciones cónicas, también se orientan en las aulas que los profesores motiven sus clases con la utilización de medios de enseñanzas, pero por la ubicación de la unidad en el programa, que es la última del curso en ocasiones se violenta el trabajo con los conceptos, sugiere que se realice un taller metodológico donde los profesores no solo compartan los conocimiento que tienen sobre el tratamiento de los conceptos y sus definiciones, sino que indaguen en nuevas bibliografías sobre el tema.

Los resultados de la entrevista a los profesores muestran que ellos ven como logros en sus estudiantes:

- Las relaciones que ellos establecen entre las figuras geométricas estudiadas,
- La interrelación con otras materias, la independencia en el cálculo,
- El uso del libro de texto y
- El dominio de los elementos y ecuaciones de las diferentes cónicas;

Mientras que las barreras que muestran están dirigidas a:

- Relaciones entre los elementos
- El reconocimiento de los ejes de simetría en cada una de las cónicas, para una correcta representación gráfica.
- Identificación de las rectas dadas por pares ordenados que interceptan los ejes de coordenadas

De los profesores encuestados el 50% expresa que sus estudiantes poseen dificultades en identificar la definición de cada cónica teóricamente, pues les cuesta trabajo asociar la teoría con la práctica.

Uno de los profesores expresa que las vías y procedimientos que utiliza son la modelación, o sea modelar como se realiza con ejemplos y contraejemplos de dichos conceptos, acompañarlos en el desempeño de un ejercicio. Mientras que otros plantean que generalmente emplea métodos heurísticos acompañados por vías inductivas y deductivas.

Manifiestan que sus estudiantes generalmente muestran dominio del procedimiento para comprender los conceptos, contradiciéndose esto con lo planteado en las barreras (poseen dificultades en identificar la definición de cada cónica teóricamente, pues presentan insuficiencias al asociar la teoría con la práctica.) Expresan que para erradicar las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo de proceso de enseñanza aprendizaje de las cónicas se dirigen en las clases y en el estudio independiente , con la orientación de actividades primeramente reproductivas para que fijen los conocimientos teóricos, bajo la dirección del profesor, así como mediante la interacción del profesor con los estudiantes y posteriormente el estudiante debe resolver las actividades de forma independiente hasta que se pueda ir elevando el nivel de exigencia.

Uno de los profesores encuestados expresa que para hacer más asequible las clases respecto a este tema es necesario contar en las escuelas con esquemas o medios de enseñanza.

A modo de conclusión se evidencia que los profesores presentan insuficiente dominio de las fases en el tratamiento de los conceptos y de las acciones que se realizan en cada una de ellas. Poseen limitaciones en el proceder para definir un concepto siguiendo la vía inductiva (constructiva) o la deductiva.

2.2 Fundamentación del sistema de actividades didácticas

Autores como (Marcelo Arnold & F. Osorio, 2003), (Juana Rincón, 1998), (Pablo Cazau, 2003), (L.H. Blumenfeld, 1960), (Zhamin, V.A, 1979), (Julio Leyva, 1999), (Cabrera, 2000) han abordado el término de sistema y se observan puntos en común a partir de considerar que:

- El sistema es una forma de existencia de la realidad objetiva.
- Los sistemas de la realidad objetiva pueden ser estudiados y representados por el hombre.
- Existen también sistemas que el hombre crea con determinados propósitos.
- Un sistema es una totalidad sometida a determinadas leyes generales.
- Un sistema es un conjunto de elementos que se distingue por un cierto ordenamiento.
- El sistema tiene límites relativos, sólo son “separables” “limitados” para su estudio con determinados propósitos.
- Cada sistema pertenece a un sistema de mayor amplitud, “está conectado”, forma parte de otro sistema.
- Cada elemento del sistema puede ser asumido a su vez como totalidad.
- La idea de sistema supera a la idea de suma de las partes que lo componen. Es una cualidad nueva.

A partir de la comprensión del sistema como un conjunto de elementos interrelacionados cuya cualidad esencial es la resultante de la integridad de sus elementos constitutivos que no se reducen a la suma de sus partes, se entiende al sistema como resultado científico a la construcción teórica orientada a la modificación de la estructura de determinado fenómeno y/o a la creación de uno nuevo y cuya finalidad es obtener resultados superiores (Falcón, 2021).

Al asumir actividad como un conjunto de acciones, operaciones o tareas, previamente planificadas, que contribuyen al logro de determinado objetivo, es posible entonces precisar que un sistema de actividades (Martínez, 2008): es un conjunto de elementos relacionados entre sí de forma tal que integran una unidad, el cual contribuye al logro de un objetivo general como solución a un problema científico educativo previamente determinado, pero si además, su objetivo es contribuir al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje, principalmente dentro de la clase u otras de sus formas organizativas entonces se estará hablando de un sistema de actividades didácticas (p.12, 13)

El sistema de actividades para el tratamiento de los conceptos relativos a la unidad Curvas de Segundo Grado asume las definiciones anteriores pues se corresponden con los intereses investigativos de la autora y con la consecución del objetivo principal hacia el cual se proyecta el presente desempeño científico, cuya dirección didáctica se encamina al proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en el onceno grado de la Educación Media Superior, además en ellas se hace evidente la relación entre los componentes del proceso de enseñanza aprendizaje indispensable para el tratamiento de los conceptos y sus definiciones en la unidad: Curvas de Segundo Grado. En la figura 1 se muestra la estructura de dicho sistema.

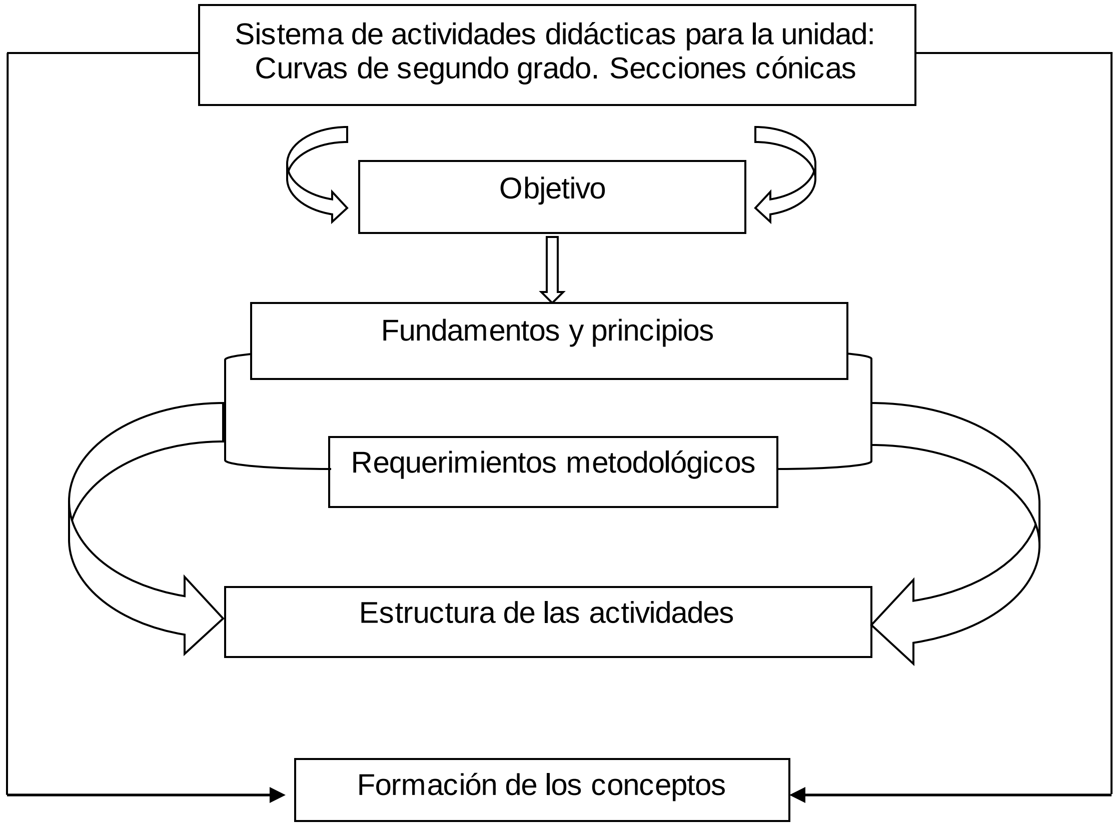


Figura1. Estructura general del sistema de actividades didácticas

El sistema de actividades didácticas tiene como objetivo contribuir a la formación de los conceptos en la Unidad curvas de segundo grado.

Los fundamentos del sistema de actividades que se propone le dan cientificidad y coherencia, así como sustentan su funcionamiento en la práctica pedagógica.

Desde el punto de vista filosófico, este sistema de actividades didácticas tiene sus bases en la teoría marxista-leninista básicamente en lo que se refiere a los postulados de la teoría del conocimiento, tomándose en consideración el carácter de proceso que se requiere para la adquisición del conocimiento científico.

Esto se expresa en el criterio leninista de que el conocimiento científico transcurre de la contemplación viva (relacionarse con el objeto matemático desde la presentación que se haga de él a través de la historia de su aparición o desde sus aplicaciones en la vida u otras vías que considere el docente) al pensamiento abstracto (representación mental del objeto matemático a conceptualizar) y de ahí a la práctica (hasta llegar al concepto con sus aplicaciones en la resolución de problemas).

También se consideró importante las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, pues a última instancia condiciona la actuación del docente, asumiéndose la visión filosófica sobre las matemáticas conocida como constructivismo social (Godino, Batanero y Font, 2004), donde ellas se conciben como un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel primordial la necesidad de resolver problemas prácticos o propios de la Matemática

El resultado que se propone se fundamenta en la sociología de la educación, la cual reconoce el carácter social y contextualizado de la educación, que se refleja en las posiciones adoptadas en relación con la concepción de ser humano a formar como ser social, donde el individuo debe adoptar un rol activo y transformador en el proceso de adquisición de los conocimientos y en su sistema de relaciones, todo ello favorece la formación de un pensamiento flexible y una mejor preparación del hombre para la vida de manera que pueda resolver los problemas que la sociedad le impone.

Desde el punto de vista pedagógico el sistema de actividades se sustenta en la vigencia de las ideas de la Pedagogía cubana que tiene en cuenta el papel del profesor y la fundamentación científica de la pedagogía como elementos de transformación social. Se presta atención especial a la formación integral del estudiante al combinar lo cognitivo, afectivo, volitivo y motivacional a través del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las actividades planificadas permiten trabajar las habilidades matemáticas necesarias para la elaboración de conceptos y responder a un modo de actuación que va dirigido a un fin consciente. En este sentido, el estudiante realiza acciones con un carácter consciente, determinada por la representación anticipada del resultado a alcanzar y la puesta en práctica de operaciones requeridas para accionar.

El enfoque Histórico-Cultural desarrollado por Vigostsky constituye el fundamento que, desde la psicología, se asume para sustentar la propuesta, al valorar el desarrollo psicológico como un proceso complejo, con origen en las condiciones y organización del contexto social y cultural que influyen en el sujeto y se produce como resultado de la acumulación de la experiencia individual de sus vivencias. Se asume el proceso de aprendizaje como una construcción y reconstrucción humana, donde juega un papel muy importante el concepto de zona de desarrollo próximo, camino que hay que recorrer entre el desarrollo actual alcanzado por el sujeto y el desarrollo potencial. Este enfoque propone la estimulación mental del estudiante, a partir de los aspectos cognitivos, afectivos y actitudinales desde las actividades que se precisan en la propuesta aportada en esta tesis, en la que el profesor brinda herramientas que permiten al estudiante acercarse al proceso de construcción de conocimientos de niveles inferiores a superiores; se busca el desarrollo del nivel actual, de conocimientos, habilidades y hábitos, del sujeto a través de actividades que realiza de forma autónoma, consciente y consolidada, como el resultado del desarrollo anterior y con la colaboración de otros.

Fundamentos didácticos: en este fundamento se destaca de manera especial la Metodología de la Enseñanza de la Matemática como ciencia, que constituye una de las didácticas especiales en las que se concretan las leyes y principios generales establecidos en las ciencias. El diseño del sistema de actividades didácticas parte de la concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador, que considera al estudiante como centro y protagonista activo de este proceso, posibilita la interacción y comunicación, así como eleva la capacidad de reflexión, el aprendizaje racional y afectivo-vivencial de los estudiantes.

La propuesta se sustenta en los siguientes principios didácticos:

• Principio de la vinculación de la teoría con la práctica. Este principio está dirigido a desarrollar actividades donde se expresen situaciones de la práctica a través de la aplicación de los conceptos relativos a las cónicas. Además, de propiciar el desarrollo de una cultura matemática en los estudiantes.

• Principio de asequibilidad. Se basa en la simplificación didáctica para que el aprendizaje se produzca de lo sencillo a lo complejo, de lo próximo a lo distante, de lo conocido a lo desconocido, de lo fácil a lo difícil de lo concreto a lo abstracto para que los estudiantes puedan resolver de forma independiente los ejercicios y darles el menor grado de ayuda posible.

• Principio de la sistematicidad, ya que se organizan las actividades según conocimientos anteriores, habilidades y modos de la actividad mental, que permitieron integrar el saber de los estudiantes con desarrollo en distintas áreas del conocimiento y el deseo de aprender de otros en los que se despertó el interés cognoscitivo.

• Principio de la objetividad porque contribuye a que los estudiantes asimilen de forma más profunda, consciente y sólida los conocimientos, y a que desarrollen su atención, memoria y capacidad creadora.

• Carácter consciente y actividad independiente del estudiante: Los estudiantes participan de manera consciente a partir de la orientación del profesor, pero asumiendo roles diferentes y esenciales en la actividad a partir de las vivencias que contribuyen al desarrollo de la atención, concentración, autocontrol y manifestar satisfacción por las actividades que realizan.

Para la puesta en práctica de la propuesta se recomiendan los siguientes requisitos metodológicos:

• Utilizar para el desarrollo de las clases un sistema de métodos donde interactúen los reproductivos con los productivos, predominando estos últimos, mediante el uso de medios de enseñanza en correspondencia con los objetivos de aprendizaje de la actividad, para que los estudiantes puedan desplegar un pensamiento productivo y creador.

• El profesor propiciará el papel protagónico de los estudiantes para lograr aprendizajes activos en las distintas actividades, estimulando la independencia y la seguridad en sí mismo, para contribuir a la autorregulación bajo climas de aprendizaje adecuados.

• El profesor propiciará que se manifieste en los estudiantes un aprendizaje racional y afectivo-vivencial de los conceptos de la unidad, garantizando su rigor científico, actualización y el vínculo de lo que aprende con las problemáticas de la vida cotidiana.

La estructura que la autora asume para la presentación de cada una de las actividades que conforman su sistema, es la que a continuación se presenta:

- Número de la actividad.
- Título de la actividad.
- Vía de Cumplimiento.
- Objetivo.
- Orientación didáctica.
- Evaluación.

Las vías de cumplimiento del sistema de actividades didácticas son de tres tipos: la docente, la extradocente y la extraescolar. El criterio asumido por la autora en ese sentido establece que las actividades vinculadas a la vía de cumplimiento docente, son aquellas que se cumplen en las clases, en el vínculo directo de los docentes y los estudiantes en el aula; las actividades extradocentes se identifican como aquellas que bajo la orientación del docente en el aula, encuentran su cumplimiento fuera del horario docente, discutidas y evaluadas con posterioridad en el grupo escolar y las actividades extraescolares, que se identifican como las realizadas en otras instituciones o contextos ajenos a la escuela, donde se hace posible la participación de los estudiantes para adquirir conocimientos y experiencias.

Las actividades se organizan de manera que haga posible el tránsito por las diferentes etapas de la formación del concepto, a partir de la investigación realizada por Villarraga, Rojas y Sigarreta (2020), se sugiere:

Para la etapa de preparación, actividades que:

- Constituyen el punto de partida del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Aumentan la motivación y despiertan la curiosidad del estudiante por los temas que se van a tratar.
- Responden a los intereses de los estudiantes.
- Sean de fácil comprensión, pero a la vez lleva un reto especial para los estudiantes.
- Su realización requiere del dominio de conceptos previos.
- Su solución permite la manipulación de diferentes herramientas (visuales, tecnológicas, entre otras).

Para la etapa de formación del concepto, actividades que:

- Propicien la ejercitación de las acciones, los conocimientos y conceptos que se quieren formar.
- Permiten al estudiante realizar la acción, con la posibilidad de ser controlada su ejecución por parte del docente.
- El uso de recursos heurísticos por parte del estudiante para la solución de problemas.
- Asiente el accionar metacognitivo durante la ejecución de la actividad.
- Posibilita el paso de la Zona de Desarrollo Real a la Zona de Desarrollo Potencial.

- Donde se den las condiciones necesarias para pasar a la etapa de formación en el plano del lenguaje, donde los elementos de la acción deben estar representados en forma verbal (oral o escrita) por el estudiante.
- Se desarrollen de forma grupal, de tal manera que permita la participación del equipo o compañeros, expresando de manera verbal las ideas acerca de su solución.

Para la etapa asimilación y fijación del concepto, actividades que:

- Posibiliten la generalización, de tal manera que impliquen la habilidad de aplicar la actividad en nuevas condiciones.
- En el despliegue, se accede a procesos metacognitivos que son explicados verbalmente, garantizando una acción consciente.
- Deban ofrecer grados de independencia a los estudiantes, de tal manera que el docente no tenga que dar todas las herramientas, sino que debe darse el caso que pueda ser ejecutada de forma independiente.

Actividades que permiten la fijación – aplicación, estos se caracterizan por cumplir las siguientes condiciones:

- El desarrollo debe darse de manera individual por parte del estudiante.
- Deben permitir un análisis interno (internalización) e independencia absoluta durante la actividad.
- Posibilita establecer el concepto a través de diferentes representaciones o aplicaciones a nuevos fenómenos propuestos por el estudiante o docente.

2.3. Descripción del sistema de actividades didácticas

El sistema de actividades didácticas que se elabora es para el grado onceno de la enseñanza preuniversitaria, para el estudio de la unidad "Curvas de segundo grado y secciones cónicas", que se le asigna para su tratamiento en el programa de ese grado 33 horas clases (h/c), las que se distribuyen por temáticas de la forma siguiente: 6h/c para Circunferencia; 7h/c para Elipse; 7h/c para Hipérbola; 7h/c para Parábola y 6h/c para una sistematización de las secciones cónicas al concluir la unidad.

De estas curvas (Secciones Cónicas) los estudiantes en grados precedentes han tratado elementos y características de dos de ellas: la circunferencia y la parábola. En esta unidad estudian además la elipse y la hipérbola. De la circunferencia conocen su caracterización como un lugar geométrico, sus elementos, relaciones de posición entre puntos y circunferencias, entre rectas y circunferencias y entre dos circunferencias, ahora aprenderán como representar analíticamente los puntos de las curvas mediante una ecuación y aplicar el procedimiento analítico al estudio de la circunferencia.

En el caso de la parábola conocen la ecuación de esta como función ya que comienzan su estudio en la enseñanza secundaria básica en noveno grado y lo continúan en la enseñanza preuniversitaria, por lo que se parte de la ecuación, que representa lo conocido, y se deriva la propiedad geométrica que caracteriza los puntos de la curva.

En el caso de la elipse y la hipérbola no la han estudiado con anterioridad. Pero de la elipse se tiene como base el conocimiento de la figura óvalo a la que se puede hacer referencia, pero destacando sus diferencias, además que en décimo grado en la asignatura Física estudian las leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol esta describe una trayectoria elíptica, precisamente esta curva.

El sistema de actividades didácticas que ofrece la autora asume lo planteado por Ballester para el tratamiento de los conceptos y definiciones matemáticas, las etapas por la que transcurre, así como la vía inductiva (constructiva) o deductiva para la formación del concepto, con el objetivo de estimular el desarrollo de los estudiantes a nuevas situaciones de aprendizaje partiendo de lo que ya conocen, siguiendo las ideas de Vygotsky sobre la zona de desarrollo próximo. Está fundamentado en las etapas para el tratamiento de los conceptos y definiciones matemáticas:

1. Consideraciones y ejercicios preparatorios.
2. Formación del concepto.
3. Asimilación o fijación del concepto.

Cada una de las unidades temáticas tienen ejercicios en las distintas etapas para el tratamiento de los conceptos de las secciones cónicas en correspondencia con la dosificación que se propone para el trabajo en esta unidad, en el caso de la circunferencia y la parábola como los estudiantes tienen conocimientos previos existen actividades en estas, dedicadas específicamente en la primera etapa (consideraciones y ejercicios preparatorios), mientras que para la elipse y la hipérbola estos ejercicios preparatorios se dirigen ya desde la formación del concepto, pues no han sido estudiadas con anterioridad.

Para introducir el estudio de las secciones cónicas se ofrece una primera actividad que tiene como objetivo mostrar un video que les permitirá observar que son las secciones cónicas y como se obtienen, esta actividad le ofrece una visión concreta del contenido a estudiar y despierta el interés del estudiante, motivándolo hacia su aprendizaje.

Para el trabajo en la unidad temática Circunferencia se diseñó un total de cinco actividades didácticas, la primera actividad está en correspondencia con la primera etapa a desarrollar en el tratamiento de los conceptos y sus definiciones: consideraciones y ejercicios preparatorios donde se le recuerda lo que ya se conoce de la circunferencia, su definición, la representación gráfica dado sus elementos así como las relaciones de posición con la recta, donde se utilizan las ecuaciones estudiadas en la unidad anterior de geometría analítica para determinar lo que necesitemos (distancia entre dos puntos, las coordenadas del punto medio, distancia de un punto a una recta), estas fórmulas se utilizan en toda la unidad. Aquí también se vincula la matemática con la vida práctica y con la Física.

La segunda actividad didáctica está en correspondencia con la segunda etapa a desarrollar en el tratamiento de los conceptos y sus definiciones: formación del concepto en esta se parte de lo que ya conocen y se pasa a definir la circunferencia por vía inductiva y a realizar ejercicios donde la identifiquen.

Las restantes actividades se encuentran en la tercera etapa: asimilación y fijación del concepto. En la actividad 1.3 se determina la ecuación de la circunferencia, donde mediante la definición y su representación en símbolos, se utiliza la fórmula conocida de distancia entre dos puntos y se obtiene la ecuación cartesiana de la circunferencia, que se muestra en el libro de texto de onceno grado en el teorema 1 en la página 115. En la actividad 1.4 se determina la ecuación de la circunferencia dado su centro y radio y dados los extremos del diámetro y en la actividad 1.5 se determina la ecuación cartesiana de la circunferencia, dado su ecuación general aplicando el completamiento cuadrático, así como las relaciones de posición entre una circunferencia y una recta.

Para la unidad temática: Elipse, se elaboraron seis actividades didácticas, la primera actividad correspondiente a la segunda etapa del tratamiento de los conceptos y sus definiciones donde se tratan conocimientos previos para trabajar en el concepto como son la figura geométrica del óvalo y los conocimientos físicos relacionados con este lugar geométrico.

Para elaborar la definición de elipse por la vía constructiva se utiliza un principio heurístico, la analogía con la circunferencia, basado en el método del jardinero que se le puede decir en la clase que el método utilizado recibe este nombre. Es de gran importancia destacar como no solo en este ejercicio sino en todos los que se proponen en el sistema están presentes las formas de trabajo y pensamiento de la Matemática destacando la búsqueda de relaciones y dependencias y consideraciones de analogía.

Las restantes actividades se encuentran en la tercera etapa: asimilación y fijación del concepto. Están dirigida a identificar los elementos y relaciones que caracterizan a la elipse, obtener su ecuación, representarla gráficamente, determinar los puntos de intersección con otras curvas, así como vincular este contenido con la vida práctica.

Para la unidad temática: Hipérbola, se elaboraron seis actividades didácticas, donde esta se elabora por vía deductiva que se parte de la definición del concepto y mediante el análisis de ejemplos se descubre el contenido y la extensión del concepto y en función de esto está la primera actividad.

Las restantes actividades se encuentran en la tercera etapa: asimilación y fijación del concepto. Están dirigida identificar los elementos y relaciones que caracterizan a la hipérbola, obtener su ecuación, representarla gráficamente, determinar los puntos de intersección con otras curvas, así como vincular este contenido con la vida práctica.

Para la unidad temática: Parábola, se diseñaron seis actividades didácticas, la primera de ellas se encuentra en la etapa inicial del tratamiento de los conceptos y sus definiciones: consideraciones y ejercicios preparatorios donde para estudiar la parábola ya tienen como referente la función cuadrática que representa una parábola, se recuerda este contenido y se establecen relaciones y semejanzas con la ecuación $x = 4y^2$ que representa una parábola, pero no es función.

En la segunda actividad se define la parábola utilizando la vía constructiva, donde se toma como referente el procedimiento que muestra el libro de texto para construir parábolas y con un análisis muy detallado se van determinando las características esenciales para que ellos por sí solos sean capaces de elaborar el concepto de parábola.

Las restantes actividades se encuentran en la tercera etapa: asimilación y fijación del concepto. Están dirigida a identificar los elementos y relaciones que caracterizan a la parábola, obtener su ecuación, representarla gráficamente, determinar los puntos de intersección con otras curvas, así como vincular este contenido con la vida práctica.

La unidad temática: Sistematización de las secciones cónicas, consta de tres actividades didácticas en la primera se sistematizan los conceptos de las cuatro secciones cónicas estudiadas, se precisa sobre cómo se obtienen cada una los elementos que poseen y sus características esenciales.

La segunda actividad está dirigida a identificar cada una de las secciones cónicas dada su ecuación general en un primer momento y luego aplicando el completamiento cuadrático llegar a la ecuación cartesiana de cada una para determinar sus elementos.

La tercera actividad está encaminada a vincular los elementos de las diferentes secciones cónicas en una misma situación para que en correspondencia con la relación de posición que tengan determinar su ecuación y elementos, lo contribuye a la fijación de los conceptos de las secciones cónicas y vincularlas entre sí.

En la siguiente tabla a manera de resumen se relacionan las actividades didácticas con las etapas para el tratamiento de los conceptos y definiciones matemáticas y la vía de evaluación correspondiente:

Actividades didácticas	**Etapas en que se ubican**	**Vía de evaluación**
Actividad 1.1 Actividad 4.1	Consideraciones y ejercicios preparatorios	Se realizarán **preguntas orales** para controlar lo que recuerdan del contenido
Actividad 1.2 Actividad 2.1 Actividad 3.1 Actividad 4.2	Formación del concepto	Se controlará a partir de la **observación al desempeño** de los estudiantes definiendo los distintos conceptos
Actividad 1.3, 1.4, 1.5 Actividad 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 Actividad 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6	Asimilación o fijación del concepto	La actividad 1.4 el ejercicio tres se realizará una **evaluación escrita** La actividad 5.3 se evaluará mediante un **seminario**

Actividad 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 Actividad 5.1, 5.2, 5.3		Las demás serán evaluadas en el transcurso de la clase y como estudio independiente

El sistema de actividades didácticas se muestra en el Anexo 4 a manera de ejemplo se muestran las seis actividades elaboradas para el tratamiento del concepto de elipse, de manera similar se procedió para las demás secciones cónicas:

Elipse

Actividad # 2.1

Título: Una definición para la elipse.

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo: Definir la elipse como lugar geométrico mediante el procedimiento utilizado con la circunferencia para el establecimiento de nexos entre la forma de trabajo y pensamiento en la matemática**.**

Ejercicio:

1- De la visualización del video sobre las secciones cónicas, ¿qué sección cónica obtenemos cuando:

a) el plano que corta al cono paralelo a su base.

b) el plano que corta al cono es paralelo a su generatriz.

c) el plano no es paralelo a la base, sino que solo está un poco inclinado.

2- Estableciendo analogías con la circunferencia elabore una definición para la curva que describe a la figura geométrica conocida como óvalo.

Orientación didáctica: Este ejercicio se encuentra en la segunda fase para el tratamiento de los conceptos y sus definiciones y en este caso para elaborar una definición de elipse se utiliza un principio heurístico, la analogía con la circunferencia, basado en el método del jardinero que se le puede decir en la clase que el método utilizado recibe este nombre. Es de gran importancia destacar como no solo en este ejercicio sino en todos los que se proponen en el sistema están presentes las formas de trabajo y pensamiento de la Matemática destacando la búsqueda de relaciones y dependencias.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos y para la solución de la siguiente actividad se destacarán dos momentos importantes que se muestra en la siguiente tabla:

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 2.2

Título: Identificando la elipse

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Identificar la elipse como lugar geométrico a partir de un conjunto de puntos del plano que cumplen determinada propiedad para su aplicación en situaciones intra y extramatemáticas.

Ejercicio

1- Sean A y B dos puntos fijos del plano y F el lugar geométrico de los puntos M del mismo plano. A partir de las relaciones que se dan a continuación, que representan lugares geométricos, cuál corresponde a una elipse:

a- ___ $\mathrm{MA} - \mathrm{MB} = 15 \text{ y } \mathrm{AB} = 10$

b- ___ $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = 15\mathrm{cm} \text{ y } \mathrm{AB} = 10\mathrm{cm}$

c- ___ $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = 5\mathrm{cm} \text{ y } \mathrm{AB} = 15$

2- Conocidos los elementos de la elipse, eje mayor ($\overline{A_1A_2}$ = 2a), eje menor ($\overline{B_1B_2}$ = 2b), distancia focal ($\overline{F_1F_2}$ = 2c), triángulo característico ($a^2 = b^2 + c^2$), excentricidad ($e = \frac{c}{a}$) y P(x;y) un punto cualquiera de la elipse, clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas.

a) ____ $\overline{PF_!} + \overline{PF_2} = 2a$

b) ____ Al calcula la excentricidad de la elipse, la razón $\frac{c}{a}$ es mayor que 1.

c) ____ Cuando la excentricidad es igual a cero la elipse se convierte en una circunferencia.

Actividad del profesor	Actividad del estudiante
¿Qué nos dan? ¿Qué nos piden? ¿Para trazar una circunferencia sin la utilización del compás como procedíamos? ¿Cuántos puntos tomamos? ¿Será suficiente tomar un punto para trazar la curva que describe a la figura geométrica conocida como óvalo? Variemos la condición de la cantidad de puntos a tomar a ver si obtenemos el lugar geométrico deseado. ¿Cuántos puntos seleccionar? Acaso dos, tres o cinco. ¿Cuál sería más sencillo? ¿Cómo procederíamos entonces, pensando en lo que hicimos con la circunferencia? ¿Qué características debe poseer la distancia del hilo a tomar? ¿Por qué? Para elaborar la definición destaquemos las características esenciales que tuvimos en cuenta al trazarla. ¿Cuántos puntos utilizamos? ¿Cómo es la distancia del hilo? ¿Qué relación existe entre las distancias de los puntos de la elipse a cada uno de los puntos fijos? ¿Cómo quedaría la definición?	La definición de circunferencia. Elaborar una definición para la curva que describe a la figura geométrica conocida como óvalo. Si no tenemos un compás para trazar la circunferencia, se marca un punto del plano y se toma la distancia deseada con un hilo, se estira el hilo fijando el lápiz en el otro extremo y se marcan los puntos que forman la circunferencia. Para trazar la circunferencia hemos tomado solo un punto fijo. Si tomamos solamente un punto estaríamos trazando circunferencias, por lo que sería conveniente probar con dos puntos, pues es el caso más sencillo. Se marcan dos puntos en el plano y se toma un hilo cuya distancia sea mayor que la distancia entre los puntos, pues se fijan los dos extremos del hilo a dichos puntos y se traza la curva. Se tomaron dos puntos fijos y una distancia mayor que la distancia entre los puntos. La suma de las distancias de cada uno de los puntos de la curva obtenida a los puntos fijos es igual a la longitud del hilo. El lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano, es una constante mayor que la distancia entre los puntos.

d) ____ La distancia de un foco de la elipse al centro de esta es la distancia focal igual a 2c.

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la tercera fase del tratamiento de los conceptos para su solución se tienen en cuenta los siguientes momentos según el programa heurístico general para el tratamiento de los conceptos:

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos analiza el contenido y la extensión del concepto del concepto de elipse, los elementos de la elipse y las relaciones entre ellos para lograr identificar la proposición correcta.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 2.3

Título: Otra forma de representar la elipse

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Deducir la ecuación cartesiana de la elipse a partir de su definición y elementos sustituyendo conceptos por su definición, utilizando reglas de inferencias válidas con el uso de la simbología matemática requerida potenciando el trabajo con los conceptos matemáticos en sus distintas representaciones.

Ejercicio:

1- Sea la elipse que tiene focos $F_1(c;0)$ y $F_2(-c;0)$ y un punto P de coordenadas $P(x;y)$, obtén una ecuación para la elipse en función de sus ejes, a partir de su definición conociendo que la constante mencionada en la definición es la longitud del eje mayor (2a).

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la tercera fase del tratamiento de los conceptos: asimilación y fijación del concepto, a partir del análisis de la definición, su representación gráfica y los elementos de la elipse se llega a la ecuación que define a la elipse como lugar geométrico y a partir de esta se introduce las demás ecuaciones, cuando el eje mayo es paralelo al eje “x” o cuando es paralelo al eje “y” y so centro es un punto O(h;k).

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.
Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Actividad del profesor	Actividad del estudiante
¿Qué nos piden? ¿Qué nos dan? ¿Cómo podemos expresar en símbolos la definición? Si la constante mayor que la distancia entre sus focos es igual a 2a ¿cómo se podría expresar la ecuación? ¿Qué ecuación utilizamos para determinar la distancia entre dos puntos? Con los datos que nos ofrece el ejercicio sustitúyelo en la ecuación y calcula apoyándote de la demostración que ofrece el libro de	Nos piden: • Determinar una ecuación para la elipse en función de sus ejes: Eje mayor ($\overline{A_1A_2}$ = 2a), semieje mayor ($\overline{AO} =$ a). Eje menor ($\overline{B_1B_2}$ = 2b), semieje menor ($\overline{BO}$ = b) • Las coordenadas de los focos F_1 $(\mathrm{c};0)$ y $F_2\,(-c;0)$ y del punto $P(x;y)$ que pertenece a la elipse. Además, que la constante que se menciona en la definición es igual a 2a. • $d(F_1;P)+d(F_2;P)>d(F_1;F_2)$ • $d(F_1;P)+d(F_2;P)=2a$ • $d(F;P)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ $$\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+y^2}+\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}=2a$$ $$\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+y^2}=2a-\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}$$ $$\left(\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}\right)^2$$ $$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}+(\mathrm{x}-c)^2+y^2$$ Se eliminan las y^2 en ambos miembros y se resuelve el binomio al cuadrado quedando: $$x^2+2xc+c^2=4a^2-4a\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2$$ Se eliminan en ambos miembros x^2 y c^2 y se aísla el radical:

texto de onceno grado en las páginas 135 y 136.	$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$ dividiendo entre 4 la ecuación $$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=(a^2-cx)^2$$ $$a^2[(x-c)^2+y^2]=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$ $$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$ Se eliminan en ambos miembros $-2a^2xc$ $$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$$ Agrupamos las x^2, las y^2 y lo demás lo pasamos para el otro miembro: $a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$ $x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ Como ya conocemos el triángulo característico ($a^2=b^2+c^2$), si despejamos b^2 quedaría ($b^2=a^2-c^2$) sustituyendo: $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$ dividiendo por a^2b^2 la ecuación obtenemos: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 2.4

Título: ¡Busco una elipse!

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo:

- Obtener la ecuación de la elipse dado sus elementos o representación gráfica a partir de sustituir en la ecuación cartesiana o por el completamiento cuadrático para el desarrollo de habilidades en el trabajo algebraico.
- Representar gráficamente la elipse dado su ecuación o elementos con la utilización de instrumentos de trazado para el desarrollo de la visualización en los estudiantes.

Ejercicio:

1- Escribe la ecuación de la elipse que tiene como centro en el origen de coordenada y eje mayor paralelo al eje “x” y cumple: (Ejemplo 1 página 137 libro de texto onceno grado)

a) a=3; b=2

b) 2a=8; c=3

2- Escribe la ecuación de la elipse que tiene como centro O y cumple: (Ejemplo 2 página 138 libro de texto onceno grado)

a) O (3; -4), a=5, b=3

b) O (-2; 0), 2b=10, $F_2\,(2;0)$

3- Representa en un sistema de coordenadas la elipse: (Ejemplo 3 pagina 139 y 140 libro de texto onceno grado)

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $9x^2+16y^2+18x-64y-71=0$

4- Ejercicios del 1 al 13 de la página 143 a la 145 libro de texto de onceno grado.

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la tercera fase del tratamiento de los conceptos y sus definiciones: asimilación y fijación del concepto. Las tres primeras actividades son los tres primeros ejemplos resueltos que plantea el libro de texto y que le sirven para la solución de los ejercicios que se proponen para ellos resuelvan.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos instrumentos de medidas como regla o cartabón, se orientará realizar de estudio independiente las representaciones gráficas de las circunferencias en el software Geogebra.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 2.5

Título: La elipse y otras curvas.

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Caracterizar las relaciones de posición de la elipse con otras curvas mediante el análisis de sus puntos de intersección para potencia tanto el desarrollo del trabajo algebraico y geométrico.

Ejercicio:

1- Halla los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ y las curvas: (Ejemplo 5 página 141 libro de texto onceno grado)

a) $3x-5y+15=0$

b) $x^2+y^2=16$

2- Ejercicio 14 página 146 libro de texto onceno grado

Orientación didáctica: En esta actividad se determinan las relaciones de posición entre la elipse y otras curvas como la circunferencia y la recta por lo tanto contribuye no solo a la asimilación y fijación sino también al de las otras secciones cónicas estudiadas.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos utilizar el completamiento cuadrático para escribir la ecuación cartesiana de la elipse y además se establecen sistemas de ecuaciones para determinar los puntos de intersección entre estos.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 2.6

Título: Aplicaciones de la elipse

Objetivo: Obtener la ecuación y elementos de la elipse mediante el análisis de situaciones práctica para establecer nexos entre la Matemática con otras ciencias y con la vida.

Ejercicio:

1- La tierra tiene una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de sus focos. Sabiendo que el semieje mayor de esa elipse mide $1{,}485\cdot 10^8$ Km y que la excentricidad es $\frac{1}{62}$, halla las distancias máximas y mínimas al Sol. (Ejemplo 6 páginas 142 y 143 libro de texto onceno grado).

1- Ejercicio 17 página 146 libro de texto onceno grado.

Orientación didáctica:

En esta actividad no solo se posibilita la fijación del concepto de elipse sino también su aplicación a situaciones de la vida práctica para que el estudiante vea la utilidad de su estudio.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos recodar los elementos y relaciones de la elipse para contextualízalos.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

2.4. Validación del sistema de actividades didácticas

La validación de la propuesta se realizó a través de la valoración práctica a partir de la implementación parcial del sistema de actividades y por la valoración de especialistas como método de indagación empírica.

El sistema de actividades fue utilizado en el curso 2021 por la autora en tres grupos de onceno grado del preuniversitario Félix Valera Morales, donde se desempeña como docente de la asignatura de Matemática (60 estudiantes). Para valorar el dominio de los estudiantes de los conceptos de la unidad estudiada se analizaron las respuestas que ellos dieron a la pregunta cinco del examen final de onceno grado aplicado en la provincia de Matanzas.

La pregunta estaba dirigida a evaluar el concepto de circunferencia como lugar geométrico. Se les daba la ecuación cartesiana de una circunferencia, en un primer inciso los estudiantes debían determinar su centro y su radio, nótese como para responder esta pregunta los estudiantes deben identificar los componentes de la circunferencia a partir de la expresión analítica de esta cónica. En un segundo inciso los estudiantes debían demostrar que un punto dado pertenece al gráfico de la circunferencia representada por la ecuación dada, en este caso podía procederse de dos maneras, una primera algebraica, o sea sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación y verificar que se satisface la ecuación dada o una segunda opción sería aplicar la definición de circunferencia como lugar geométrico, lo cual implicaría calcular la distancia entre el punto dado y el centro y verificar que coincide con el radio. En el último inciso se les daba las coordenadas de dos puntos y se les pedía decidir si ellos eran puntos exteriores o interiores a la circunferencia dada, en este caso podían elegir responder utilizando el enfoque analítico o sea calcular la distancia de los puntos al centro y compararla con la longitud del radio, si es mayor el punto es exterior y si es menor el punto es interior, también podrían utilizar la idea geométrica, dibujando la circunferencia en el plano cartesiano y ubicando los puntos en el plano.

La pregunta plantea:

5- La ecuación $(x+2)^2+(y-3)^2=9$ corresponde a una circunferencia de centro O (h; k) y radio r_1.

5.1- Determina:

a) Coordenadas del centro.

b) Longitud del radio r_1.

5.2- Sean los puntos P (1;3), Q (0;3) y M (5;3)

a) Prueba mediante cálculos, que P (1;3) pertenece al gráfico de la circunferencia de centro O y radio r_1.

b) De los puntos Q (0;3) y M (5;3) ¿cuál de ellos es exterior a la circunferencia de centro O y radio r_1.

Nota: Puedes auxiliarte de un esbozo gráfico para resolver la pregunta, o aplicar, las fórmulas básicas de geometría analítica.

En la Tabla 2 se resume el total de estudiantes que respondieron correctamente cada inciso utilizando tanto el enfoque analítico, algebraico o geométrico.

Tabla 2. Resultados de los estudiantes

	Enfoque	Cantidad de estudiantes que vencieron el objetivo por enfoque	Cantidad que vencieron el objetivo	% que vencieron el objetivo
5.1a	Analítico	57	57	95,0

5.1b	Analítico	56	56	93,3
5.2.a	Algebraico	42	55	91,7
	Analítico	13		
5.2.b	Analítico	18	50	83,3
	Geométrico	32		

Vale destacar que los tres estudiantes que no pudieron determinar el centro (inciso 5.1.a), tampoco realizaron correctamente los demás incisos, por lo que resultaron suspensos en la pregunta, mientras que de los cuatro estudiantes que no pudieron determinar el radio (inciso 5.1.b), tres coinciden con los anteriores y el otro tuvo dificultades en el cálculo, pero logró identificar si el punto pertenecía a la circunferencia y el punto que era exterior, por lo que vence el objetivo.

Los estudiantes que determinaron por la vía analítica si el punto pertenecía a la circunferencia, también utilizaron esta vía para determinar el punto exterior, lo que evidencia el dominio del concepto de circunferencia, al igual que los que utilizaron la vía algebraica para determinar si el punto pertenece a la circunferencia, la mayoría de estos utilizaron la vía geométrica para determinar el punto exterior. De forma general en la pregunta hubo 57 aprobados: 25 con 20 puntos, 18 con 19 puntos, 3 con 18 puntos, 2 con 17 puntos, 2 con 16 puntos, 3 con 15 puntos, 2 con 14 puntos, 1 con 13 puntos, 1 con 12 puntos y 3 suspensos.

Estos resultados muestran la efectividad del sistema de actividades didácticas al lograr un 95 % de aprobados donde alrededor del 84 % logró una calificación de al menos 17 puntos.

En la valoración empírica a través de la opinión de especialista se tuvo en cuenta la definición de especialista dada por Fuentes at et. (2018) “especialista es el profesional cuyo ejercicio de la profesión se relaciona con el objeto de estudio de la investigación y posee los requisitos exigidos para valorar la factibilidad, aplicabilidad y viabilidad de un producto determinado”.

Para la selección se tuvieron en consideración los siguientes criterios:

• Prestigio dentro de su colectivo de trabajo ganado por el desempeño como profesores de Matemática.

• Experiencia profesional en la disciplina que imparte y en el nivel de enseñanza.

• Competencia en la investigación educativa.

Se seleccionaron seis especialistas, uno de ellos doctor en Ciencias con más de 30 años de trabajo como profesor de Matemática y cinco Máster en "Matemática Educativa" y "Ciencias de la Educación", con un promedio de 13 años como profesores de Matemática en la Educación Preuniversitaria, incluyendo el metodólogo de Matemática por más de 13 años en el municipio Cárdenas.

Para la consulta a especialista se diseñó una encuesta con el objetivo de evaluar la efectividad y factibilidad del sistema de actividades didácticas propuesto a través del consenso de las opiniones de los especialistas encuestados. La encuesta (Anexo 5) se estructuró en dos partes, la primera referida a los datos del especialista y la segunda un cuestionario formado por ocho ítems, los 7 primeros de respuesta cerrada y el último abierto.

A esta encuesta se le anexó un resumen del sistema de actividades didácticas elaborado y se circuló vía *Whatsapp* a profesores del departamento de Matemática de la Universidad de Matanzas, a profesores del IPVCE Calos Marx, de la provincia Matanzas, así como al metodólogo municipal de Matemática de Preuniversitario en el municipio Cárdenas. A continuación, se muestran los resultados obtenidos del procesamiento de la información captada por la encuesta:

- El 100% consideran que los conceptos juegan un papel muy importante en los contenidos matemáticos. Este es un resultado que tributa a la pertinencia de la propuesta pues aborda un tema fundamental en la enseñanza de la matemática.
- El 100% considera muy importante utilizar las etapas para el tratamiento de los conceptos matemáticos y sus definiciones, lo cual indica una fundamentación adecuada de la propuesta desde la didáctica de la matemática.
- El 83,3% considera que el sistema de actividades es viable de implementar totalmente, el 17,7% restante piensa que es parcialmente viable, además el 100% considera que la implementación del sistema de actividades no afectaría la organización docente, ambos resultados permite concluir que la propuesta es factible de implementar.

- El 83,3% opina que el sistema de actividades se corresponde totalmente con las necesidades de aprendizaje, el resto considera que parcialmente y si a esto se le suma que el 100% considera que el impacto en el aprendizaje será al menos significativo (83,3% muy significativo y 17,7% significativo) se puede afirmar que la propuesta es válida o sea contribuye al cumplimiento de los objetivos del nivel e incide favorablemente en el aprendizaje de estos contenidos.
- El 100% avala la generalización del sistema de actividades.

Además de los juicios dados por los especialistas, se recibieron respuestas de profesores que no cumplían con los criterios de selección de especialista asumidos, sin embargo, se consideró oportuno tener en cuenta sus opiniones, por cuanto en algún momento podrían constituir usuarios de la propuesta si lo adoptarán en su desempeño como docentes. Es por ello que se optó por la técnica de *Iadov*, alternativa para valorar resultados en aquellos casos en que los evaluadores son usuarios de lo que se propone (Fernández de Castro y López, 2014).

Sin embargo, la encuesta no fue diseñada para ser utilizada para esta técnica, la cual exige un cuestionario con un total de cinco preguntas, de ella tres cerradas y dos abiertas, cuya relación ignora el sujeto. Además, las escalas asociadas a las respuestas difieren del utilizado en la encuesta.

Para la aplicación de este método se eligieron ítems de la encuesta (Anexo 5) para definir las preguntas exigidas por el método, a continuación, se expone la elección realizada y la trasformación de la escala:

Para definir la pregunta referida al diseño del sistema de actividades (pregunta 2) se seleccionaron los ítems 3 y 4 de la encuesta y la trasformación de la escala fue la siguiente:

- Me gusta Mucho si responde en ambas preguntas totalmente
- Me gusta más de lo que me disgusta si responde en una totalmente y en la otra parcialmente
- Me disgusta más de lo que me gusta si responde limitadamente en una de las preguntas
- No me gusta si responde al no en al menos una de las preguntas
- No puedo decidir si responde no sé en al menos una de las dos preguntas

Para la pregunta asociada al resultado (pregunta 1) se tomó el ítem 6 y se consideró Si cuando responde muy significativo o significativo, No cuando responde poco significativo. Para la pregunta 3 se tomó el ítem 7 de la encuesta.

Estas tres preguntas cerradas se relacionan a través del “Cuadro lógico de Iadov”, el cual se presenta adaptado a la presente investigación en la Tabla 3.

Tabla 3. Cuadro lógico de *Iadov* para señalar la interacción entre las respuestas

P1: Estas satisfecho con el resultado a obtener con la aplicación del sistema de actividades									
	SI			No se			No		
P2: Le gusta la forma en que se diseñó el sistema de actividades didácticas basado en el tratamiento de los conceptos por etapas	P3: Si pudiera elegir la vía para perfeccionar el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos relativos a las cónicas adoptaría por el sistema propuesto								
	Si	No se	No	Si	No se	No	Si	No se	No
Me gusta Mucho	1	2	6	2	2	6	6	6	6
Me gusta más de lo que me disgusta	2	2	3	2	3	3	6	3	6
Me disgusta más de lo que me gusta	6	3	6	3	4	4	3	4	4
No me gusta	6	6	6	6	4	4	6	4	5
No puedo decidir	2	3	6	3	3	3	6	3	4

El número resultante de la interrelación de las tres preguntas indica la posición de cada sujeto en la escala de satisfacción.

La escala de satisfacción es la siguiente:

1. Clara satisfacción
2. Más satisfecho que insatisfecho
3. No definida
4. Más insatisfecho que satisfecho
5. Clara insatisfacción
6. Contradictoria

La Tabla 4 muestra la satisfacción individual, con esos resultados se calcula el índice de satisfacción grupal utilizando la expresión 2.1

Tabla 4. Satisfacción individual de los encuestados

Resultado	Cantidad	%
Clara satisfacción	11	78,6
Más satisfecho que insatisfecho	3	21,4
No definida	0	-
Más insatisfecho que satisfecho	0	-
Clara insatisfacción	0	-
Contradictoria	0	-
Total	14	100

$$ISG = \frac{A + 0.5 * B - 0.5 * D - E}{N} \qquad (2.1)$$

Donde:

ISG: índice de satisfacción grupal

A: Total de encuestados con clara satisfacción

B: Total de encuestados Más satisfecho que insatisfecho

D: Total de encuestados Más insatisfecho que satisfecho

E: Clara insatisfacción

El índice grupal es un valor entre + 1 y - 1. Si el valor se encuentra entre - 1 y - 0,5 indica insatisfacción; entre - 0,49 y + 0,49 evidencia contradicción y si está entre 0,5 y 1 indica que existe satisfacción. Para este caso el Índice satisfacción grupal, ISG resultó de 0.89, lo cual significa satisfacción con la propuesta.

Se puede agregar que en los comentarios dados en la última pregunta abierta de la encuesta predominaron las opiniones favorables sobre el sistema de actividades, lo cual refuerza la satisfacción evidenciada en el índice de satisfacción grupal, no obstante, las opiniones desfavorables pueden ser un punto de partida para el mejoramiento de la propuesta. A continuación, se relacionan algunas de estas opiniones:

Favorables:

- Un tema pertinente y necesario

- El sistema de actividades constituye un excelente material de apoyo para los docentes
- El sistema de actividades es novedoso
- El sistema de actividades es pertinente, actualizado y aborda una realidad en la enseñanza de la Matemática en la educación preuniversitaria
- Es atinado el diseño de actividades donde se construye el concepto o se aplica en situaciones extramatemáticas
- Es factible de implementar sin afectar la organización del trabajo docente
- Interesante la forma didáctica y muy bien organizado estos contenidos
- La estructuración de las actividades como un sistema donde la organización jerárquica se corresponde con las etapas propuestas para el tratamiento de los conceptos y definiciones matemáticas me parece una vía didáctica para la enseñanza de los conceptos.

Desfavorables

- Se deben tener presente elementos como la motivación y/o los procesos afectivos que emergen durante el proceso de enseñanza aprendizaje en el diseño de las actividades
- Dosificar las actividades propuestas en el sistema atendiendo a la distribución del contenido de la unidad.
- Considero que cuando las condiciones tecnológicas en las escuelas lo permitan, la propuesta debe incorporar el uso de software dinámicos para la enseñanza de la matemática con el objetivo de mejorar la visualización.

Conclusiones Parciales del Capítulo

Los resultados del análisis realizado sobre la situación actual en el tratamiento de los conceptos en el preuniversitario Félix Valera Morales se detectaron deficiencias que apuntaron a la necesidad de buscar alternativas que contribuya a solventar tal situación, por lo que se estructuró un conjunto de actividades didácticas como un sistema teniendo en cuenta los fundamentos teóricos esbozados en el capítulo 1.

Los estudiantes sometidos al sistema de actividades obtienen resultados satisfactorios en su evaluación lo cual unido a la evaluación positiva de la propuesta por especialistas y usuarios demuestran la pertinencia y efectividad del mismo.

Conclusiones

Las tendencias teóricas asumidas desde el punto vistas sociológica, psicológica y pedagógica relacionada con el tratamiento de los conceptos en la Unidad Curvas de Segundo grado, permitieron sistematizar aspectos relevantes relacionados al proceder metodológico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la Educación Media Superior en la escuela cubana del siglo XXI.

Con la aplicación de los instrumentos de investigación se detectó que aunque se tiene en cuenta en las preparaciones metodológicas el tratamiento de los conceptos y los estudiantes tienen dominio de los contenidos precedentes necesarios en esta temática; existe insuficiente dominio por parte de los profesores de la metodología a emplear para el tratamiento de los conceptos lo que provoca que los estudiantes presenten dificultades en la comprensión y aplicación de los mismos.

Sobre la base de deficiencias detectadas, se realizó la estructuración del sistema de actividades didácticas para contribuir al tratamiento de los conceptos en la Unidad: Curvas de segundo grado en los estudiantes del IPU Félix Varela Morales con un objetivo determinado y actividades, que integra los contenidos que se imparten en la unidad y unidades precedentes.

Con la aplicación del sistema de actividades didácticas se pudo constatar un cambio en el proceder metodológico en el tratamiento de los conceptos en la Unidad: Curvas de Segundo Grado en cuanto a las vías para su obtención, así como un salto cualitativamente positivo en el aprendizaje de los estudiantes en ese contenido.

Recomendaciones

Con la realización de la investigación se propone que:

Se implementen estas actividades con la utilización de otros medios de enseñanza, así como con el software Geogebra, para el desarrollo de la visualización en el tratamiento de los conceptos en la unidad: Curvas de segundo grado.

Se analice en el consejo de dirección del preuniversitario el resultado de la investigación y valore la introducción y generalización de la propuesta para elevar la preparación de los profesores y estudiantes en el tratamiento de los conceptos en la unidad: Curvas de segundo grado.

Se desarrollen preparaciones metodológicas teniendo en cuenta el resultado de la investigación a fin de perfeccionar el trabajo metodológico de los profesores para la elevación del conocimiento en el tratamiento de los conceptos en la unidad: Curvas de segundo grado.

Bibliografía

Addine, F. (Compiladora). (2004). Didáctica: teoría y práctica. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Alegría, P. (2014). Las cónicas y sus aplicaciones. (pedro.alegria@ehu.es).

Álvarez, M. Almeida, B. y Villegas, E. (2014) El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos. La Habana: Edit. Pueblo y Educación.

Angulo, M. L., Arteaga, E., y Carmenates, O. A. (2020). La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Conrado*, *16*(74), 298-305.

Angulo, M. L. y Arteaga, E. (2018). Las representaciones mentales en la aprehensión de conceptos matemáticos: formación del concepto de fracción. *Conrado*, *14*(63), 147-154.

Aragón, J. A., y Quintero, C. A. (2017). Propuesta de enseñanza de las secciones cónicas usando diversas tecnologías para su desarrollo. Tesis de Grado. Universidad Distrital Francisco José De Caldas.

Arroyo, M.B. y Yanés, M.A. (2020). Propuesta de herramientas TIC para facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Polo del Conocimiento* (Edición núm. 53) Vol. 5, No 12, pp. 574-589.

Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I., Arango, C., García, M et al. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo I.* La Habana: Pueblo y Educación.

Ballester, S. et al. (2001). Metodología de la Enseñanza de la Matemática (Tomo I). La Habana: Editorial Pueblo y Educación. (Primera reimpresión).

Ballester, S. et al. (2002). Metodología de la Enseñanza de la Matemática (Tomo II). La Habana: Editorial Pueblo y Educación. (Primera reimpresión).

Ballester, S., García , J.E., Almeida , B., Álvarez , M.M., Rodríguez , M., González , R.A., Villegas , E., Fonseca , A.L., Púig N. (2015). *Didáctica de la matemática Tomo I*. La Habana: Pueblo y Educación.

Beltrán, J. C. (2019). Propuesta de actividades para la enseñanza de las cónicas desde el diseño de una Ingeniería Didáctica. Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Benítez, J. A. H., Doallo, M. E., Santiesteban, J. L. S., y Segura, C. N. (2005). La visualización: un recurso didáctico para la enseñanza de la matemática. *LUZ*, *4*(Esp E. Fís), 7-7.

Briseño, C. y Guzmán, J. (2016). Visualización y análisis de representaciones geométricas. Geometry and Measurement. The University of Arizona.

Bueno Hernández, R., Naveira Carreño, W., & González Hernández, W. (2020). Los conceptos matemáticos y sus definiciones para la formación de los ingenieros informáticos para la sociedad. Revista Universidad y Sociedad, 12(4), 147-155.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Funciones: visualización y pensamiento matemático. México: Prentice Hall & Pearson Educación.

Castillo, J.J. Rodríguez, F. Naredo, R. Cuadrado, Z. y Cardenás, R.A. (2018). Orientaciones Metodológicas Matemática Onceno grado. La Habana: Mined.

Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina, M., Silverio, M. (2001). Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador. La Habana: Centro de Estudios Educacionales del ISP "Enrique José Varona".

Cornell, I. (2019). Actividades didácticas que propician la transferencia de conocimientos para su aplicación en la práctica cotidiana. *Revista Conrado*, *15*(70), 361-369.

Curbeira, D., Bravo, M.L., Bravo, G. (2013). El tratamiento de conceptos matemáticos, su repercusión en el proceso de formación profesional inicial. *Universidad y Sociedad*, *5*(1).

Chevallard, Y; Bosch, M; Gascón, J (1997) Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Barcelona, Editorial Horsori.335.

Del Río Lugo, N. (2006). *"Bordando sobre la zona de desarrollo próximo".* [En línea]. Disponible en: http://educacion.jalisco.gob.mx/ consulta/educar/09/9riolugo.html.

Diaz, L., Rodríguez, J., y Lingán, S. K. (2018). Enseñanza de la geometría con el software GeoGebra en estudiantes secundarios de una institución educativa en Lima. *Propósitos y Representaciones*, *6*(2), 217-234.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the

Psychology of Mathematics Education (pp. 2-26). Cuernavaca: The International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Duval, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (ed.), *Representations and Mathematics Visualization*, (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

Falcón, A. L. (2021). Los tipos de resultados de investigación en las ciencias de la educación. *Revista Conrado*, *17*(S3), 53-61.

Fernández de Castro, A., y López, A. (2014). Validación mediante criterio de usuarios del sistema de indicadores para prever, diseñar y medir el impacto en los proyectos de investigación del sector agropecuario. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*, *23*(3), 77-82.

Font, J. C. (2002). El proceso enseñanza-aprendizaje: la computación y los conceptos. *LUZ*, *1*(Especial), 5-5.

Fuentes, I.G., Toledano Y. y Capote, A. (2018). Valoración del producto científico por criterios de usuarios: necesidad apremiante para su perfeccionamiento. *EDUMECENTRO*, *10*(3), 249-253.

Gamboa, J. L. (1996). Condiciones necesarias para la construcción de conceptos matemáticos. Recuperado de http://macareo.pucp.edu.pe/~jhenost/articulos/conmat.htm

Gatica, S.N. y Ares, O.E. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. Revista de Educación Mediática y TIC, edmetic, 1 (2), 2012, E-ISSN: 2254-0059; pp.88-107

Godino, J.D, Batanero, C., Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En Godino,J.D (Ed.), Didáctica de las matemáticas para maestros (pp.5-154). Universidad de Granada.

González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en Humanidades*, 6(11), 37-80.

González, N., Garcés, W. & Romay, L. (2021). La visualización en la enseñanza de la matemática. Su empleo mediante el uso del GeoGebra. *Revista Didasc@ lia: Didáctica y Educación*, *12*(4).

González, S. Bolzicco, V. (2019). La Visualización en Geometría Analítica como estrategia de aprendizaje. Recuperado de http://jornadasceyn.fahce.unlp.edu.ar.

Grisales, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, *14*(2), 198-214.

Hassen, M. B., Turki, M., y Gargouri, F. (2016). Choosing a Sensitive Business Process Modeling Formalism for Knowledge Identification. Procedia Computer Science, 100, 1002-1015. doi: https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.09.272. 1877- 0509.

Jorge, M. (2012). Curso Básico de Matemática para los estudiantes de Ciencias Técnicas en la Universidad de Matanzas. Tesis de maestría Universidad de Matanzas, Cuba.

Marmolejo, G. A., Prada, R., y Insuasty, E. (2020). La visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales en el estudio de las matemáticas. Una revisión bibliográfica descriptiva entre 1981 y 2016. *Revista ESPACIOS. ISSN*, *798*, 1015.

MINED. (2012). Programa de Matemática: undécimo grado. La Habana: Edit. Pueblo y Educación.

Muñoz, A. (2015). Curvas cónicas desde su origen hasta sus aplicaciones en la actualidad.

Murillo, N. (2020). Objeto de aprendizaje para la enseñanza de las secciones cónicas incorporando los conceptos matemáticos, la teoría de representaciones y las aplicaciones. Tesis en opción al título académico de Master en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales Manizales, Colombia.

Peña, J. A., Zipa, C. J., y Delgado, O. S. (2020). Estudio de las cónicas en algunas métricas: propuesta para el desarrollo del pensamiento espacial. *Boletín Redipe*, *9*(11), 110-129.

Pérez, Y. (2018). Análisis histórico epistemológico didáctico sobre las secciones cónicas. *ARJÉ. Revista de Postgrado FACE-UC, 12*(22).

Petersson, M. y Rivero, O. (2021). Los valores socioculturales de la matemática. Un análisis preliminar de su percepción en estudiantes de ingeniería industrial. Manuscrito no publicado.

Phillips, L. M., Norris, S. P., y Macnab, J. S. (2010). Visualization in mathematics, reading and science education. New York: Springer.

Prada, R., Gamboa, A. A., y Avendaño, W. R. (2020). Caracterización del dominio afectivo hacia las matemáticas en estudiantes que ingresan a la educación superior. *Revista Espacios.* Vol. 41 (23), 360 – 372.

Rodríguez, F. Quintana, A. Naredo, R. & Cuadrado, Z. (2018). Programa Provincial de Matemática Onceno grado. La Habana: Mined.

Sánchez, E. (2015). Algunas dificultades de aprendizaje presentes en el estudio de la parábola en un grupo de estudiantes de grado once del Colegio María Cano JT. *Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM*, *2*, 290-296.

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El Modelo de Van Hiele y la enseñanza de la Geom etría. *Uniciencia* Vol. 27, No. 1, [74-94]. Enero – junio 2013. ISSN 1101 – 0275.

Valbuena, S., Gutiérrez, T.Y., y Berrio, J. D. (2021). Intervención didáctica tecnológica para el estudio de las secciones cónicas basada en el potencial semiótico. *Formación universitaria*, *14*(1), 181-194.

Vygotsky, L. (1995). Pensamiento y lenguaje. Buenos Aires:Ediciones Fausto.

Villarraga, B. A., Rojas, O. J., & Sigarreta, J. M. (2020). Metodología para la formación de conceptos asociados con las funciones de variable compleja. *Revista Espacios*, *41*(06).

Zilmer, W. (1981) *Metodología de la enseñanza de la Matemática I*. Tres partes. Ciudad de la Habana. Edit. Pueblo y Educación.

Anexos

Anexo 1

Guía para la observación de clase

Objetivo: Constatar en el proceso de enseñanza aprendizaje el tratamiento de los conceptos y sus definiciones en la unidad: Curvas de Segundo grado.

Indicadores:

● Cumplimiento de los objetivos de la clase.

● Sistema de conocimientos y habilidades que se desarrollan en la clase.

● Métodos y procedimientos empleados.

● Medios de enseñanza utilizados en la clase

● Evaluaciones realizadas en la clase

ASPECTOS A OBSERVAR EN LAS CLASES.

1-Se establecen relaciones entre la definición a tratar y conocimientos precedentes de grados o unidades anteriores.

Si__ No__ en ocasiones__

2- Se define el concepto utilizando las vías que plantea la didáctica d de la Matemática (inductiva o deductiva).

Si__ No__ en ocasiones__

3-Se muestran representantes y no representantes del concepto definido.

Si__ No__ en ocasiones__

4-Se utiliza algún medio de enseñanza.

Si__ No__ en ocasiones__

5- Los estudiantes son capaces de definir el concepto.

Independiente __ con ayuda del profesor __

no definen el concepto __

Anexo 2

Guía de entrevista coordinador general del área de Ciencias Exactas.

I. Parte inicial.

Objetivo: Constatar el proceder metodológico en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos y sus definiciones.

Año de graduación: ______ Años de experiencia en educación: ____ En el cargo: ___

Veces que trabaja el onceno grado: ______

Consigna: Profesor, realizamos una investigación acerca del tratamiento de los conceptos y sus definiciones, en particular en la unidad: Curvas de segundo grado, agradecemos su colaboración aportando su experiencia y los criterios de la práctica profesional. Seguro que serán de gran utilidad.

Muchas gracias.

II. Parte principal.

1) Enumere las actividades realizadas en el departamento para potenciar el tratamiento de los conceptos y sus definiciones en la unidad: Curvas de segundo grado”
2) Exprese cómo se trabaja en la asignatura Matemática para potenciar el desarrollo del tratamiento de los conceptos y sus definiciones en la unidad.
3) Sugerencias o recomendaciones para contribuir al desarrollo del tratamiento de los conceptos y sus definiciones en la unidad.

Anexo 3

Guía de entrevista para los profesores de Matemática onceno grado.

I. Parte inicial.

Objetivo: Constatar el proceder metodológico en la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la comprensión de conceptos y definiciones de las secciones cónicas.

Año de graduación: ______ Años de experiencia en educación: ____

Veces que trabaja el onceno grado: ______

Consigna: Profesor, realizamos una investigación acerca de los conceptos y definiciones que se trabaja en la unidad de las secciones cónicas, en particular sobre el proceso de comprensión, agradecemos su colaboración aportando su experiencia y los criterios de la práctica profesional. Seguro que serán de gran utilidad.

Muchas gracias.

II. Parte principal.

1) ¿Cuáles son los principales logros y barreras de los estudiantes en el proceso de comprensión de los conceptos de las secciones cónicas?

2) Exprese las vías o procedimientos empleados en las clases para contribuir al desarrollo de la comprensión de los conceptos de las secciones cónicas.
3) ¿Sus estudiantes manifiestan dominio del procedimiento para comprender los conceptos? ¿Cómo procede para resolver las barreras de los estudiantes?
4) Otros criterios que puedan ayudar al trabajo de la comprensión de los conceptos de las secciones cónicas.

Anexo 4. Sistema de actividades didácticas

Secciones Cónicas

Actividad # 1

Título: Conociendo las secciones cónicas.

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo: Explicar de la observación de un vídeo las diferentes formas que tienen las secciones de un cono (secciones cónicas) al interceptarlo por un plano, si se varía la posición del plano con respecto a la base del cono.

Ejercicio

Visualizar un video donde observen como se obtienen las secciones cónicas a parir de los cortes que se le realizan a un cono con un plano. Y comenzar el estudio de las mismas.

Guía para la observación del video

1- Explica por qué se denominan secciones cónicas
2- ¿Qué nombre reciben cada una de las secciones cónicas?
3- Esboce en cada caso, la curva que se genera al seccionar el cono con el plano.
4- Establezca semejanzas y diferencias entre ellas.
5- Has pensado al picar un melón en rodajas, pueden darse cortes diferentes formas. Explique cómo hacer los cortes para asociarlos a estas secciones cónicas.
6- Ya algunas de esas curvas han sido estudiadas en grados anteriores. ¿Cuáles de ellas conoces?, ¿Qué aprendiste sobre ellas?
7- Con los recursos tecnológicos que disponen y la información que les ofrece el libro de texto, investiguen sobre el surgimiento de las secciones cónicas y quienes son los matemáticos y físicos que se destacan.

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la primera etapa del tratamiento de los conceptos matemáticos de las cuatro secciones cónicas estudiadas en la enseñanza preuniversitaria, en esta con la observación del video el profesor debe guiar al estudiante sobre lo que va a estudiar a lo lago de la unidad y motivarlo para el estudio de la misma. Para la realización de la actividad se formarán equipos en el aula para el posterior debate de la guía

Circunferencia

Actividad # 1.1

Título: La circunferencia en la transmisión radial comunitaria.

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivos:

- Representar circunferencias como lugares geométricos de forma gráfica y analítica empleando conceptos y propiedades de sus elementos fundamentales, cuidando la exactitud de las medidas, el orden de los pasos a realizar y la limpieza en la presentación de la solución.
- Resolver situaciones de la vida práctica que instan la interpretación de modelos geométricos aplicando conocimientos sobre circunferencia como lugar geométrico y sus elementos, evidenciándose el valor del conocimiento matemático en la práctica social.

Ejercicios

1- Represente gráficamente las circunferencias que cumplen las características siguientes

a) O (3;8), r = 4

b) Centro O (– 4; –1) y que pasa por el punto P (1;2).

c) Los extremos del diámetro son los puntos P (6; –2) y Q (–2;4).

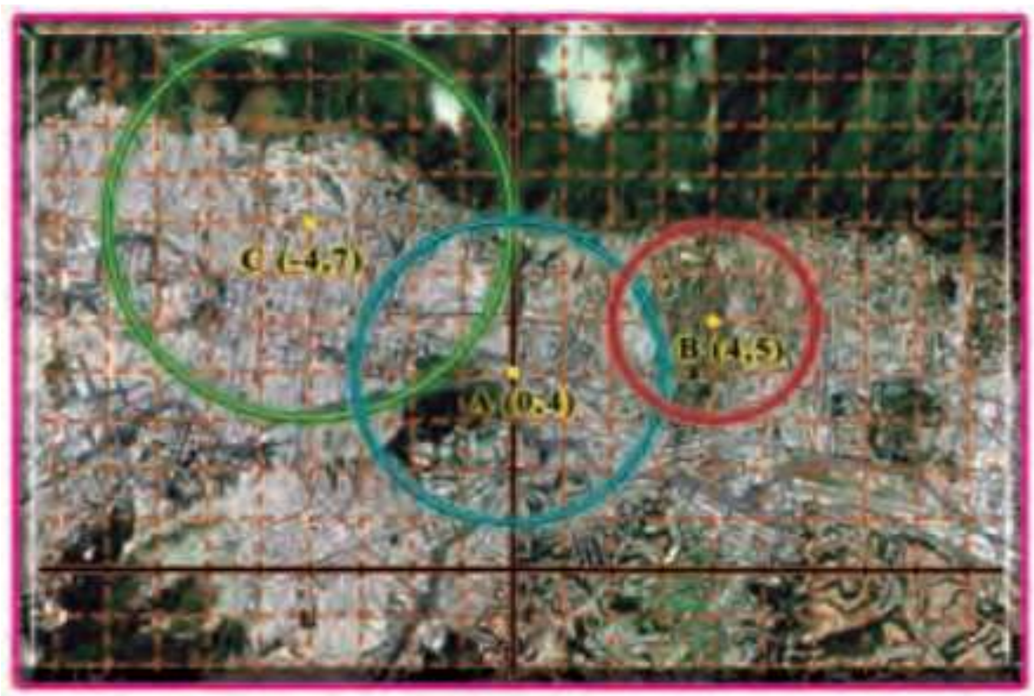
1.1- Precise para la circunferencia del inciso b, a qué distancia del punto O debe estar situada una recta r_1 para que sea secante a la circunferencia; r_2 para que sea tangente a la circunferencia y r_3 para que sea exterior a la circunferencia.

2- En el gráfico los puntos A, B y C representan los lugares desde donde trasmiten tres radios comunitarias; si sus coordenadas en el plano cartesiano son las que muestra el gráfico y si las líneas verticales y horizontales contiguas tienen una separación de una unidad.

a) calculen el alcance máximo de cada emisora radial.

b) ¿Qué sucede cuando las señales de dos emisoras que están en la misma frecuencia se cruzan? (Ejercicio tomado de la colección de libros del Bicentenario, tomo 5, página 211.)

c) ¿Qué distancia hay entre las emisoras de radio A, B, C, ¿respectivamente?



Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la primera fase a desarrollar en el tratamiento de los conceptos y sus definiciones: consideraciones y ejercicios preparatorios donde se le recuerda la circunferencia que ya se viene estudiando desde la educación primaria para pasar a definirla posteriormente como sección cónica. Aquí se vincula la matemática con la vida práctica y con la Física.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades. Además de recordar que conocemos de la circunferencia (elementos).

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución del ejercicio 1 necesitamos instrumentos de medidas como regla o cartabón y compás, se orientará realizar de estudio independiente este ejercicio, pero en este caso con la utilización del software Geogebra.

Para la realización del ejercicio dos se aclara que en este caso se pueden determinar las distancias contando los cuadraditos que representan una unidad pero que también pueden determinarse por las fórmulas estudiadas en la unidad anterior de geometría analítica y que serán de utilidad para resolver diferentes ejercicios a lo largo de esta unidad.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 1.2

Título: Definiendo a la circunferencia.

Vía de cumplimiento: Docente.

Objetivo: Definir la circunferencia como lugar geométrico a partir de sus características esenciales y representación gráfica para potenciar el desarrollo de la visualización en los estudiantes.

Ejercicio:

1- Sea la circunferencia de centro O (h; k) y de radio r:

a) ¿Qué características cumple la distancia del centro a cada punto de la circunferencia?

b) ¿Cómo podemos definir cualquier circunferencia?

Representa tres circunferencias con distintos radios y centros.

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la segunda fase a desarrollar en el tratamiento de los conceptos y sus definiciones: formación del concepto comprende la creación de las condiciones previas necesarias, la motivación y la orientación hacia el objetivo, y pasa por la separación de las características comunes y no comunes, hasta llegar a la definición o explicación del concepto, esta fase está estrechamente vinculada con el propósito de capacitar a los alumnos para definir.

Esta actividad se desarrollará durante el transcurso de la clase donde los estudiantes serán organizados por equipos.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos instrumentos de medidas como regla o cartabón y compás, se orientará realizar de estudio independiente las representaciones gráficas de las circunferencias en el software Geogebra.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 1.3

Título: Otra forma de representar la circunferencia.

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Deducir la ecuación para la circunferencia a partir de las coordenadas de los elementos que la determinan, el centro O (h; k); un punto cualquiera P(x; y) y el radio d(O, P) = r, sustituyendo conceptos por su definición, utilizando reglas de inferencias válidas con el uso de la simbología matemática requerida potenciando el trabajo con los conceptos matemáticos en sus distintas representaciones.

Ejercicio

1- Sea una circunferencia de centro O y diámetro AB=10cm. Escriba verdadero (V) o falso(F) según corresponda. Fundamenta en cada caso.

a- ___ d(OA)=d(OB)

b- ___Si C es un punto de dicha circunferencia entonces d(OC)=10cm

c- ___d(OA)<d(OB)

d- ___Si C es un punto de dicha circunferencia entonces d(OC)=5cm

2- Sea $\mathrm{P}\ (1;\ 6)$ un punto de la circunferencia de centro $\mathrm{O}\ (1;\ 3)$.

a- ¿Qué valor posee la distancia desde el centro de la circunferencia hacia cualquier punto de ella?

b- ¿Qué ecuación podríamos plantear de forma general para obtener el radio de cualquier circunferencia si$\mathrm{P}(x;y), \mathrm{O}(h;k)$ y $d(\mathrm{O};\mathrm{P}) = r$?

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la fase de asimilación o fijación del concepto

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos y para la solución de la siguiente actividad se destacarán dos momentos importantes que se muestra en la siguiente tabla:

Actividad del profesor	Actividad del estudiante
¿Qué nos piden? ¿Qué nos dan? ¿Qué relaciones se pueden establecer? ¿Cómo definimos circunferencia? ¿Qué características esenciales se destacan en la definición? ¿Qué nombre recibe la distancia que se pide? ¿Cómo determinar su valor dado sus puntos extremos? ¿Conocemos alguna fórmula qué nos permita determinar la distancia entre dos puntos? ¿Cuál? ¿Cómo planear una ecuación general si: $P(x;y), O(h;k)$ y $d(O;P) = r$?	Nos piden: Determinar el valor de la distancia del centro de la circunferencia hacia cualquier punto de ella b- La ecuación para plantear la forma general para obtener el radio de cualquier circunferencia. Nos dan: Un punto $P(1;6)$ que pertenece a la circunferencia y el centro $O(1;3)$. $P(x;y), O(h;k)$ y $d(O;P) = r$ Es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano cuya distancia a un punto O llamado centro es constante. La distancia de un punto fijo O a los puntos de la circunferencia es constante. La distancia pedida recibe el nombre de radio. El valor del radio se determina hallando la distancia desde el centro de la circunferencia hacia cualquier punto de ella. Se conoce la fórmula estudiada en la unidad anterior de geometría analítica

	para determinar la distancia entre dos puntos. Sean O$(x_1;y_1)$y P$(x_2;y_2)$ la distancia entre O y P se determina: $d(O;P)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ Luego para una circunferencia cualquiera Sustituimos: $\mathrm{P(x;y), O(h;k)\ y\ d(O;P)=r}$ $r=\sqrt{(\mathrm{x}-h)^2+(y-k)^2}$ $r^2=(\mathrm{x}-h)^2+(y-k)^2$

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 1.4

Título: ¡Busco una circunferencia!

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo: Obtener la ecuación de la circunferencia dado su centro y radio o dados los extremos del diámetro a partir de sustituir en la ecuación cartesiana o por el completamiento cuadrático para el desarrollo de habilidades en el trabajo algebraico.

Ejercicio: (Ejemplo 1, 2, y 3 pagina 116-117 L/t onceno grado)

1- Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene como ceno O y radio r.

a) O (4; -5) ; r = $\sqrt{3}$

b) O (0;0) ; r = 4

2- Las siguientes ecuaciones representan circunferencias. Determina su centro y radio.

a) $(x+4)^2+(y-2)^2=8$

b) $x^2+y^2+10x-8y+9=0$

3- Los puntos A (-1; 3) y B (5; 1) son los extremos de un diámetro de una circunferencia, escribe la ecuación de la misma.

Orientación didáctica: Esta actividad posibilita la asimilación y fijación del concepto de la circunferencia dado mediante su ecuación, en estas clases se pueden orientar los ejercicios que aparecen en el libro de texto de onceno grado en el Capítulo 3 epígrafe 1 página 120.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos conocer la ecuación cartesiana de la circunferencia con centro (h;k) y recordar el completamiento cuadrático para transformar la ecuación de segundo grado a la forma de la ecuación cartesiana.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 1.5

Título: ¡Rectas y circunferencias!

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo:

- Obtener la ecuación cartesiana de la circunferencia, dado su ecuación general aplicando el completamiento cuadrático para el desarrollo de habilidades algebraicas en los estudiantes.
- Caracterizar las relaciones de posición entre una circunferencia y una recta mediante el análisis de la distancia del centro de la circunferencia a la recta potenciando el trabajo con los conceptos matemáticos.

Ejercicio:

1- Ejercicio 5 pagina 121 Capítulo 3 epígrafe 1 L//t onceno grado.

2- Ejercicio 6 pagina 121 Capítulo 3 epígrafe 1 L//t onceno grado

3- Dada la circunferencia $x^2+ y^2 - 2y - 8 = 0$, determina los puntos de intersección y la relación de posición con las rectas:

a) $x - y - 2 = 0$

b) $3x - y - 15 = 0$

c) $x = 3$

Orientaciones didácticas: En esta actividad se vincula el concepto de circunferencia como lugar geométrico con recta tangente, secante y exterior a una circunferencia. En este caso se aplica el concepto en relación con otros conocidos.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos utilizar el completamiento cuadrático para escribir la ecuación cartesiana de la circunferencia y para el ejercicio tres es necesario analizar la relación entre las distancias del centro de la circunferencia a la recta utilizando las fórmulas de geometría analítica estudiadas en la unidad anterior para determinar si la recta exterior, tangente o secante a la circunferencia.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Elipse

Actividad # 2.1

Título: Una definición para la elipse.

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo: Definir la elipse como lugar geométrico mediante el procedimiento utilizado con la circunferencia para el establecimiento de nexos entre la forma de trabajo y pensamiento en la matemática**.**

Ejercicio:

3- De la visualización del video sobre las secciones cónicas, ¿qué sección cónica obtenemos cuando:

d) el plano que corta al cono paralelo a su base.

e) el plano que corta al cono es paralelo a su generatriz.

f) el plano no es paralelo a la base, sino que solo está un poco inclinado.

4- Estableciendo analogías con la circunferencia elabore una definición para la curva que describe a la figura geométrica conocida como óvalo.

Orientación didáctica: Este ejercicio se encuentra en la segunda fase para el tratamiento de los conceptos y sus definiciones y en este caso para elaborar una definición de elipse se utiliza un principio heurístico, la analogía con la circunferencia, basado en el método del jardinero que se le puede decir en la clase que el método utilizado recibe este nombre. Es de gran importancia destacar como no solo en este ejercicio sino en todos los que se proponen en el sistema están presentes las formas de trabajo y pensamiento de la Matemática destacando la búsqueda de relaciones y dependencias.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos y para la solución de la siguiente actividad se destacarán dos momentos importantes que se muestra en la siguiente tabla:

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 2.2

Título: Identificando la elipse

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Identificar la elipse como lugar geométrico a partir de un conjunto de puntos del plano que cumplen determinada propiedad para su aplicación en situaciones intra y extramatemáticas.

Ejercicio

3- Sean A y B dos puntos fijos del plano y F el lugar geométrico de los puntos M del mismo plano. A partir de las relaciones que se dan a continuación, que representan lugares geométricos, cuál corresponde a una elipse:

d- ___ $\mathrm{MA} - \mathrm{MB} = 15 \text{ y } \mathrm{AB} = 10$

e- ___ $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = 15\mathrm{cm} \text{ y } \mathrm{AB} = 10\mathrm{cm}$

f- ___ $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = 5\mathrm{cm} \text{ y } \mathrm{AB} = 15$

Actividad del profesor	Actividad del estudiante
¿Qué nos dan? ¿Qué nos piden? ¿Para trazar una circunferencia sin la utilización del compás como procedíamos? ¿Cuántos puntos tomamos? ¿Será suficiente tomar un punto para trazar la curva que describe a la figura geométrica conocida como óvalo? Variemos la condición de la cantidad de puntos a tomar a ver si obtenemos el lugar geométrico deseado. ¿Cuántos puntos seleccionar? Acaso dos, tres o cinco. ¿Cuál sería más sencillo? ¿Cómo procederíamos entonces, pensando en lo que hicimos con la circunferencia? ¿Qué características debe poseer la distancia del hilo a tomar? ¿Por qué? Para elaborar la definición destaquemos las características esenciales que tuvimos en cuenta al trazarla. ¿Cuántos puntos utilizamos? ¿Cómo es la distancia del hilo? ¿Qué relación existe entre las distancias de los puntos de la elipse a cada uno de los puntos fijos?	La definición de circunferencia. Elaborar una definición para la curva que describe a la figura geométrica conocida como óvalo. Si no tenemos un compás para trazar la circunferencia, se marca un punto del plano y se toma la distancia deseada con un hilo, se estira el hilo fijando el lápiz en el otro extremo y se marcan los puntos que forman la circunferencia. Para trazar la circunferencia hemos tomado solo un punto fijo. Si tomamos solamente un punto estaríamos trazando circunferencias, por lo que sería conveniente probar con dos puntos, pues es el caso más sencillo. Se marcan dos puntos en el plano y se toma un hilo cuya distancia sea mayor que la distancia entre los puntos, pues se fijan los dos extremos del hilo a dichos puntos y se traza la curva. Se tomaron dos puntos fijos y una distancia mayor que la distancia entre los puntos. La suma de las distancias de cada uno de los puntos de la curva obtenida a los puntos fijos es igual a la longitud del hilo. El lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano, es una constante mayor que la distancia entre los puntos.

¿Cómo quedaría la definición?	

4- Conocidos los elementos de la elipse, eje mayor ($\overline{A_1A_2}$ = 2a), eje menor ($\overline{B_1B_2}$ = 2b), distancia focal ($\overline{F_1F_2}$ = 2c), triángulo característico ($a^2 = b^2 + c^2$), excentricidad ($e = \frac{c}{a}$) y P(x;y) un punto cualquiera de la elipse, clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas.

e) ____ $\overline{PF_!} + \overline{PF_2} = 2a$

f) ____ Al calcula la excentricidad de la elipse, la razón $\frac{c}{a}$ es mayor que 1.

g) ____ Cuando la excentricidad es igual a cero la elipse se convierte en una circunferencia.

h) ____ La distancia de un foco de la elipse al centro de esta es la distancia focal igual a 2c.

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la tercera fase del tratamiento de los conceptos para su solución se tienen en cuenta los siguientes momentos según el programa heurístico general para el tratamiento de los conceptos:

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos analiza el contenido y la extensión del concepto del concepto de elipse, los elementos de la elipse y las relaciones entre ellos para lograr identificar la proposición correcta.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 2.3

Título: Otra forma de representar la elipse

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Deducir la ecuación cartesiana de la elipse a partir de su definición y elementos sustituyendo conceptos por su definición, utilizando reglas de inferencias válidas con el uso de la simbología matemática requerida potenciando el trabajo con los conceptos matemáticos en sus distintas representaciones.

Actividad del profesor	Actividad del estudiante
¿Qué nos dan?	La definición de circunferencia.
¿Qué nos piden?	Elaborar una definición para la curva que describe a la figura geométrica conocida como óvalo.
¿Para trazar una circunferencia sin la utilización del compás como procedíamos? ¿Cuántos puntos tomamos?	Si no tenemos un compás para trazar la circunferencia, se marca un punto del plano y se toma la distancia deseada con un hilo, se estira el hilo fijando el lápiz en el otro extremo y se marcan los puntos que forman la circunferencia. Para trazar la circunferencia hemos tomado solo un punto fijo.
¿Será suficiente tomar un punto para trazar la curva que describe a la figura geométrica conocida como óvalo? Variemos la condición de la cantidad de puntos a tomar a ver si obtenemos el lugar geométrico deseado. ¿Cuántos puntos seleccionar? Acaso dos, tres o cinco. ¿Cuál sería más sencillo?	Si tomamos solamente un punto estaríamos trazando circunferencias, por lo que sería conveniente probar con dos puntos, pues es el caso más sencillo.
¿Cómo procederíamos entonces, pensando en lo que hicimos con la circunferencia? ¿Qué características debe poseer la distancia del hilo a tomar? ¿Por qué?	Se marcan dos puntos en el plano y se toma un hilo cuya distancia sea mayor que la distancia entre los puntos, pues se fijan los dos extremos del hilo a dichos puntos y se traza la curva.
Para elaborar la definición destaquemos las características esenciales que tuvimos en cuenta al trazarla. ¿Cuántos puntos utilizamos? ¿Cómo es la distancia del hilo? ¿Qué relación existe entre las distancias de los puntos de la elipse a cada uno de los puntos fijos?	Se tomaron dos puntos fijos y una distancia mayor que la distancia entre los puntos. La suma de las distancias de cada uno de los puntos de la curva obtenida a los puntos fijos es igual a la longitud del hilo. El lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano, es una constante mayor que la distancia entre los puntos.

¿Cómo quedaría la definición?	

Ejercicio:

2- Sea la elipse que tiene focos $F_1(c;0)$ y $F_2(-c;0)$ y un punto P de coordenadas $P(x;y)$, obtén una ecuación para la elipse en función de sus ejes, a partir de su definición conociendo que la constante mencionada en la definición es la longitud del eje mayor (2a).

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la tercera fase del tratamiento de los conceptos: asimilación y fijación del concepto, a partir del análisis de la definición, su representación gráfica y los elementos de la elipse se llega a la ecuación que define a la elipse como lugar geométrico y a partir de esta se introduce las demás ecuaciones, cuando el eje mayo es paralelo al eje "x" o cuando es paralelo al eje "y" y so centro es un punto O(h;k).

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Actividad del profesor	Actividad del estudiante
¿Qué nos piden? ¿Qué nos dan? ¿Cómo podemos expresar en símbolos la definición? Si la constante mayor que la distancia entre sus focos es igual a 2a ¿cómo se podría	Nos piden: • Determinar una ecuación para la elipse en función de sus ejes: Eje mayor ($\overline{A_1A_2}$ = 2a), semieje mayor ($\overline{AO}$ = a). Eje menor ($\overline{B_1B_2}$ = 2b), semieje menor ($\overline{BO}$ = b) • Las coordenadas de los focos F_1 $(c;0)$ y $F_2(-c;0)$ y del punto $P(x;y)$ que pertenece a la elipse. Además, que la constante que se menciona en la definición es igual a 2a.

expresar la ecuación? ¿Qué ecuación utilizamos para determinar la distancia entre dos puntos? Con los datos que nos ofrece el ejercicio sustitúyelo en la ecuación y calcula apoyándote de la demostración que ofrece el libro de texto de onceno grado en las páginas 135 y 136.	• $d(F_1;P)+d(F_2;P)>d(F_1;F_2)$ • $d(F_1;P)+d(F_2;P)=2a$ • $d(F;P)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ $\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+y^2}+\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}=2a$ $\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+y^2}=2a-\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}$ $\left(\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}\right)^2$ $(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}+(\mathrm{x}-c)^2+y^2$ Se eliminan las y^2 en ambos miembros y se resuelve el binomio al cuadrado quedando: $x^2+2xc+c^2=4a^2-4a\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2$ Se eliminan en ambos miembros x^2 y c^2 y se aísla el radical: $4a\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$ dividiendo entre 4 la ecuación $\left(a\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}\right)^2=(a^2-cx)^2$ $a^2[(x-c)^2+y^2]=a^4-2a^2cx+c^2x^2$ $a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$ Se eliminan en ambos miembros $-2a^2xc$ $a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$ Agrupamos las x^2, las y^2 y lo demás lo pasamos para el otro miembro: $a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$ $x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ Como ya conocemos el triángulo característico ($a^2=b^2+c^2$), si despejamos b^2 quedaría ($b^2=a^2-c^2$) sustituyendo: $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$ dividiendo por a^2b^2 la ecuación obtenemos: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 2.4

Título: ¡Busco una elipse!

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo:

- Obtener la ecuación de la elipse dado sus elementos o representación gráfica a partir de sustituir en la ecuación cartesiana o por el completamiento cuadrático para el desarrollo de habilidades en el trabajo algebraico.
- Representar gráficamente la elipse dado su ecuación o elementos con la utilización de instrumentos de trazado para el desarrollo de la visualización en los estudiantes.

Ejercicio:

5- Escribe la ecuación de la elipse que tiene como centro en el origen de coordenada y eje mayor paralelo al eje "x" y cumple: (Ejemplo 1 página 137 libro de texto onceno grado)

c) a=3; b=2

d) 2a=8; c=3

6- Escribe la ecuación de la elipse que tiene como centro O y cumple: (Ejemplo 2 página 138 libro de texto onceno grado)

c) O (3; -4), a=5, b=3

d) O (-2; 0), 2b=10, $F_2\,(2;0)$

7- Representa en un sistema de coordenadas la elipse: (Ejemplo 3 pagina 139 y 140 libro de texto onceno grado)

c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

d) $9x^2+16y^2+18x-64y-71=0$

8- Ejercicios del 1 al 13 de la página 143 a la 145 libro de texto de onceno grado.

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la tercera fase del tratamiento de los conceptos y sus definiciones: asimilación y fijación del concepto. Las tres primeras actividades son los tres primeros ejemplos resueltos que plantea el libro de texto y que le sirven para la solución de los ejercicios que se proponen para ellos resuelvan.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos instrumentos de medidas como regla o cartabón, se orientará realizar de estudio independiente las representaciones gráficas de las circunferencias en el software Geogebra.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 2.5

Título: La elipse y otras curvas.

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Caracterizar las relaciones de posición de la elipse con otras curvas mediante el análisis de sus puntos de intersección para potencia tanto el desarrollo del trabajo algebraico y geométrico.

Ejercicio:

3- Halla los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ y las curvas: (Ejemplo 5 página 141 libro de texto onceno grado)

c) $3x-5y+15=0$

d) $x^2+y^2=16$

4- Ejercicio 14 página 146 libro de texto onceno grado

Orientación didáctica: En esta actividad se determinan las relaciones de posición entre la elipse y otras curvas como la circunferencia y la recta por lo tanto contribuye no solo a la asimilación y fijación sino también al de las otras secciones cónicas estudiadas.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos utilizar el completamiento cuadrático para escribir la ecuación cartesiana de la elipse y además se establecen sistemas de ecuaciones para determinar los puntos de intersección entre estos.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 2.6

Título: Aplicaciones de la elipse

Objetivo: Obtener la ecuación y elementos de la elipse mediante el análisis de situaciones práctica para establecer nexos entre la Matemática con otras ciencias y con la vida.

Ejercicio:

2- La tierra tiene una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de sus focos. Sabiendo que el semieje mayor de esa elipse mide $1{,}485 \cdot 10^8$ Km y que la excentricidad es $\frac{1}{62}$, halla las distancias máximas y mínimas al Sol. (Ejemplo 6 páginas 142 y 143 libro de texto onceno grado).

2- Ejercicio 17 página 146 libro de texto onceno grado.

Orientación didáctica:

En esta actividad no solo se posibilita la fijación del concepto de elipse sino también su aplicación a situaciones de la vida práctica para que el estudiante vea la utilidad de su estudio.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para la resolución de la actividad necesitamos recodar los elementos y relaciones de la elipse para contextualízalos.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Hipérbola

Actividad # 3.1

Título: Definición de hipérbola

Objetivo: Definir la hipérbola como lugar geométrico mediante el análisis del contenido y la extensión del concepto y su representación gráfica para el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes.

Ejercicio:

1- ¿Qué sección cónica se obtiene al interceptar un cono circular recto con un plano perpendicular a su base?

2- Sea la definición de hipérbola "El lugar geométrico de los puntos de un plano tales que el módulo de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plan, llamados focos, es una constante menor que la distancia entre los focos." Apóyate en la representación gráfica que aparece en el libro de texto de onceno grado página 147 y:

a) Representa en la gráfica los elementos y relaciones que plantea la definición.

b) Escribe en símbolos la definición.

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la segunda fase del tratamiento de los conceptos, en esta se define la hipérbola por la vía deductiva se parte de la definición, se analizan cada uno de los elementos, se ven las diferentes formas de representación y se hace un análisis de representantes y no representantes del concepto.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución

Actividad # 3.2

Título: Identificando la hipérbola

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Identificar la hipérbola como lugar geométrico a partir de un conjunto de puntos del plano que cumplen determinada propiedad para su aplicación en situaciones intra y extramatemáticas.

Ejercicio

1- Marca con una cruz la proposición correcta, Sea la hipérbola de focos F_1 y F_2 y P un punto que pertenece a ella, se cumple que:

a) ____ $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| > |\overline{F_1\,F_2}|$

b) ____ $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$

c) ____ $|\overline{PF_1} + \overline{PF_2}| < |\overline{F_1\,F_2}|$

2- Determina si los lugares geométricos que cumplen las siguientes características son hipérbolas.

a) F_1(5;0), F_2(-5;0), P (3;0) y 2a=6

b) F_1(-2; -4), F_2(8; -4), P (7;0) y a=4

c) F_1(2;3), F_2(8;3), P (1;3) y 2a=8

Orientación didáctica: la siguiente actividad se encuentra en la tercera etapa para el tratamiento de los conceptos, para su realización es necesario realizar un análisis del contenido y la extensión de la definición.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Se orientará a os estudiantes que realicen de estudio individual esta actividad, pero con la utilización del software Geogebra.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 3.3

Título: Otra forma de representar la hipérbola

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Deducir la ecuación cartesiana de la hipérbola a partir de su definición y elementos sustituyendo conceptos por su definición, utilizando reglas de inferencias válidas con el uso de la simbología matemática requerida potenciando el trabajo con los conceptos matemáticos en sus distintas representaciones.

Ejercicio:

3- Sea la hipérbola que tiene focos $F_1(c;0)$ y $F_2(-c;0)$ y un punto P de coordenadas $P(x;y)$, obtén una ecuación para la hipérbola en función de sus ejes, a partir de su definición conociendo que la constante mencionada en la definición es la longitud del eje principal (2a).

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la tercera fase del tratamiento de los conceptos: asimilación y fijación del concepto, a partir del análisis de la definición, su representación gráfica y los elementos de la hipérbola se llega a la ecuación que define a la hipérbola como lugar geométrico y a partir de esta se introduce las demás ecuaciones, cuando el eje principal es paralelo al eje "x" o cuando es paralelo al eje "y" y so centro es un punto O(h;k).

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Actividad del profesor	Actividad del estudiante
¿Qué nos piden? ¿Qué nos dan? ¿Cómo podemos expresar en símbolos la definición? Si la constante menor que la distancia entre sus focos es igual a 2a ¿cómo se podría expresar la ecuación?	Nos piden: • Determinar una ecuación para la hipérbola en función de sus ejes: Eje principal ($\overline{A_1A_2}$ = 2a), semieje principal ($\overline{AO}$ = a). Eje no principal ($\overline{B_1B_2}$ = 2b), semieje no principal ($\overline{BO}$ = b) • Las coordenadas de los focos F_1 $(c;0)$ y $F_2(-c;0)$ y del punto $P(x;y)$ que pertenece a la hipérbola. Además, que la constante que se menciona en la definición es igual a 2a. • $\lvert d(F_1;P) - d(F_2;P)\rvert < d(F_1;F_2)$ • $\lvert d(F_1;P) - d(F_2;P)\rvert = 2a$

¿Qué ecuación utilizamos para determinar la distancia entre dos puntos? Con los datos que nos ofrece el ejercicio sustitúyelo en la ecuación y calcula apoyándote de la demostración que ofrece el libro de texto de onceno grado en las páginas 148 y 149.	• $d(F;P)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ $$\left\lvert\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+y^2}-\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}\right\rvert=\pm 2a$$ $$\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}$$ $$\left(\sqrt{(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+y^2}\right)^2=\left(\pm 2a+\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}\right)^2$$ $$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}+(\mathrm{x}-c)^2+y^2$$ Se eliminan las y^2 en ambos miembros y se resuelve el binomio al cuadrado quedando: $$x^2+2xc+c^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2$$ Se eliminan en ambos miembros x^2 y c^2 y se aísla el radical: $4cx-4a^2=\pm 4a\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}$ dividiendo entre 4 la ecuación $$(cx-a^2)^2=\left(\pm a\sqrt{(\mathrm{x}-c)^2+y^2}\right)^2$$ $$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2[(x-c)^2+y^2]$$ $$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$ Se eliminan en ambos miembros $-2a^2xc$ $$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$ Agrupamos las x^2, las y^2 y lo demás lo pasamos para el otro miembro: $c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$ $x^2(c^2-a^2)+a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$ Como ya conocemos el triángulo característico ($c^2=b^2+a^2$), si despejamos b^2 quedaría ($b^2=c^2-a^2$) sustituyendo: $x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$ dividiendo por a^2b^2 la ecuación obtenemos: $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 3.4

Título: ¡Busco una hipérbola!

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo:

- Obtener la ecuación de la hipérbola dado sus elementos o representación gráfica a partir de sustituir en la ecuación cartesiana o por el completamiento cuadrático para el desarrollo de habilidades en el trabajo algebraico.
- Representar gráficamente la hipérbola dado su ecuación y elementos con la utilización de instrumentos de trazado para el desarrollo de la visualización en los estudiantes.

Ejercicio:

1- Escribe la ecuación de la hipérbola que tiene como centro el origen de coordenadas, eje principal sobre el eje "x" y cumple: (Ejemplo 1 pagina 149 libro de texto onceno grado)

a) a=3, b=2

b) 2a=6, c=5

2- Escribe la ecuación de la hipérbola que tiene como centro O y cumple: (Ejemplo 2 página 150 libro de texto onceno grado)

a) O (3; -4), a=4, b=3

b) O (6;1), 2b=10, F_2(0;1)

3- Representa en un sistema de coordenadas las siguientes hipérbolas y escribe las ecuaciones de sus asíntotas. (Ejemplo 3 página 151 y 152 libro de texto onceno grado)

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$

4- Ejercicios del 1 a las 7 páginas 154, 155, 156 libro de texto de onceno grado.

Orientación didáctica: Esta actividad se encuentra en la tercera fase del tratamiento de los conceptos y sus definiciones: asimilación y fijación del concepto. Las tres primeras actividades son los tres primeros ejemplos resueltos que plantea el libro de texto y que le sirven para la solución de los ejercicios que se proponen para ellos resuelvan.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Esta actividad la realizaran nuevamente de estudio independiente con la utilización del software Geogebra.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 3.5

Título: La hipérbola y otras curvas.

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Caracterizar las relaciones de posición de la hipérbola con otras curvas mediante el análisis de sus puntos de intersección para potencia tanto el desarrollo del trabajo algebraico y geométrico

Ejercicio:

1- Halla los puntos de intersección de la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ con las curvas: (Ejemplo página 153 y 154 libro de texto onceno grado)

a) $5\mathrm{x}-4\mathrm{y}-16=0$

b) $\mathrm{y}^2-\mathrm{x}+10=0$

2- Ejercicios del 8 al 12 página 156 libro de texto onceno grado.

3- Ejercicio 16 página 157 libro de texto onceno grado.

Orientación didáctica: Estos ejercicios permiten la fijación del concepto de hipérbola

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. En el ejemplo 4 al que se hace referencia del libro de texto les enseña a como determinar los puntos de intersección con otras curvas que le servirá para la resolución del ejercicio 16, donde estarán recordando los conceptos de las demás cónicas y en los otros ejercicios propuestos pondrán en práctica la definición al tener que establecer la relación inicial que plantea la misma y determinaran si un punto pertenece a la hipérbola que han trabajado ejercicios similares en la unidad de funciones en este mismo grado. Se les orientará de estudio independiente ver los puntos de intersección de estas curvas representadas en el software Geogebra.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 3.6

Título: Aplicaciones de la hipérbola

Objetivo: Obtener la ecuación y elementos de la hipérbola mediante la vinculación de esta con otras áreas de la Matemática para el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes.

Ejercicio:

1- Ejercicio 19 y 20 página 157 libro de texto onceno grado

2- Ejercicio 20 página 157 libro de texto de onceno grado.

Orientación didáctica:

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Esta actividad también posibilita la fijación del concepto de hipérbola a partir de su definición vinculado con el triángulo y la recta en diferentes situaciones.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Parábola

Actividad # 4.1

Título: ¿Conocemos la parábola?

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo: Identificar la parábola como lugar geométrico a través de la parábola como función para la solución de nuevas clases de problemas para establecer nexos entre lo conocido y lo nuevo por conocer.

Ejercicio:

1- Represente gráficamente mediante un ploteo de puntos el lugar geométrico $x = 4y^2$.

a- Establezca semejanzas y diferencias entre la expresión anterior y la expresión $y = 4x^2$.

2- Ente las secciones cónicas que se obtuvieron al realizarle cortes al cono con un plano ¿la parábola era alguno de esos lugares geométricos?

Orientación didáctica:

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Esta actividad se encuentra en la primera fase a desarrollar en el tratamiento de los conceptos y sus definiciones: consideraciones y ejercicios preparatorios donde para estudiar la parábola ya tienen como referente la función cuadrática que representa una parábola esto ya es conocido por ellos, pero ¿serán siempre las parábolas una función?

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución. Se destacan en que existen parábolas que no son funciones por lo que debemos encontrar una forma para poder definirlas tanto a las que constituyen funciones como las que no y en el ejercicio 2 se hace énfasis en el fragmento del video donde se obtiene la parábola al realizarle cortes al cono con un plano.

Actividad # 4.2

Título: ¿Cómo definir la parábola?

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo: Definir la parábola como lugar geométrico a través del procedimiento para su representación contribuyendo al desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes.

Ejercicio:

1- Del estudio del procedimiento para representar la parábola como lugar geométrico, que se encuentra en su libro de texto página 124, determine las características esenciales que debe poseer esta para que caractericen a cualquier parábola que deseemos construir. Elabore su propia definición para la parábola.

Orientación didáctica:

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. En este ejercicio ya se ha pasado a la segunda fase del tratamiento de los conceptos y sus definiciones: Formación del concepto, aquí se toma como referente el procedimiento que muestra el libro de texto para construir parábolas y con un análisis muy detallado se van determinando las características esenciales para que ellos por sí solos sean capaces de elaborar el concepto de parábola.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos y para la solución de la siguiente actividad se destacarán dos momentos importantes que se muestra en la siguiente tabla:

Actividad del profesor	Actividad del estudiante
¿Qué nos dan? ¿Qué nos piden? ¿Qué medios son necesarios emplear para representar la parábola como lugar geométrico? ¿Qué condiciones esenciales destaca el procedimiento? ¿Qué objeto matemático representa el extremo del hilo que no está fijo al cartabón? ¿Qué representa la regla? Si la longitud del hilo es igual a la del cateto mayor del cartabón. ¿Qué relación existe entre la distancia de cualquier punto de la parábola al punto fijo y la distancia	El procedimiento para representar la parábola como lugar geométrico. Determinar las características esenciales que debe poseer la parábola y elaborar una definición ella. Los medios a utilizar para representar la parábola como lugar geométrico son: cartabón, regla, hilo y un lápiz. La longitud del hilo sea igual a la del cateto mayor del cartabón. Fijar un extremo del hilo en el extremo del cateto mayor que corresponde al ángulo agudo. Fijar el otro extremo a un punto del plano. Deslizar el cartabón sobre la regla y el lápiz describiendo la trayectoria del hilo.

de ese punto de la parábola a la recta fija? ¿Cómo quedará la definición de este lugar geométrico?	El objeto matemático que representa el extremo del hilo que no está fijo al cartabón es un punto fijo y la regla representa una recta fija. La distancia de cualquier punto de la parábola al punto fijo es la misma que la de ese punto a la recta fija. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que poseen la misma distancia a un punto fijo y a una recta fija que no pasa por dicho punto.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 4.3

Título: Otra forma de representar la parábola.

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo: Deducir la ecuación para la parábola a partir de las coordenadas de los elementos que la determinan, el centro V (h; k); un punto cualquiera P(x; y) y el la línea directriz, sustituyendo conceptos por su definición, utilizando reglas de inferencias válidas con el uso de la simbología matemática requerida potenciando el trabajo con los conceptos matemáticos en sus distintas representaciones.

Ejercicio:

1- Sea una parábola de vértice $V(h;k)$ y $P(x;y)$ un punto que pertenece a la parábola. Marque con una x en la proposición verdadera si se conoce que F es el foco de la parábola y l es la línea directriz.

a- ___ $d(F;V) = d(F;l)$

b- ___ $d(F;P) = d(l;V)$

c- ___ $d(F;P) = d(l;P)$

d- ___ $d(F;P) = d(F;l)$

2- Sea la parábola de foco $\mathrm{F}(0;2)$, línea directriz $\mathrm{l}: \mathrm{y} + 2 = 0$ y $\mathrm{P}(4;2)$ un punto que pertenece a la parábola. Determine las distancias del foco (F) a un punto de la parábola (P), de la línea directriz (l) al punto P y del foco a la línea directriz. Establezca relaciones entre los resultados obtenidos.

3- Basado en la definición de parábola halle una ecuación que permita determinar la distancia del foco a un punto de la parábola de forma que $d(F;P)=p$, sabiendo que $F(0;p)$, l: $y+p=0$ y $P(x;y)$.

Orientación didáctica:

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos y para la solución de la siguiente actividad se destacarán dos momentos importantes que se muestra en la siguiente tabla:

Actividad del profesor	Actividad del estudiante
¿Qué nos piden? ¿Qué nos dan? ¿Cómo determinar la distancia entre el foco y el punto de la parábola? ¿recuerdan la fórmula que permite determinar la distancia entre dos puntos? Nos queda aún por determinar la distancia del foco a la línea directriz, es decir de un punto a una recta. ¿Conocen alguna fórmula que permita determinar la distancia de un punto a una recta? Que relación existe entre las distancias. En el ejercicio 2 ¿Qué nos piden?	Nos piden: 1- Determinar el valor de las distancias: del foco (F) a un punto de la parábola (P),de la línea directriz (l) al punto P y del foco a la línea directriz. Las coordenadas del foco$\mathrm{F}\ (0;2)$, la ecuación de la línea directriz$\mathrm{l}$: $\mathrm{y}+2=0$ y las coordenadas del un punto que pertenece a la parábola $\mathrm{P}(4;2)$ La ecuación para determinar la distancia entre el foco y el punto: $d(F;P)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ $d(A;B)=\sqrt{(4-0)^2+(2-2)^2}$ $d(A;B)=\sqrt{(4)^2}$ $d(A;B)=4$

¿Qué nos dan? ¿Qué planea la definición? ¿Qué fórmulas utilizamos? ¿Cómo obtener p en función de x e y?	Para determinar la distancia de la línea directriz al punto de la parábola utilizamos la ecuación: $d(P;r) = \frac{\lvert Ax+By+C \rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $d(P;r) = \frac{\lvert y+2 \rvert}{\sqrt{0^2+1^2}}$ $d(P;r) = \frac{\lvert 2+2 \rvert}{\sqrt{1^2}}$ $d(P;r) = 4$ Por tanto, vemos como $d(F;P) = d(l;P)$ como plantea la definición: El lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado foco, y de una recta fija llamada directriz, que no pasa por el foco 2- Tenemos que: $d(F;P) = p$, y $F(0;p)$, l: $y + p = 0$ y $P(x;y)$. A partir de la definición que plantea: $d(F;P) = d(l;P)$ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{\lvert Ax+By+C \rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \frac{y+p}{\sqrt{0^2+1^2}}$ $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p$ $(\sqrt{x^2 + (y-p)^2})^2 = (y+p)^2$ $x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$ $x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$ $x^2 - 2py = 2py$ $x^2 = 2py + 2py$ $x^2 = 4py$

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 4.4

Título: ¡Busco una parábola!

Vía de Cumplimiento: Docente

Objetivo:

- Obtener la ecuación de la parábola dado sus elementos a partir de sustituir en la ecuación cartesiana o por el completamiento cuadrático para el desarrollo de habilidades en el trabajo algebraico.
- Representar gráficamente la parábola dado su ecuación o elementos con la utilización de instrumentos de trazado para el desarrollo de la visualización en los estudiantes.

Ejercicio:

1- Escribe la ecuación y representa gráficamente la parábola que cumple:

a) V(0;0), F(0;3)

b) F(0;2), l: y+2=0

2- Escribe la ecuación de la parábola que cumple:

a) V(3;6), F(3;10)

b) F(4;8), l: y+2=0

3- Ejercicio 14 página 133 libro de texto onceno grado.

4- Ejercicio 15 página 133 libro de texto onceno grado.

Orientación didáctica: Esta actividad posibilita la asimilación y fijación del concepto de parábola dado mediante su ecuación, en estas clases se pueden orientar los ejercicios 1 y 2 que aparecen en el libro de texto de onceno grado en el Capítulo 3 epígrafe 2 página 120.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. En esta actividad se orientará realizar las representaciones gráficas en el software Geogebra.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 4.5

Título: La parábola y otras curvas.

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo: Caracterizar las relaciones de posición de la hipérbola con otras curvas mediante el análisis de sus puntos de intersección para potencia tanto el desarrollo del trabajo algebraico y geométrico

Ejercicio:

1- Las siguientes ecuaciones representan parábolas. Halla en cada caso las coordenadas del foco y del vértice, y la ecuación de la directriz. Representa en un sistema de coordenadas la parábola del inciso a. (Ejemplo 3 y 4 página 120- 130 libro de texto onceno grado)

a) $y^2 + 4y + 4x = 0$

b) $y^2 + 8x = 0$

c) $x^2 + 10y - 10 = 0$

d) $2x^2 - 12x + 3y - 9 = 0$

2- Determina los puntos de intersección entre las curvas:

a) $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0\ ; y = x - 5$

b) $y^2 = 4x\ ;\ x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0$

3- Ejercicio 9 página 132 libro de texto onceno grado.

4- Ejercicio 10 página 132 libro de texto onceno grado.

5- Ejercicio 11 página 132 libro de texto onceno grado

Orientación didáctica: Estas actividades posibilitan la fijación del concepto de parábola como lugar geométrico y a partir de su ecuación, pero también se retoman el concepto de circunferencia y las relaciones de posición que existen entre estas dos curvas.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Además se le orientará a los estudiantes representar as curvas en el software Geogebra par determinar los puntos de intersección.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 4.6

Título: Aplicaciones de la parábola.

Objetivo: Obtener la ecuación y elementos de la parábola mediante la vinculación de esta con la vida práctica para el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes.

Ejercicio:

3- Ejercicio 8 página 131 libro de texto onceno grado.

4- Ejercicio 13 página 132 libro de texto onceno grado.

Orientación didáctica:

En esta actividad no solo se posibilita la fijación del concepto de parábola sino también su aplicación a situaciones de la vida práctica para que el estudia vea la utilidad de su estudio.

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Secciones Cónicas

Actividad # 5.1

Título: Las curvas de segundo grado vistas como secciones cónicas

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo: Identificar las secciones cónicas en los diferentes casos, dado su definición o la intersección del plano con el cono para el trabajo con los conceptos matemáticos en los estudiantes.

Ejercicio:

1- Dado el siguiente cono de dos hojas ¿Qué curva se obtiene al interceptar un plano con diferentes ángulos?

2- ¿Qué posición tienen el plano con el cono en los diferentes casos?

3- Haz coincidir los elementos de la columna A con los elementos de la columna B

A

1- Hipérbola

2- Circunferencia

3- Parábola

4- Elipse

B

____Sección producida en una superficie cónica por un plano oblicuo al eje, que no sea paralelo a la generatriz y que forme con el mismo un ángulo mayor que el que forman eje y generatriz. Es una curva cerrada.

____ Sección producida por un plano perpendicular al eje y es un caso particular de la elipse.

____ Sección producida en una superficie cónica por un plano oblicuo al eje, formando con el un ángulo menor al que forman eje y generatriz, por lo que incide en las dos hojas de la superficie cónica. Es una curva abierta que se prolonga indefinidamente y consta de dos ramas separadas.

____ Sección producida en una superficie cónica por un plano oblicuo al eje, siendo paralelo a la generatriz. Es una curva abierta que se prolonga hasta el infinito.

4- En el estudio de las curvas de segundo grado ahora vistas como secciones cónicas existe una propiedad que varia indistintamente para cada una.

a) ¿A que propiedad nos hacemos referencia?

b) ¿Qué valores puede tomar en cada uno de los casos?

Orientación didáctica:

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 5.2

Título: Las secciones cónicas dada su ecuación general.

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo: Identificar las secciones cónicas dada su ecuación general mediante los conocimientos adquiridos en el transcurso de la unidad para el desarrollo del pensamiento lógico en los estudiantes.

Ejercicio:

1- Identifica las siguientes ecuaciones con la sección cónica correspondiente, sin realizar el completamiento cuadrático.

a) $\mathrm{y}^2 = 4(\mathrm{x} + 2\mathrm{y})$

b) $9\mathrm{x}^2 - 36\mathrm{x} + 4\mathrm{y}^2 = 0$

c) $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y = 20$

d) $x^2 + 6x + 12y + 9 = 0$

e) $4x^2 - 25y^2 - 24x + 250y + 561 = 0$

f) $x^2 + y^2 = 2y + 1$

g) $16x^2 - 9y^2 - 96x + 288 = 0$

h) $4x^2 - 4x - 8y + 9 = 0$

i) $x^2 + 16 = 4(y^2 + 2x)$

j) $x^2 - y^2 = 10(x - y) + 1$

k) $3x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 39 = 0$

1.1- Dada las ecuaciones generales anteriores correspondiente a lugares geométricos aplicando el completamiento cuadrático espésalas en su ecuación cartesiana y determina los elementos de la cónica obtenida.

a) Comprueba la ecuación obtenida si se corresponde con la respuesta dada en el ejercicio anterior.

Orientación didáctica:

Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda. Para identificar el tipo de sección cónica debemos tener en cuenta que dada la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$:

- Es una parábola si A o C son 0

- Una elipse si A y C tienen el mismo signo (o una circunferencia si A=C)
- Una hipérbola si A y C tienen signos contrarios.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Actividad # 5.3

Título: Las secciones cónicas

Vía de cumplimiento: Docente

Objetivo: Determinar la ecuación de una sección cónica dado su relación con otras cónicas

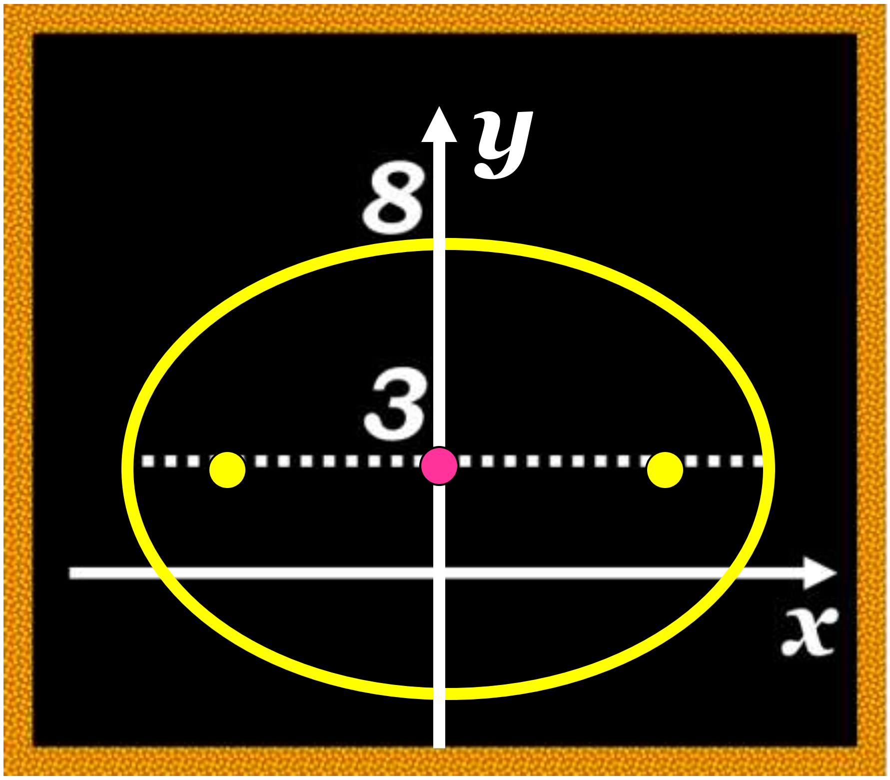
Ejercicio:

1- Escribe la ecuación cuya longitud del eje mayor es la distancia entre los puntos de intersección de la parábola $x^2=8y$ y la recta $y - 2 = 0$, sabiendo que está centrada en el foco de la parábola y de eje menor 2p.

2- Halla los puntos de intersección entre las curvas e identifique cual es cada una: $9(x+1)^2+16(y-1)^2 = 144$ y $16(y-1)^2 - 9(x+1)^2 = 144$

3- Dado el gráfico de una elipse, escribe la ecuación de la hipérbola que tiene:

el mismo centro, vértices en los vértices no principales de la elipse, y e = 1,414.



4- Escribe la ecuación de la circunferencia que los extremos de un diámetro son el vértice y el foco de la parábola $(y - 1)^2 = 24(x + 5)$.

Orientación didáctica: Estas actividades posibilitan fijar los conceptos de las secciones cónicas y vincular los elementos de cada una para obtener lo pedido en cada situación.
Orientación hacia el problema: Se leen las actividades y se ven las palabras con dificultades.

Trabajo en el problema: se determina lo que nos dan y lo que nos piden para encontrar la vía de solución y determinar los medios que necesitamos en esta búsqueda.

Solución del problema: se procede a darle solución a los ejercicios propuestos.

Evaluación de la solución y de la vía: se procede al análisis de la solución de actividad y las vías utilizadas para su solución.

Anexo 5

Consulta a especialistas

Objetivo: Buscar consenso sobre la efectividad del sistema de actividades para el tratamiento de los conceptos relativos a curvas de segundo grado.

Estructura de la consulta:

Datos del especialista:

- Nombre y apellidos:
- Graduado de:
- Grado científico:
- Años de experiencia como profesor:
- Experiencia en la enseñanza preuniversitaria (Si o No):

Cuestionario

1. ¿Qué papel les da a los conceptos dentro de los contenidos a estudiar en Matemática?

___ Muy importante

___ Importante

___ Innecesario

___ No tengo criterio

2. Perfeccionar el tratamiento de los conceptos matemáticos teniendo en cuenta las fases de formación de los mismos es:

___ Muy importante

___ Importante

___ Innecesario

___ No tengo criterio

3. ¿Considera que el sistema de actividades didácticas propuesto es viable de implementar?

___ Totalmente

___ Parcialmente

___ Limitadamente

___ No se puede

___ No tengo idea

4. ¿Se corresponde el sistema de actividades con las necesidades de aprendizaje de los alumnos?

___ Totalmente

___ Parcialmente

___ Limitadamente

___ No tengo idea

5.- ¿Implementar este sistema de actividades afectaría la organización del trabajo docente en el aula?

___ No afecta

___ Afecta muy poco

___ Afecta

___ Afecta considerablemente

___ No tengo criterio

6.- Considera que el impacto en el aprendizaje de los alumnos sería:

___ Muy significativo

___ Significativo

___ Poco significativo

___ No sé

7.- Avala la generalización de estos sistemas de ejercicios?

___ Si

___No

8.- Escriba cualquier opinión o sugerencia que considere sobre el sistema de actividades propuesto: