



Universidad de Matanzas «Camilo Cienfuegos»  
Facultad de Ingenierías

**ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LAS TENSIONES  
TANGENCIALES ALTERNANTES PRODUCIDAS POR EL CONTACTO EN  
LA ZONA PRÓXIMA AL POLO DE ENGRANE EN ENGRANAJES  
CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS.**

*Tesis en Opción al Título de  
Máster en Ingeniería Asistida por Computadora.*

**Autor: Lic. Bárbaro Luis Peña Rodríguez**

**Tutor: Dr. C. Orestes González Quintero**

Matanzas, 2013

## RESUMEN

El análisis del comportamiento de la resistencia de los engranajes cilíndricos de dientes rectos al contacto cuando se encuentran engranado un par de dientes próximos al polo de engrane, y la influencia que tienen las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ) en el deterioro de los engranajes producto del contacto, brinda información que permiten hacer una valoración sobre el posible diseño, fabricación y explotación de este tipo de transmisión. En este trabajo se analiza el comportamiento de los parámetros del contacto y de las  $\tau_{xy}$  para tres posiciones de engrane, cuando solo hay un par de dientes engranado. Se utiliza el Método de Elementos Finitos para la determinación del comportamiento de los parámetros relacionados con la resistencia al contacto, obteniéndose resultados que esclarecen la influencia de los parámetros del contacto y las  $\tau_{xy}$  en la resistencia de los dientes.

**Palabras claves:** engranajes cilíndricos; contacto; tensiones tangenciales alternantes; método de elementos finitos; polo de engrane.

## **ABSTRACT**

The analysis of the resistance of straight teathed spur gears to the contact, when a pair of teeth are gear-teathed up close to the pole of gear, and the influence of Tangent Alternating Stress ( $S_{xy}$ ) in deterioration of spur gears as a result of contact, offer an information that allows an assessment concerning possibilities with reference to designs, manufacturing and usage of this kind of transmission. In this investigation the aim is the analysis of the contact and  $S_{xy}$  parameters behaviour for three positions of gear, when there is only a pair of geared teeth. The Finites Elements Method has been used to determine the parameters behaviour related to the resistance on contact, obtaining results that explain the influence of the contact and the  $S_{xy}$  parameters in the resistance of gear teeth.

Keywords: spur gears, contact, tangent alternating stress, finites elements method, pole of gear.

## Tabla de contenido.

Introducción. ....	- 1 -
Capítulo 1. Fundamentación Teórica. ....	- 4 -
1.1. Definición. ....	- 4 -
1.2. Breve reseña histórica de la evolución de los engranajes y del MEF. ....	- 4 -
1.3. Generalidades sobre los engranajes. ....	- 6 -
1.3.1 Características generales de los engranajes. ....	- 7 -
1.3.2. Clasificación de los engranajes según la disposición de los ejes en el espacio. ....	- 7 -
1.3.3. Material tomado como referencia para realizar el análisis de contacto empleando el MEF. ....	- 8 -
1.4. Deterioro de la zona de contacto de los dientes en engranajes cilíndricos de dientes rectos. ....	- 9 -
1.5. Geometría de los engranajes cilíndricos. ....	- 12 -
1.5.1. Perfil de referencia de la cremallera básica. ....	- 12 -
1.5.2. Módulos de los engranajes. ....	- 13 -
1.5.3. Geometría de los engranajes cilíndricos de dientes rectos. ....	- 13 -
1.6. Modelación de los dientes de engranajes cilíndricos de dientes rectos utilizando AutoCAD. ....	- 14 -
1.6.1. AutoCAD, características generales. ....	- 14 -
1.6.2. Dibujo de un diente del engranaje cilíndrico en AutoCAD. ....	- 15 -

1.7. Elaboración de engranajes por el método de generación.....	- 16 -
1.8. Resistencia al contacto de los engranajes cilíndricos de dientes rectos.....	- 17 -
1.8.1. Criterios de resistencia para los materiales.....	- 17 -
1.8.2. Tensión de contacto.....	- 18 -
1.8.3. Condiciones de tensión en la zona de contacto del diente de un engranaje.....	- 19 -
1.9. El Método de Elementos Finitos MEF.....	- 19 -
1.9.1. Tensiones y deformaciones planas.....	- 20 -
1.9.2. Relaciones constitutivas tensión-deformación-temperatura.....	- 22 -
1.9.3. Relaciones deformación y desplazamiento.....	- 23 -
1.9.4. Ecuaciones de equilibrio.....	- 24 -
1.9.5. Condiciones de frontera.....	- 25 -
1.9.6. Solución de elasticidad exacta.....	- 25 -
1.9.7. Fórmula general de la matriz de rigidez.....	- 26 -
1.9.8. Fórmula general para la matriz de rigidez del elemento.....	- 27 -
1.9.9. Cálculo de las tensiones.....	- 27 -
1.9.10. Modelación no-lineal.....	- 28 -
1.9.11. El método de solución no-lineal Newton-Raphson.....	- 28 -
1.10. Simulación del fenómeno de contacto en engranajes cilíndricos de dientes rectos utilizando ANSYS.....	- 29 -
1.10.1. ANSYS características generales.....	- 29 -

1.10.2. El CONTACT MANAGER. ....	- 30 -
1.10.3. Elementos PLANE82, CONTA172 y TARGET169. ....	- 31 -
1.10.4. Caracterización de los problemas de contacto. ....	- 33 -
1.10.5. Clasificación del contacto según la rigidez del material. ....	- 33 -
1.10.6. Métodos para la solución de los problemas de contacto. ....	- 34 -
1.10.8. Ventajas del Contacto Superficie-superficie. ....	- 37 -
1.10.9. Pasos generales en un análisis de contacto. ....	- 37 -
1.10.10. Consideraciones fundamentales para establecer el contacto superficie-superficie. ....	- 38 -
1.11. Conclusiones parciales del capítulo. ....	- 38 -
Capítulo 2. Materiales y Métodos. ....	- 40 -
2.1. Elaboración del modelo en AutoCAD y compatibilidad con ANSYS. ....	- 40 -
2.2.1. Pasos para la creación del modelo en AutoCAD. ....	- 41 -
2.2.2. Compatibilidad del modelo elaborado en AutoCAD con el programa ANSYS. ....	- 43 -
2.2. Definición del análisis de contacto a realizar utilizando ANSYS. ....	- 43 -
2.2.1. Parámetros básicos de los modelos geométricos. ....	- 43 -
2.2.2. Posiciones de los modelos geométricos. ....	- 44 -
2.2.3. Propiedades mecánicas del material. ....	- 45 -
2.2.4. Creación del modelo geométrico. ....	- 46 -
2.2.5. Mallado del modelo y par de contacto. ....	- 46 -

2.2.6. Definición de las condiciones de fronteras y cargas.....	- 48 -
2.2.7. Control de la solución. ....	- 51 -
2.3. Conclusiones parciales del capítulo.....	- 52 -
Capítulo 3. Análisis de los Resultados.....	- 54 -
3.1. Análisis del comportamiento de los parámetros del contacto. ....	- 54 -
3.1.1. Selección de los nodos donde se medirán los valores de los parámetros del contacto. ....	- 54 -
3.1.2. Análisis de los resultados obtenidos del contacto.....	- 55 -
3.2. Análisis del comportamiento de las Tensiones Tangenciales Alternantes.....	- 65 -
3.2.1. Selección de los nodos de donde se obtendrán los valores de las Tensiones Tangenciales Alternantes. ....	- 66 -
3.2.2. Análisis de los resultados obtenidos de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ). ....	- 67 -
3.4. Conclusiones parciales del capítulo.....	- 72 -
Conclusiones.....	- 74 -
Recomendaciones.....	- 75 -
Bibliografía.....	- 76 -
Anexos.....	I
Anexo # 1. Nomenclatura.....	I
Anexo # 2. Perfil de referencia de la cremallera básica y sus parámetros fundamentales.....	III

Anexo # 3. Geometría de la rueda aislada.....	IV
Anexo # 4. Geometría del par de ruedas.....	IV
Anexo # 5. Curvas asociadas al perfil activo de los dientes de engranajes cilíndricos de dientes rectos.....	V
Anexo # 6. Elaboración de engranaje cilíndrico de dientes rectos por el método de generación utilizando fresa madre.....	V
Anexo # 7. Ecuación de Hertz para evaluar la capacidad de trabajo de un engranaje cilíndrico según la resistencia a los esfuerzos de contacto.....	VI
Anexo # 8. Esquema del contacto de dos ruedas engranadas.....	VII
Anexo # 9. Coordenadas de los puntos que definen la geometría de los modelos obtenidos en el software AutoCAD.....	VIII
Anexo # 10. Códigos ANSYS que contienen la etapa de pre-proceso y de solución de los modelos. ....	XIX
Anexo # 11. Key points utilizados para la creación de las líneas. ....	LIII
Anexo # 12. Líneas que conforman la geometría del modelo.....	LIII
Anexo # 13. Áreas del modelo. ....	LIV
Anexo # 14. Condiciones de frontera del modelo. ....	LIV
Anexo # 16. Coordenadas de los nodos seleccionados para la medición del valor de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ) ( $S_{xy}$ ). ....	LVIII
Anexo # 17. Valores de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ) ( $S_{xy}$ ).....	LX

## INTRODUCCIÓN.

El diseño, construcción y explotación de las transmisiones por engranajes ha evolucionado desde épocas muy remotas hasta la actualidad. Los métodos empleados para el diseño y construcción de engranajes se han complejizado en aras de lograr transmisiones de mayor calidad. En este sentido las computadoras electrónicas y junto con ellas los diferentes programas de computación, basados en normas y procedimientos establecidos, prácticamente sustituyeron tablas y reglas de cálculo empleadas en los engranajes durante años, permitiendo la reducción del tiempo y aumentando la precisión en los cálculos.

A partir de la década de los 90, comenzó la introducción de medios de cómputo más poderosos, permitiendo la consolidación de técnicas vertiginosas de análisis numérico (González Rey et al., 2002; González y Alfonso, 2006; Renfro, 2010). El avance en las técnicas de computación y el empleo de las nuevas computadoras con procesadores matemáticos cada vez más veloces, posibilitan incluir las nuevas técnicas de Diseño Asistido por Computadora (CAD), Manufactura Asistida por Computadora (CAM) e Ingeniería Asistida por Computadora (CAE) como efectivas herramientas de diseño y cálculo ingenieril.

Es evidente que el desarrollo de la ingeniería de engranajes plantea el desarrollo de mejores modelos para el estudio de la capacidad de trabajo de las ruedas dentadas como una de sus principales prioridades. La resistencia de los dientes, así como las mejoras de los procedimientos de cálculo y los modelos de análisis han sido los objetivos de numerosas investigaciones en la ingeniería de engranajes (Cotaquispe, 2006; González, 2006 a y b; González y Alfonso, 2008; Mallesh y Shankarmurthy, 2009; Gurumani y Shanmugam, 2011; Fernández et al., 2012; Vera et al., 2012).

El tema del comportamiento de las tensiones en la zona próxima al polo de engrane ha sido tratado por diversos autores y se han hecho disimiles análisis empleando el Método de Elementos Finitos (MEF), los trabajos de

(Kim y Stoker, 2008; Kamal, 2012) abordan este tema. Existen otros que han analizado el fenómeno del contacto y el comportamiento de los parámetros de la resistencia, como son los casos de (Stanojevic y Cvejic, 2003; Jackson et al., 2005; González y Alfonso, 2008; Gupta et al., 2012), pero aún quedan algunos aspectos sobre la resistencia de los engranajes que no han sido tratados con cierto grado de especificidad. El comportamiento de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ) producidas por el contacto es de gran interés por la influencia que ejercen en el deterioro de la superficie de trabajo de los dientes en la zona próxima al polo de engrane, específicamente en el surgimiento de la picadura de los dientes y el proceso que la genera, de ahí que se formule el siguiente **problema científico**: *Se desconoce el comportamiento de las tensiones tangenciales alternantes producidas por el contacto en la zona próxima al polo de engrane y su influencia en el deterioro de la superficie de trabajo de los dientes.*

Un punto donde gran parte de los especialistas concuerdan (González y Alfonso, 2008b; Atanasovska et al., 2009; Kamal, 2012) es que: mediante la simulación empleando el MEF se puede lograr resultados aceptables en el análisis del comportamiento de las tensiones producidas por el contacto en los engranajes, basándose en este planteamiento se formula la siguiente **hipótesis**: *Es posible obtener los valores de los parámetros del contacto y de las tensiones tangenciales alternantes producidas por el contacto en la zona próxima al polo de engrane mediante la simulación por el MEF y de esta forma esclarecer su comportamiento.*

Para validar la hipótesis anterior se propone como **objetivo** del presente trabajo: *Definir el comportamiento de las tensiones tangenciales alternantes generadas por el fenómeno de contacto en la zona próxima al polo de engrane y esclarecer su relación con el deterioro de la superficie de trabajo del diente.* Para el cumplimiento del objetivo general se trazaron un grupo de **tareas de investigación**:

- Consultar la bibliografía relacionada con el tema de investigación.

- Definir los parámetros para la creación del modelo AutoCAD y crear el modelo geométrico.
- Convertir los ficheros del modelo geométrico obtenidos en AutoCAD en ficheros legibles por ANSYS.
- Definir los parámetros necesarios para la modelación en ANSYS y crear el modelo en ANSYS.
- Crear el par de contacto en ANSYS y ajustar los parámetros de contacto.
- Solucionar el problema de contacto.
- Seleccionar los datos de salida y analizar los resultados.

## **CAPÍTULO 1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.**

### **1.1. Definición.**

El objetivo de este capítulo es presentar una revisión de la bibliografía científica publicada sobre el fenómeno de contacto en los engranajes, así como de los aspectos relacionados con la geometría de los engranajes cilíndricos de dientes rectos. Por otra parte se analizará lo concerniente a la resistencia mecánica, los parámetros del contacto en la superficie de trabajo de los engranajes, tensiones tangenciales alternantes y el empleo del Método de Elementos Finitos, de forma tal que sirva de marco teórico-referencial al resto de la investigación.

### **1.2. Breve reseña histórica de la evolución de los engranajes y del MEF.**

Desde épocas muy remotas se han utilizado cuerdas y elementos fabricados de madera para solucionar los problemas de transporte, impulso, elevación y movimiento. Según Reshetov (1985) el mecanismo más antiguo que se conoce es el de Anticitera, calculadora astronómica datada entre el año 150 y 100 A.C. y compuesta por al menos 30 engranajes de bronce con dientes triangulares, este no fue un ejemplo aislado, sino, que existieron otros dos mecanismos similares en esa época contruidos por Arquímedes y por Posidonio.

Las transmisiones por engranajes han sido estudiadas por numerosos científicos desde la antigüedad hasta nuestros días, desde los estudios realizados por Leonardo da Vinci, muerto en Francia en 1519, el que dejó numerosos dibujos y esquemas de algunos de los mecanismos utilizados hoy, incluido varios tipos de engranajes helicoidales.

Las transmisiones de rotación con velocidad angular uniforme por medio de engranajes, corresponden al año 1674, cuando el famoso astrónomo danés Olaf Roemer propuso la forma de perfil del diente epicicloide. Se le atribuye al

francés Phillipe de Lahire ser el primero en concebir el diente de perfil evolvente en 1695.

En 1856, Christian Schiele, descubrió el sistema de fresado de engranajes rectos por medio de la fresa madre. El norteamericano William Gleason en 1874, inventó la primera fresadora de engranajes cónicos. En Alemania Robert Hermann Pfauter, inventó y patentó una máquina universal de dentar engranajes rectos y helicoidales por fresa madre en 1897. En 1905, M. Chambon, de Lyon (Francia), fue el creador de la máquina para el dentado de engranajes cónicos por procedimiento de fresa madre. Aproximadamente por esas fechas André Citroën inventó los engranajes helicoidales dobles.

El Método de Elementos Finitos por su parte posee siglos de evolución, aunque el nombre del MEF se ha establecido recientemente. El empleo de métodos de discretizado espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas ingenieriles o físicos es conocido desde la antigüedad, el concepto de Elementos Finitos parte de esa idea (Felippa, 2004).

Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos podríamos remontarnos a la época de la construcción de las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Arquímedes (287-212 a.C.) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación para realizar cálculos; el matemático chino Lui Hui (300 d.C.) empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias, con lo que conseguía una aproximación al número  $\text{Pi}=3.1416$ .

El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día ha estado ligado al cálculo estructural, fundamentalmente en el campo aeroespacial. En los años 40 Courant propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones

triangulares, como un método especial del método variacional de Rayleigh-Ritz para aproximar soluciones.

Fueron Turner, Clough, Martin y Topp quienes presentaron el MEF en la forma aceptada hoy en día. En su trabajo introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y placas triangulares con cargas en su plano) al análisis de estructuras aeronáuticas, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.

El trabajo de revisión de Oden presenta algunas de las contribuciones matemáticas importantes al MEF. Los libros de Przemieniecki y de Zienkiewicz y Holister presentan el MEF en su aplicación al análisis estructural. El libro de Zienkiewicz y Cheung o Zienkiewicz y Taylor presenta una interpretación amplia del MEF y su aplicación a cualquier problema de campos. En él se demuestra que las ecuaciones de los elementos finitos pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales, tal como el método de Galerkin o de mínimos cuadrados. Esta visión del problema difundió un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el MEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones hasta tal punto que hoy en día el MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada.

### **1.3. Generalidades sobre los engranajes.**

Las transmisiones por engranajes son el grupo de transmisiones mecánicas más difundidas e importantes hasta nuestros días. Este tipo de mecanismo puede ser empleado en los más diversos campos y condiciones de trabajos (Dobrovolski, 1980).

Según Baranov (1979) una transmisión por engranajes es un mecanismo que con la ayuda del engrane de los dientes de las ruedas dentadas, transmite o convierte el movimiento cambiando las velocidades angulares y los momentos. El mismo autor plantea que los engranajes se emplean para transmitir el

movimiento de rotación entre árboles paralelos, árboles que se cortan y árboles que se cruzan, así como para transformar el movimiento de rotación en movimiento de avance y viceversa.

González Rey (2001) afirma que las ruedas dentadas pueden poseer dimensiones en el rango de 0,05 mm hasta 93 m, soportar fuerzas circunferenciales desde 0,001 N hasta miles de KN y potencia de hasta decena de miles de Kw, en las transmisiones mayores.

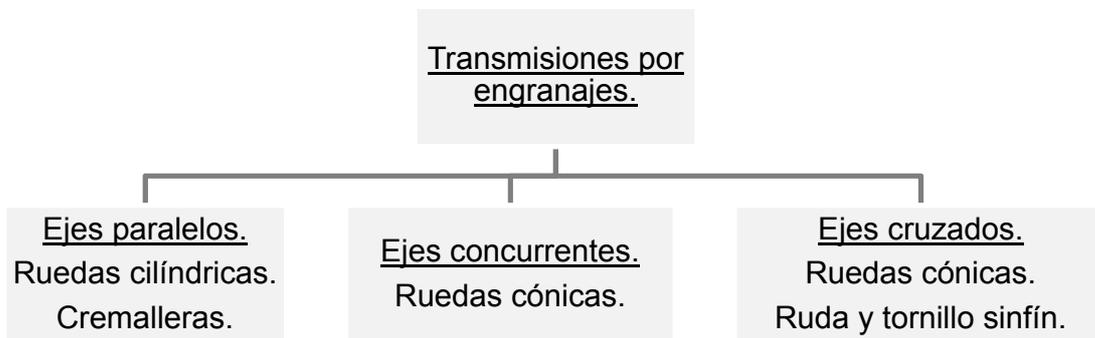
### **1.3.1 Características generales de los engranajes.**

Baranov (1979) y Dobrovolski (1980) coinciden en que las características generales más importantes de las transmisiones por engranajes son:

- Gran capacidad de carga.
- Compactos.
- Transmisión de fuerza sin deslizamiento (relación de transmisión constante e independiente de las cargas).
- Alta eficiencia.
- Distancias entre centros pequeñas y medias.
- Seguridad de funcionamiento y gran duración.
- Sencillez en el mantenimiento.
- Caras y complejas de fabricar.
- Producen ruidos.

### **1.3.2. Clasificación de los engranajes según la disposición de los ejes en el espacio.**

Un de las clasificaciones más difundidas, según Mott (2006), es la que se realiza atendiendo a la posición relativa de los ejes y árboles portadores de las ruedas de la forma en que aparecen en la figura (1.1).



*Figura 1.1. Elementos componentes de una transmisión en dependencia de las disposición de los ejes.*

### **1.3.3. Material tomado como referencia para realizar el análisis de contacto empleando el MEF.**

Al seleccionar los materiales utilizados en la fabricación de las ruedas dentadas, es necesario garantizar la resistencia de los dientes a la flexión y la resistencia de sus capas superficiales (Reshetov, 1985; Shigley y Mischke, 1990).

Para construir engranajes se pueden utilizar diferentes materiales, pero los aceros son fundamentales en la fabricación de estos componentes. Dentro los aceros más usados están los de medio contenido de carbono (Askeland, 1998; Shigley y Mischke, 1996).

En el presente trabajo, se tomará para la simulación las propiedades de las ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos de acero con mediano contenido de carbono AISI 1040, utilizadas por González (2007).

Es necesario destacar, en sentido general, que según Shigley y Mischke (1996) las marcas de acero a utilizar en los engranajes y el tratamiento térmico que se le debe aplicar se definen teniendo en cuenta la proporcionalidad entre las

tensiones de contacto admisibles de los dientes y la dureza del material, y la capacidad portante de los engranajes según su resistencia al contacto, esta última, es proporcional al cuadrado de la dureza.

Según la bibliografía clásica, para mejorar las propiedades mecánicas de las ruedas dentadas, tradicionalmente se han empleado los siguientes procedimientos térmicos superficiales y termoquímicos: temple superficial, cementación, nitruración, entre otros. Cada uno de estos tratamientos, son aplicados teniendo en cuenta las características geométricas y dimensionales de las ruedas, el material y el posterior empleo de las mismas (Baranov, 1979; Dobrovolski, 1980; Reshetov, 1985; Mott 2006).

El Tratamiento Mecánico-térmico Reiterado es una técnica novedosa que también es empleada para el mejoramiento de la resistencia en la superficie de trabajo en los engranajes, este procedimiento fue aplicado en el trabajo de González (2007); obteniéndose buenos resultados en cuanto a la resistencia de las capas superficiales.

#### **1.4. Deterioro de la zona de contacto de los dientes en engranajes cilíndricos de dientes rectos.**

En el constante funcionamiento de las transmisiones mecánicas, producto del contacto surgen distintas fallas, las que en su mayoría están relacionadas con la dureza y profundidad de la capa endurecida de los dientes, lo que combinado con otras causas de orden operacional como excesiva carga, pérdida de la película de aceite y entrada de agentes externos, producen el deterioro de los engranajes (Dobrovolski, 1980; Childs, 2004).

Dentro de los principales deterioros que pueden sufrir los dientes de los engranajes debido a la baja dureza en las capas endurecidas (Mott 2006) se encuentran:

- Desgaste (desgaste abrasivo y desgaste adhesivo).

- Fatiga superficial (picado y macropicado).
- Deformación plástica alta (aplastamiento, afilado y rebaba).

Los aspectos a tener en cuenta para evitar el deterioro de los engranajes según Piña (2009) son descritos a continuación:

- Escoger materiales, espesor de las capas endurecidas, durezas, dimensiones, tolerancias y acabados superficiales que respondan a las condiciones de trabajo a que están sometidos los engranajes.
- Al reemplazar los engranajes se debe hacer por parejas acopladas.
- Evitar desalineamiento, apriete o huelgo excesivo entre los engranajes, que aceleren la aparición de los mecanismos de falla, los que se traducen en vibraciones, ruido y calor, provocando daños considerables.
- Evitar la sobrecarga de torque, de velocidad e impacto, o combinaciones de estas.
- Lograr condiciones de lubricación apropiadas.

Coinciden Dobrovolski (1980), Reshetov (1985) y Mott (2006) en que los factores que influyen en el mejoramiento de las propiedades mecánicas de la superficie de contacto de los dientes en los engranajes cilíndricos de dientes rectos son:

- Tratamientos superficiales.
- Endurecimiento superficial.
- Diseño.

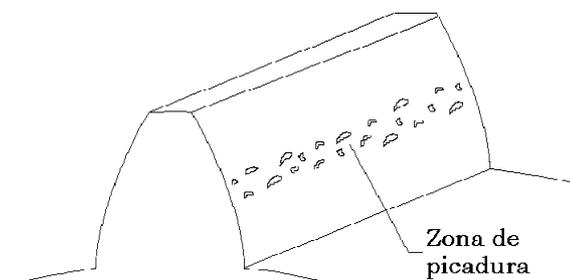
En el presente trabajo se analizará el contacto y el comportamiento de las tensiones tangenciales alternantes, las que influyen directamente en la aparición de la fatiga y con ella la aparición de grietas.

Debido a la propagación de las grietas se producen la picadura, que es una de las causas principales de la inutilización de las transmisiones por engranajes que trabajan en abundancia de lubricante. De acuerdo con Reshetov (1985) y Piña (2009) las grietas por fatiga casi siempre aparecen cerca de la superficie de contacto y toman diferentes orientaciones de acuerdo a la influencia de las pequeñas velocidades de deslizamiento y los grandes esfuerzos de fricción. Este proceso es un proceso progresivo, varía en dependencia de la posición y la magnitud que van alcanzando las tensiones tangenciales alternantes y el comportamiento que va teniendo del resto de las tensiones actuantes, la posición de tensiones tangenciales alternantes se hace cada vez más próxima a la superficie del diente durante la reiteración del proceso de engrane.

El desarrollo de grietas está condicionado por la presencia de lubricante en la zona de contacto, debido a que el lubricante penetra en las grietas, aumentan las cargas dinámicas y en el proceso de trabajo el número de hoyuelos crece y el tamaño de ellos aumenta, por lo que el perfil del diente se altera y la superficie queda irregular, debido a esto, el proceso de picadura superficial se intensifica y toda la superficie de trabajo del diente se deteriora (Piña, 2009).



a) *Macropicado o descascarado.*



b) *Esquema de la zona de picadura.*

*Figura 1.2. Deterioro por picadura.*

Para aumentar la capacidad de los dientes a la picadura se puede aumentar la resistencia mecánica de la superficie de los dientes, aplicar corrección, aumentar los radios de curvatura de los perfiles, dar mayor dureza a los flancos activos de los dientes, mejorar el acabado superficial, elegir correctamente el lubricante, entre otras medidas (Reshetov, 1985; Askeland, 1998; Childs, 2004).

En la figura 1.2 a) se muestra la foto de un engranaje que posee macropicado y en la figura 1.2 b) se muestra la zona del perfil del diente donde se produce la picadura, como puede apreciarse esta zona se encuentra próxima al polo de engrane.

## 1.5. Geometría de los engranajes cilíndricos.

Los parámetros geométricos de los engranajes cilíndricos aparecen documentados en la bibliografía, pero serán tratados debido a su importancia en la construcción geométrica del par dentado, la rueda aislada y el perfil del diente. Estos parámetros serán tomados en cuenta en la construcción de los modelos en AutoCAD.

### 1.5.1. Perfil de referencia de la cremallera básica.

Para conservar la constancia de la relación de transmisión cinemática en el engranaje, los dientes del piñón y la rueda dentada deben tener los perfiles conjugados. Esta condición de contacto de los dientes entre el piñón y la rueda se observa si ellos engranan correctamente con la cremallera de referencia (González Rey et al., 2005). Es usual adoptar perfiles de referencia iguales para la herramienta y el engranaje. En el anexo # 2 aparece representada la cremallera básica y sus principales parámetros según la norma **ISO 53: 2007**. Las dimensiones de la cremallera básica aparecen en la tabla 1.1.

Tabla 1.1. Dimensiones de la cremallera básica de referencia.

<b>Símbolos</b>	<b>Magnitudes de la cremallera básica de referencia.</b>
<b><math>A_p</math></b>	<b>20°</b>
<b><math>h_{ap}</math></b>	<b>1 m</b>
<b><math>C_p</math></b>	<b>0,25 m</b>
<b><math>H_{fp}</math></b>	<b>1,25m</b>
<b><math>\rho_{fp}</math></b>	<b>0,38 m</b>

### 1.5.2. Módulos de los engranajes.

Los módulos también son normalizados. Según González Rey et al. (2005) y Cárdenas et al. (2011) existe una marcada coincidencia en varias de las normas relacionadas con los engranajes en cuanto a los módulos, los cuales se obtienen a partir de la relación existente entre el paso  $t$  y el número  $\pi$  a partir de la expresión  $(m = t / \pi)$ , recomendándose la primera serie de preferencia. Con más frecuencia son empleados los módulos recomendados por la norma internacional **ISO 54: 2007**: 1 ; 1,25 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 16 ; 20 ; 25; 32; 40.

### 1.5.3. Geometría de los engranajes cilíndricos de dientes rectos.

Los engranajes cilíndricos de dientes rectos son los más sencillos en cuanto a su geometría, aunque esto no quiere decir que deje de ser compleja. Los parámetros de la rueda aislada, el par dentado y el perfil evolvente deben ser determinados con rigurosidad, cualquier error de diseño o construcción puede provocar el deterioro parcial o total.

Cuando dos ruedas engranan, surgen parámetros que permiten valoraciones importantes de su montaje y funcionamiento. En los anexos # 3 y 4 se muestran la representación de la geometría de la rueda aislada y el par dentado, así como los parámetros que influyen en el cálculo geométrico de los engranajes cilíndricos de dientes rectos.

El perfil del diente está formado, desde el punto de vista geométrico, por la combinación de dos curvas, la curva de evolvente, que es aquella generada por el punto de una recta que se mueve con rodadura pura sobre una circunferencia básica, y la curva de trocoide que corresponde con el perfil del diente por debajo de la circunferencia básica de la rueda dentada, esta última es generada por un punto en un círculo que se mueve con rodadura pura sobre una recta (González Rey et al., 2005). En el anexo # 5 aparecen representadas las dos líneas que conforman el perfil del diente.

## **1.6. Modelación de los dientes de engranajes cilíndricos de dientes rectos utilizando AutoCAD.**

A continuación se analizarán las características del software AutoCAD, el que será utilizado en la etapa de creación del modelo geométrico.

En el modelo geométrico que se elaborará en AutoCAD se obtendrá una aproximación al perfil real del diente, la configuración que tendrá el diente que se modelará aparece representada en la figura 1.3 y las expresiones utilizadas para determinar los parámetros necesarios para la modelación en la tabla 1.2.

### **1.6.1. AutoCAD, características generales.**

Se plantea por Torres y Rodríguez (2010) y Rodríguez y Torres (2012) que: al igual que otros programas de Diseño Asistido por Computadora (CAD), AutoCAD gestiona una base de datos de entidades geométricas (puntos, líneas, arcos, etc.) con la que se puede operar a través de una pantalla gráfica en la que se muestran éstas, el llamado editor de dibujo. La interacción del usuario se realiza mediante comandos, de edición o dibujo, desde las líneas de órdenes, a la que el programa está fundamentalmente orientado. Las versiones modernas del programa permiten la introducción de estas mediante una interfaz gráfica de usuario que automatiza el proceso.

Como todos los programas de CAD, procesan imágenes de tipo vectorial, aunque admite incorporar archivos de tipo fotográfico o mapas de bits, donde se dibujan figuras básicas o primitivas (línea, arcos, rectángulos, textos, etc.) y mediante herramientas de edición se crean gráficos más complejos (Torres y Rodríguez, 2012). El programa permite organizar los objetos por medio de capas o estratos, ordenando el dibujo en partes independientes con diferente color y grafismo. El dibujo de objetos seriados se gestiona mediante el uso de bloques, posibilitando la definición y modificación única de múltiples objetos repetidos (Torres y Rodríguez 2010).

El programa AutoCAD está orientado a la producción de planos, empleando para ello los recursos tradicionales del grafismo en el dibujo, como color, grosor de líneas y texturas tramadas. AutoCAD, a partir de la versión 11, utiliza el concepto de espacio modelo y espacio papel para separar las fases del diseño y del dibujo en 2D y 3D, de las específicas para obtener planos trazados en papel y su correspondiente escala. La extensión del archivo de AutoCAD es .dwg, aunque permite exportar en otros formatos (el más conocido es el .dxf) (González y González, 2012).

### 1.6.2. Dibujo de un diente del engranaje cilíndrico en AutoCAD.

Para la modelación geométrica de la rueda dentada cilíndrica normal como punto de partida se tienen el número de dientes  $Z$  y el módulo  $m$ . El procedimiento para el dibujo del diente en AutoCAD fue elaborado por González y Alfonso (2006). La representación gráfica aparece en la figura 1.3 y las expresiones para la determinación de los parámetros en la tabla 1.2, estas responden a la determinación de los valores necesarios para dibujar el diente empleando el software AutoCAD.

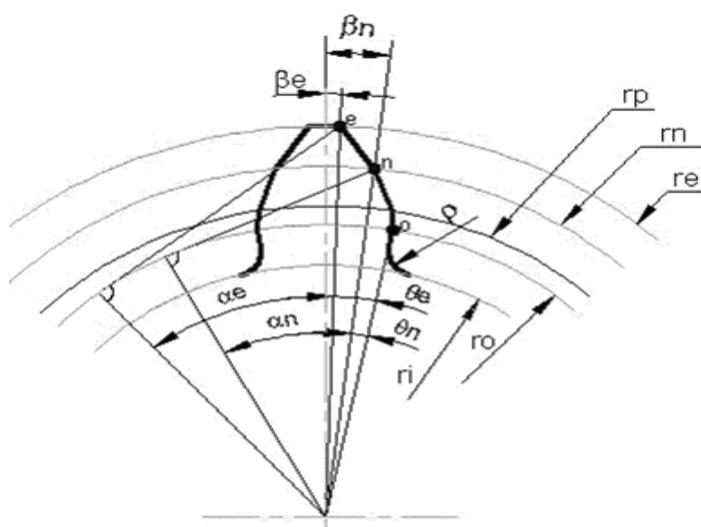


Figura 1.3. Parámetros para el dibujo del perfil del diente en AutoCAD.

Tabla 1.2. Ecuaciones para la determinación de los parámetros del perfil del diente.

1. $r_p = mc \cdot z/2$	7. $\alpha_p = \alpha_c = 20^\circ$	13. $S_p = \pi mc/2$
2. $r_o = r_p \cos \alpha_c$	8. $\alpha_n = \arccos (r_o/r_n)$	14. $\beta_p = S_p / 2r_p$
3. $r_i = r_p - 1,25mc$	9. $\alpha_e = \arccos (r_o/r_e)$	15. $\beta_o = \beta_p + \theta_p$
4. $r_e = r_p + mc$	10. $\theta_p = \tan \alpha_p - \alpha_p$	16. $\beta_n = \beta_o - \theta_n$
5. $\rho = (0.15 \dots 0.3)mc$	11. $\theta_n = \tan \alpha_n - \alpha_n$	17. $\beta_e = \beta_o - \theta_e$
6. $r_n =$ cualquier valor entre $r_p$ y $r_e$ .	12. $\theta_e = \tan \alpha_e - \alpha_e$	18. $S_e = 2 r_e \beta_e$
		19. $S_n = 2 r_n \beta_n$

### 1.7. Elaboración de engranajes por el método de generación.

Existen dos métodos básicos de elaboración de los dientes en las ruedas cilíndricas: el método de copia y el método de generación. Durante el método de copia, el borde cortante o la matriz de molde que forma el diente es una copia exacta de la rueda a fabricar o de cierta parte de ella. Por su parte; durante el procedimiento de generación, el borde cortante de la herramienta es capaz de crear mediante una rodadura controlada los perfiles de los dientes (Dobrovolski, 1980; Shigley y Mischke, 1996) como se muestra en el anexo # 6.

El método de generación supera al método de copia, pues el procedimiento de generación permite, de forma muy simple, variar parámetros de las ruedas dentadas con mayor racionalidad y precisión, además de permitir el tallado de ruedas dentadas con corrección en el flanco de los dientes, mediante el conveniente desplazamiento de la herramienta generadora con relación a la posición de referencia que se establece entre la rueda tallada y la recta de módulo en la herramienta empleada (Dobrovolski, 1980; Reshetov, 1985).

## **1.8. Resistencia al contacto de los engranajes cilíndricos de dientes rectos.**

A continuación se analizarán los criterios de resistencia para los materiales, el criterio del esfuerzo cortante máximo y el de energía de distorsión máxima o de Von Mises, así como la tensión de contacto y las condiciones de tensión en la zona de contacto del diente de un engranaje.

### **1.8.1. Criterios de resistencia para los materiales.**

Los elementos mecánicos fabricados de materiales dúctiles se diseñan de forma que el material no fluya bajo las condiciones de carga. Para un estado de esfuerzo plano se deberán determinar primero los esfuerzos principales, aplicar la teoría de falla y luego comparar los esfuerzos obtenidos con los esfuerzos de fluencia del material para determinar la posibilidad de falla del componente (Shigley y Mischke, 1996). Según el mismo autor, básicamente se utilizan dos teorías de falla: el criterio del esfuerzo cortante máximo y el de energía de distorsión máxima o de Von Mises.

Las expresiones 1.1 y 1.2 pertenecen al criterio de esfuerzos cortantes máximos.

$$|\sigma_1| < \sigma_F \quad 1.1$$

$$|\sigma_2| < \sigma_F \quad 1.2$$

Si los esfuerzos principales tienen signos opuestos, el criterio será el de la condición 1.3.

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_F \quad 1.3$$

Según Askeland (1998) y Mott (2006) la tensión de Von Mises es la tensión equivalente. Para los materiales dúctiles durante los cálculos de diseño los niveles de tensión se consideran seguros si:

$$\sigma_e \leq \sigma_F \quad 1.4$$

Donde  $\sigma_e$  es la tensión de von Mises y  $\sigma_F$  es el límite de fluencia del material.

La tensión de von Mises está definida por la expresión 1.5.

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad 1.5$$

Donde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  son las tres tensiones principales en un punto determinado de la estructura.

### 1.8.2. Tensión de contacto.

Las tensiones que surgen a partir de la interacción de las superficies de trabajo de los dientes en los engranajes se denominan tensiones de contacto “hertziano”, descubiertas por Hertz en Alemania en 1881, la expresión correspondiente al contacto “hertziano” aparece en el anexo # 7. Ha sido demostrado Hearn (1997) citado por González (2007) que la capacidad de resistencia y de transmisión de potencia de componentes de ingeniería sujetos a las condiciones de contacto no son completamente explicados por las ecuaciones de Hertz en sí misma, por eso es un requisito adicional esencial la consideración suplementaria de los siguientes factores:

- La Fluencia local y tensiones residuales asociadas.
- La presencia de tensiones residuales en la superficie de componentes endurecidos y su distribución con la profundidad.

### 1.8.3. Condiciones de tensión en la zona de contacto del diente de un engranaje.

La figura 1.4 muestra las condiciones de tensión que prevalecen alrededor del contacto de un diente de engranaje típico Hearn (1997) citado por González (2007). Inmediatamente en el punto o centro de contacto está la posición usual de la tensión de compresión máxima ( $\sigma_c$ ). Directamente bajo esta, y en una profundidad de aproximadamente una tercera parte de la anchura de contacto, está el esfuerzo máximo de cizallamiento ( $\tau_{\text{máx}}$ ) actuando en planos a  $45^\circ$  del eje de la carga. Entre estas dos posiciones tiene lugar el máximo esfuerzo de cizallamiento alternante actuando en planos perpendicular y paralelo a la superficie.

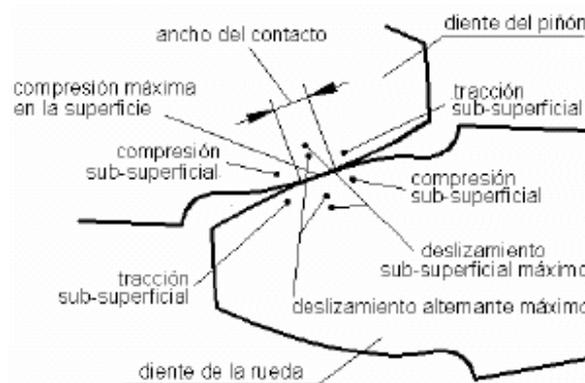


Figura 1.4. Condiciones de contacto en la región de contacto entre los dientes.

### 1.9. El Método de Elementos Finitos MEF.

El método de los elementos finitos (MEF) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy utilizado en diversos problemas de la ingeniería y la física. (Liu, 2003; Felippa, 2004).

El MEF está diseñado para ser usado en computadoras y permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas. Se usa en el diseño y mejora de productos y aplicaciones industriales, así como en la simulación de sistemas físicos complejos. La variedad de problemas a los que puede aplicarse ha crecido enormemente, siendo el requisito básico que las ecuaciones constitutivas y ecuaciones de evolución temporal del problema sean conocidas de antemano (Chessa et al., 2002; Felippa, 2004).

### 1.9.1. Tensiones y deformaciones planas.

En general las tensiones y deformaciones en una estructura constan de seis componentes para las tensiones, y seis para las deformaciones:

Componentes de las tensiones:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$

Componentes de las deformaciones:  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$

La figura 1.5 muestra el cubo infinitesimal donde se encuentran ubicadas las componentes de las tensiones, anteriormente mencionadas.

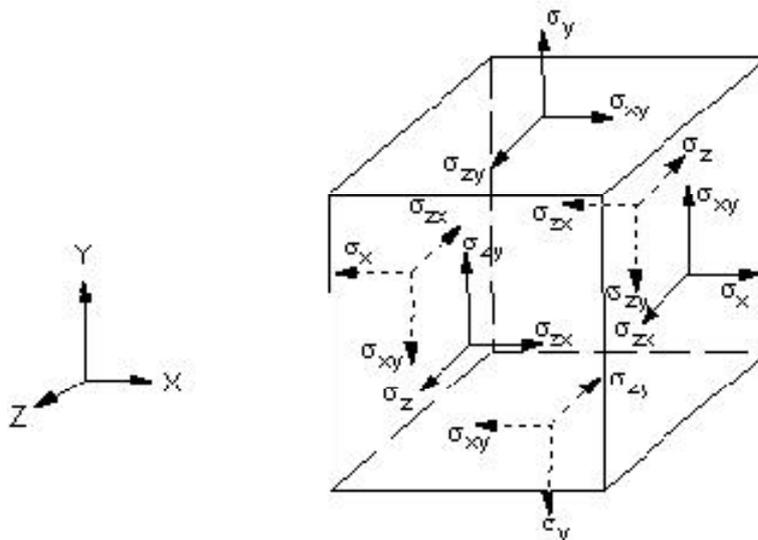


Figura 1.5. Componentes de las tensiones.

En dependencia de las condiciones el estado de las tensiones y deformaciones puede ser simplificado. Por lo tanto el análisis estructural general tridimensional puede ser reducido a un análisis bidimensional, permitiendo un número de asunciones y simplificaciones en su tratamiento (Felippa, 2004; Liu et al., 2009). Existen dos criterios, el de tensión plana y el de deformación plana, el primero es aplicado a los miembros que son relativamente delgados en relación con las otras dos dimensiones, el segundo es aplicado a los miembros relativamente gruesos (Liu, 2003).

El análisis teniendo en cuenta las idealizaciones de estado tensional plano y estado deformacional plano se basan en las siguientes asunciones:

- a) todas las cargas aplicadas actúan en el plano medio y son simétricas con respecto al plano medio.
- b) todas las condiciones de apoyo son simétricas con respecto al plano medio.
- c) los desplazamientos, deformaciones y tensiones pueden considerarse uniformes a lo largo del espesor.

A continuación aparece el comportamiento del estado tensional plano. La representación de un cuerpo bajo estado tensional plano se muestra en la figura 1.6.

Tensión plana:  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  ( $\epsilon_z \neq 0$ )

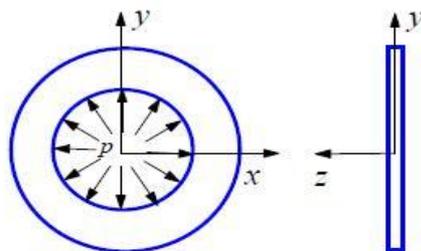


Figura 1.6. Representación de un cuerpo bajo estado tensional plano.

### 1.9.2. Relaciones constitutivas tensión-deformación-temperatura.

Para materiales elásticos e isotrópicos tenemos:

#### Tensiones planas.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad 1.6$$

$$\varepsilon = \mathbf{E}^{-1}\sigma + \varepsilon_0 \quad 1.7$$

Donde  $\varepsilon_0$  es la deformación inicial,  $\mathbf{E}$  es el módulo de Young,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson y  $\mathbf{G}$  es el módulo de cizallamiento.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad 1.8$$

Lo que significa que solo hay dos constantes del material independientes para los materiales homogéneos e isotrópicos.

Resolviendo la ecuación anterior en término de las deformaciones queda:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \right) \quad 1.9$$

Donde  $\sigma_0 = -\mathbf{E}\varepsilon_0$  es la tensión inicial.

### Deformaciones planas.

Las tensiones están relacionadas con las deformaciones por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \right) \quad \mathbf{1.10}$$

Las deformaciones iniciales debido a los cambios de temperatura son dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{1.11}$$

Donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica,  $\Delta T$  es el cambio de temperatura

Note que si la estructura es libre para deformarse bajo cargas térmicas, no habrá tensiones elásticas en la estructura.

### 1.9.3. Relaciones deformación y desplazamiento.

Para pequeñas deformaciones y pequeñas rotaciones, se tiene:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \mathbf{1.12}$$

En forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \mathbf{1.13}$$

$$\varepsilon = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad \mathbf{1.14}$$

A partir de esta relación, se conoce que las deformaciones son de un orden inferior que los desplazamientos.

#### 1.9.4. Ecuaciones de equilibrio.

En la teoría de la elasticidad, las tensiones en la estructura deben satisfacer las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y &= 0 \end{aligned} \quad \mathbf{1.15}$$

Donde  $f_x$  y  $f_y$  son fuerzas por unidad de volumen, tales como el peso propio.

### 1.9.5. Condiciones de frontera.

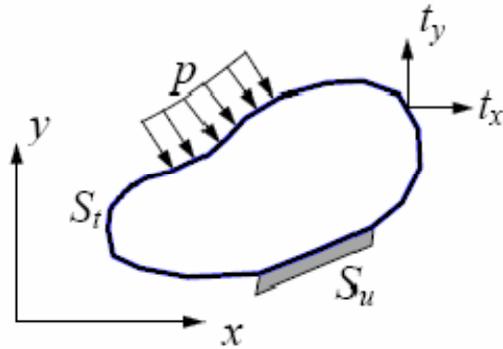


Figura 1.7. Condiciones de frontera.

La frontera S del cuerpo se pueden dividir en dos partes, S<sub>u</sub> y S<sub>t</sub>. Las condiciones de frontera ilustradas en la Figura 1.7 son descritas como:

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad \text{en } S_u \quad \mathbf{1.16}$$

$$t_x = \bar{t}_x, \quad t_y = \bar{t}_y, \quad \text{en } S_t \quad \mathbf{1.17}$$

Donde **tx** y **ty** son fuerzas de tracción, tensiones en la frontera, y las cantidades con barras son aquellas con valores conocidos.

En el MEF, todos los tipos de carga (cargas por unidad de superficie, fuerzas por unidad de volumen, fuerzas concentradas y momentos) son convertidos a fuerzas puntuales actuando en los nodos. La conversión de estas cargas está basada en el concepto de trabajo equivalente.

### 1.9.6. Solución de elasticidad exacta.

La solución exacta (desplazamientos, deformaciones y tensiones) de un problema dado deben satisfacer las condiciones de equilibrio, las condiciones

de frontera dadas y las condiciones de compatibilidad (las estructuras deben deformarse en una manera continua, sin grietas ni superposiciones en los campos de desplazamientos obtenidos).

### 1.9.7. Fórmula general de la matriz de rigidez.

Los desplazamientos  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  en un elemento plano son interpolados a partir de los desplazamientos nodales  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  usando las funciones de forma  $\mathbf{N}_i$  de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & \mathbf{0} & N_2 & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & N_1 & \mathbf{0} & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \mathbf{1.18}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad \mathbf{1.19}$$

Donde  $\mathbf{N}$  es la matriz de función de forma,  $\mathbf{u}$  el vector desplazamiento y  $\mathbf{d}$  el vector de desplazamiento nodal. Se asume que  $\mathbf{u}$  depende del valor nodal de  $u$  solamente y  $\mathbf{v}$  del valor nodal de  $v$  solamente.

De la relación deformación-desplazamiento el vector deformación es:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{d} \quad \mathbf{1.20}$$

Por su parte,

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N} \quad \mathbf{1.21}$$

( $\mathbf{B}$  es la matriz deformación-desplazamiento)

De donde:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad \mathbf{1.22}$$

### 1.9.8. Fórmula general para la matriz de rigidez del elemento.

A continuación se presenta la expresión 1.23 que define la forma general de la matriz de rigidez del elemento.

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad 1.23$$

$\mathbf{E}$  en este caso, es la matriz que es dada por la relación tensión-deformación (para tensiones planas).

La matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  es simétrica debido a que  $\mathbf{E}$  es simétrica. Dadas las propiedades del material, el comportamiento de  $\mathbf{k}$  depende solamente de la matriz  $\mathbf{B}$ , la cual depende de la función de forma. De este modo la calidad de los elementos finitos para representar el comportamiento de una estructura es determinada enteramente por la elección de la función de forma.

### 1.9.9. Cálculo de las tensiones.

La tensión en un elemento es determinada por la siguiente relación,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{E} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{E} \mathbf{d} \quad 1.24$$

Donde  $\mathbf{B}$  es la matriz deformación desplazamiento nodal y  $\mathbf{d}$  es el vector desplazamiento nodal, el cual es conocido una vez que la ecuación global de Elementos Finitos ha sido resuelta.

Las tensiones pueden ser evaluadas en cualquier punto dentro del elemento o en los nodos. En los paquetes de software, durante el Análisis por Elementos Finitos, en la etapa de post-proceso, son usados los gráficos de contorno para inspeccionar visualmente las tensiones resultantes.

#### **1.9.10. Modelación no-lineal.**

Según Felippa (2004) y Kim y Stoker (2008) existen tres tipos de no linealidades: la no-linealidad del material, la no-linealidad geométrica y la no-linealidad en la aplicación de las condiciones de frontera. Estos tres tipos de no-linealidades serán abordadas a continuación:

##### **No-linealidad del material.**

La no-linealidad del material ocurre cuando la relación tensión–desplazamiento deja de ser lineal y el acero fluye convirtiéndose en plástico. Todas las estructuras reales, en la mayoría de los casos, se comportan no linealmente de una forma u otra bajo cualquier nivel de carga. En muchos casos el análisis lineal puede ser empleado, pero en otros la solución lineal puede producir resultados erróneos y es por ello que debe realizar un análisis no-lineal.

##### **No-linealidad geométrica.**

La no-linealidad geométrica esta asociada a las irregularidades, que desde el punto de vista geométrico posee el modelo, como por ejemplo: los cambios bruscos de la geometría producidos por los ángulos que existen entre las líneas que forman el contorno y otros aspectos que produzcan una configuración irregular.

##### **No-linealidad de las condiciones de frontera.**

En este caso de no-linealidad juega un papel fundamental las cargas y las limitaciones de movimiento del modelo. El efecto que ejercen sobre el modelo puede estar dado por la posición, la forma de aplicación, el tipo de carga que se aplica y las magnitudes de estas.

#### **1.9.11. El método de solución no-lineal Newton-Raphson.**

Al presuponer una respuesta del material, post-límite de fluencia, se emplea un sistema de ecuaciones no-lineales y es requerido un método de solución

iterativo, en este caso es utilizado el Método de Newton-Raphson. Antes de cada solución (en los sub-pasos) el método Newton-Raphson evalúa el vector de fuerza fuera de balance, el cual es la diferencia entre la fuerza utilizada por el programa y la carga real aplicada, y entonces realiza una solución lineal, chequeando al final la convergencia. Si este último criterio no es satisfecho, entonces el vector de fuerza fuera de balance es reevaluado, la matriz de rigidez es actualizada y una nueva solución es obtenida, el proceso de iteración continúa hasta que el problema converge o hasta alcanzar el número máximo de iteraciones.

### **1.10. Simulación del fenómeno de contacto en engranajes cilíndricos de dientes rectos utilizando ANSYS.**

El programa ANSYS es considerado un software con grandes potencialidades para la solución de problemas de contacto (Contact Technology Guide, 2009). El fenómeno de contacto influye directamente en la resistencia de la capa superficial de los dientes de engranajes cilíndricos de dientes rectos.

#### **1.10.1. ANSYS características generales.**

El software de simulación ANSYS sirve de soporte a la ingeniería en la que respecta a la predicción del funcionamiento y la reacción de determinado producto bajo la acción del entorno real (Structural Analysis Guide, 2009).

Según (Structural Analysis Guide, 2009) ANSYS esta dividido en tres herramientas principales llamados módulos: pre-procesador, procesador y post-procesador. Tanto el pre-procesador como el post-procesador están previstos de una interfaz gráfica. Este procesador de elementos finitos para la solución de problemas mecánicos incluye: análisis de estructuras dinámicas y estáticas (ambas para problemas lineales y no-lineales), análisis de transferencia de calor y fluido-dinámica, y también problemas de acústica y de electromagnetismo. Usualmente estas herramientas se utilizan simultáneamente logrando mezclar problemas de estructuras junto a problemas de transferencia de calor como un

todo. El proceso típico de realización de un análisis aparece descrito a continuación.

### **1era Etapa Pre-proceso.**

- Creación de geometría y mallado.
- Definición de los materiales en base a sus constantes.
- Generación de la malla, realizando una aproximación discreta del problema en base a nodos.

### **2da. Etapa Proceso.**

- Aplicación de cargas, se aplican condiciones de borde en los nodos y elementos, se puede manejar valores de fuerzas, presión, desplazamiento, momento o rotación.
- Obtención de la solución.

### **3era Etapa. Post-proceso.**

- Visualización de los resultados.
- Listado de los resultados.

#### **1.10.2. EI CONTACT MANAGER.**

ANSYS cuenta con una herramienta que permite establecer los pares de contacto, el "Contact Manager". Este permite definir, ver, y editar pares de contacto. Provee una forma conveniente para operar todos los pares de contacto del modelo. El "Contact Wizard", herramienta a la cual se accede por el "Contact Manager", dirige el proceso de creación del par de contacto. La barra de herramientas del gestor de contacto proporciona una interfaz intuitiva para la creación y manejo de pares de contacto. El gestor soporta análisis de contacto superficie-superficie, nodo-superficie y otros. Permite definir manualmente las superficies "Target" y "Contact". Soporta geometrías 2D y 3D

y también contacto *rígido-flexible* o *flexible-flexible*. Permite especificar las propiedades del par de contacto por los "KEYOPTs" y las constantes reales para los elementos de contacto que se usarán. Despliega las especificaciones de los elementos de "Contact", elementos "Target", o ambos. Muestra los elementos del par de contacto seleccionado y los resultados del contacto. En Contact Technology Guide, 2009 aparece una descripción detallada de las posibilidades que brinda esta herramienta de ANSYS.

### **1.10.3. Elementos PLANE82, CONTA172 y TARGET169.**

Para la discretización de la geometría del modelo se empleará el elemento PLANE82 y para modelar el contacto entre las superficies de los dientes el CONTA172 y el TARGET169. La descripción de estos tres elementos aparece a continuación.

#### **1.10.3.1. Elemento PLANE82.**

PLANE82 es una versión de orden superior del elemento de dos dimensiones, de cuatro nodos PLANE42. Está definido por ocho nodos, teniendo dos grados de libertad en cada uno: traslaciones en las direcciones nodales x e y. Provee resultados más precisos para mallados automáticos mixtos (cuadrilátero-triangular) y puede tolerar formas irregulares sin mucha pérdida de exactitud. Los elementos de 8 nodos tienen formas compatibles de desplazamiento y están bien dotados para modelar bordes curvos (Structural Analysis Guide, 2009).

#### **1.10.3.2. Definición de los elementos de contacto CONTA172 y TARGET169.**

Para modelar la superficie de contacto, en el contacto *superficie-superficie*, se empleará el elemento CONTA172. Este elemento está definido por tres nodos (los elementos del sólido bajo la línea poseen nodos intermedios, como es el caso del elemento PLANE82, seleccionado para ser usado en la discretización del modelo geométrico). El eje de las abscisas del elemento está a lo largo de la línea I-J, como se muestra en la figura 1.7. El ordenamiento correcto de los nodos del elemento de contacto es imprescindible para establecer

correctamente el contacto. Los nodos del elemento deben ser ordenados de derecha a izquierda (Contact Technology Guide, 2009).

Este elemento soporta varios estados tensionales 2D. Incluye tensiones planas, deformaciones planas y estados axisimétricos. El estado tensional de este elemento es transmitido automáticamente al elemento subyacente.

Los elementos de la superficie de contacto 2D son asociados con los elementos del segmento del blanco 2D TARGET169 por un set de constantes reales compartidas. Para cualquier contacto *rígido-flexible* o *flexible-flexible*, una de las superficies deformables debe ser representada por la superficie de contacto.

El elemento TARGET169 se utiliza como elemento asociado al elemento de contacto CONTA172 para representar el contacto 2D entre superficies. Los elementos de contacto se superponen con la superficie de blanco, la cual se discretiza mediante un conjunto de elementos TARGET169. Los elementos de blanco se asocian a los elementos de contacto a través del conjunto compartido de constantes reales (Contact Technology Guide, 2009).

Mediante los elementos de contacto se puede imponer cualquier desplazamiento de traslación o rotación, fuerzas y momentos a los elementos de blanco. La representación de los elementos TARGET169 y CONTA172 aparece en la figura 1.8.

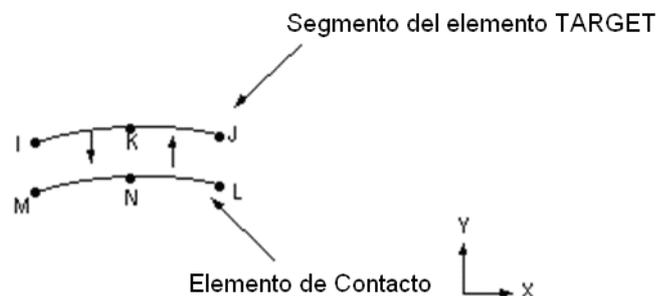


Figura 1.8. Elementos de Contacto.

#### **1.10.4. Caracterización de los problemas de contacto.**

Es de gran importancia, primeramente, definir el concepto de contacto. Según Contact Technology Guide (2009) el contacto ocurre cuando dos superficies se tocan entre sí de forma que se vuelven tangentes la una a la otra, en este caso están en contacto.

En el anexo # 8 aparece representado un par de ruedas engranadas y todos los parámetros que se encuentran relacionados con el contacto de un engranaje cilíndrico de dientes rectos. Este esquema es de gran importancia porque permite tener una idea más clara del fenómeno real.

Los problemas de contacto son altamente no lineales y requieren recursos computacionales significativos para la solución. Es importante entender los principios físicos del problema y establecer los modelos tan eficazmente como sea posible (Wang y Howard, 2008; Zeping, 2009)

En la bibliografía consultada (Jackson et al., 2005; Hueber et al., 2008) se coincide en que los problemas de contacto poseen dos dificultades significativas para su solución computacional, las que serán enunciadas a continuación:

- No se conocen las regiones de contacto hasta que no es resuelto el problema. Estas dependen de las cargas, las características del material, las condiciones de frontera, y otros factores.
- La mayoría de problemas de contacto necesitan incluir la fricción. Hay varias leyes de fricción y modelos para escoger, y todos son no lineales. La respuesta friccional en algunos casos puede ser caótica, dificultando la convergencia de la solución.

#### **1.10.5. Clasificación del contacto según la rigidez del material.**

El contacto puede ser clasificado de dos formas atendiendo a la rigidez de los materiales (Contact Technology Guide, 2009): flexible-flexible y rígido- flexible.

En el caso flexible-flexible, ambos o todos los cuerpos que contacta son deformables y tienen rigidez similar. Cuando una o más de las superficies que contacta son tratadas como rígidas, es decir, tiene una rigidez muy superior con relación al cuerpo deformable con que contacta, estamos en presencia del contacto rígido-flexible. En ambos casos de contacto es necesaria la compatibilidad, esta previene que las superficies de contacto se penetren la una en la otra.

En el caso que se analiza en este trabajo el modelo es rígido-flexible, debido a que la dureza de los dientes de una de las ruedas se considerará muy superior a la dureza de los dientes de la otra rueda.

#### **1.10.6. Métodos para la solución de los problemas de contacto.**

Existen varios métodos para la solución de los problemas de contacto, los cuales son explicados con claridad en *Contact Technology Guide (2009)*. Uno de los métodos es el *Método de Penalización*, que utiliza un resorte para forzar la compatibilidad en el contacto. La rigidez del resorte (rigidez del contacto) se denomina parámetro de penalización. El otro método es el de *Multiplicador de Lagrange*, este añade un grado de libertad adicional (la presión de contacto  $F$ ), para satisfacer la condición de impenetrabilidad. Y la combinación de ambos métodos, el de penalización y el de multiplicador de Lagrange, se denomina el *Lagrangiano Aumentado*. El método *Lagrangiano Aumentado* es el más aplicado cuando el contacto se realiza superficie-superficie y además es el que el "Contact Manager" de ANSYS sitúa como primera variante en estos casos. Este método en las primeras iteraciones determina el contacto en base a la rigidez de la penalización, una vez que el equilibrio es establecido, se verifica la tolerancia a la penetración, en este punto si es necesario se aumenta la presión de contacto y se continúan las iteraciones.

El método de *Lagrange Aumentado* para la solución en dirección normal emplea la expresión matemática 1.25.

$$F = k \Delta + \lambda$$

1.25

Donde:

**F**- Presión del contacto.

**k**- Rigidez del contacto.

**$\Delta$** - Deflexión del resorte (cantidad tal que proporcionará que el equilibrio sea satisfecho).

**$\lambda$** - Tolerancia de la penetración.

Si existe fricción o las superficies son rugosas entonces una situación similar ocurre en la dirección tangencial. Para ser empleada la condición de impenetrabilidad en dirección tangencial, las dos superficies no deben deslizarse una con respecto a la otra. El algoritmo de penalización es usado en esta dirección y se emplean parámetros análogos.

Si las superficies están pegadas la expresión utilizada es la 1.26.

$$F_{\text{tang}} = k_{\text{tang}} \cdot x_{\text{deslizamiento}}$$

1.26

**F tang**- Fuerza tangencial del contacto.

**k tangencial**- Rigidez del contacto tangencial.

**x deslizamiento**- Magnitud del deslizamiento (es idealmente cero para el contacto pegado, aunque se permite algún desplazamiento relativo pequeño).

Según plantean Sraml y Flasker (2007) y Hueber et al. (2008) incluir fricción en un modelo de contacto permite que se desarrollen fuerzas cortantes entre las superficies de contacto. En un modelo de fricción de Coulomb las dos superficies soportan esfuerzos cortantes hasta que comienzan a deslizarse la una con respecto a la otra.

### 1.10.7. Elementos de Contacto.

Contact Technology Guide, (2009) describe tres tipos elementales de contacto, los que serán descritos y analizados a continuación. El contacto *nodo-nodo* implican que la localización final del contacto sea conocida de antemano. Estos elementos *nodo-nodo* son empleados para modelar problemas en los cuales las dos superficies están alineadas, la cantidad de deslizamiento es despreciable y las deflexiones y rotaciones de las dos superficies permanecen pequeñas. En los elementos *nodo-superficie* las áreas de contacto son desconocidas y se permite el deslizamiento. Los elementos de contacto de este tipo se usan típicamente para modelar aplicaciones de contacto *punto-superficie*.

#### 1.10.7.1. Elemento Superficie-superficie.

Las áreas de contacto de este tipo de elemento son desconocidas y se permite gran cantidad de deslizamiento. Existen elementos *superficie-superficie* para contacto entre cuerpos *rígido-flexible* y *flexible-flexible*. Estos elementos usan el concepto de “target surface” y “contact surface” para formar un par de contacto. Usan por defecto el método de *Lagrangiano Aumentado* para asegurar la compatibilidad de la deformación. En la figura 1.9 aparecen representadas las Superficie "Target" y la Superficie "Contact" y la interacción cuando el contacto que se establece es rígido-flexible y superficie-superficie.

Esta variante de contacto será usada en la simulación del contacto en los dientes de los modelos, porque es la que más se asemeja a las condiciones de contacto a las que se encuentran sometidos los engranajes.

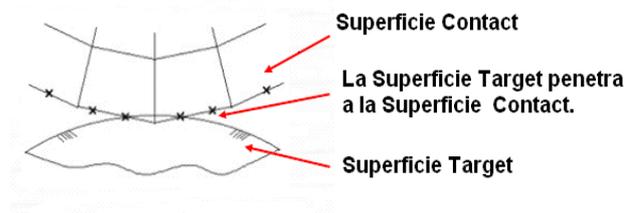


Figura1.9. Superficies de contacto.

### **1.10.8. Ventajas del Contacto Superficie-superficie.**

Coinciden Hueber et al. (2008), Contact Technology Guide (2009) y Sraml y Flasker 2007 en que: el contacto superficie-superficie posee ventajas que, en un número considerable de casos, lo hace superior a los otros tipos de contacto. Las ventajas aparecen enunciadas a continuación:

- Compatible con elementos de bajo orden y alto orden.
- Soporta grandes deformaciones con deslizamiento y fricción.
- Dan mejores resultados (Fácil de post-procesar la presión de contacto y los esfuerzos por fricción).
- Tienen en cuenta el espesor y los cambios en el espesor.
- Solución semiautomática de los cálculos de rigidez de contacto.
- Opciones a tipo “Pilot node” y ”Wizard” para colocar los parámetros de la optimización.

### **1.10.9. Pasos generales en un análisis de contacto.**

Según Contact Technology Guide, (2009) los pasos para realizar un análisis de contacto son los siguientes:

- 1ero. Crear el modelo de elementos Finitos del problema.
- 2do. Designar las superficies “contact” y “target”.
- 3ro. Colocar las opciones y variables reales.
- 4to. Crear los elementos de la superficie “target”.
- 5to. Crear los elementos de la superficie de “contact”.
- 6to. Aplicar las condiciones de frontera.

7mo. Definir las opciones del solucionador y los pasos de carga.

8vo. Resolver.

9no. Revisar los resultados.

#### **1.10.10. Consideraciones fundamentales para establecer el contacto superficie-superficie.**

Es necesario designar las superficies “target” y “contact” (Para contacto rígido-flexible la superficie rígida es siempre designada como la superficie “target”). Los elementos de contacto están restringidos para que no penetren la superficie “target”. Sin embargo los elementos “target” pueden penetrar la superficie de “contact”. Para el contacto rígido-flexible la superficie “target” es siempre la rígida.

#### **1.11. Conclusiones parciales del capítulo.**

1. El cálculo de las tensiones de contacto en los flancos del diente, por los métodos analíticos es muy complejo y se hace posible utilizando muchas asunciones, por lo que se recomiendan los métodos numéricos para su estudio, apoyados en la existencia de potentes modelos de análisis basados en el MEF que permiten reproducir comportamientos estructurales complejos con ecuaciones constitutivas no-lineales.
2. El software AutoCAD permite realizar la modelación bidimensional del engranaje cilíndrico de dientes rectos, lográndose un modelo aproximado al objeto real.
3. Utilizando las herramientas que proporciona ANSYS es posible simular el contacto entre los dientes de engranajes cilíndricos de dientes rectos.
4. La aplicación del MEF en la ingeniería de engranajes es abordada por muchos autores y generalmente estos tratan la comprobación de la resistencia de los dientes al cariado, a la fractura y al desgaste adhesivo y otros fenómenos

relacionados con el deterioro, así como la introducción de nuevos procedimientos de cálculo y modelos de análisis.

5. Las tensiones tangenciales alternantes juegan un papel importante en el deterioro de los engranajes por picadura, facilitando el surgimiento de la fatiga, generándose grietas en el interior del diente, las que posteriormente provocan imperfecciones de la superficie que influyen negativamente en el funcionamiento de los engranajes.

6. No se encontraron referencias que aborden los resultados de estudios sobre la interrelación que existe entre los parámetros de contacto y las tensiones tangenciales alternantes empleando el MEF, ni de cómo se manifiesta su comportamiento en la zona próxima al polo de engrane.

## CAPÍTULO 2. MATERIALES Y MÉTODOS.

En este capítulo se hace una descripción de la elaboración del modelo geométrico, los pasos a seguir y los parámetros utilizados para el dibujo en AutoCAD, también se describe la definición de los valores necesarios para la simulación del contacto entre los pares de dientes utilizando el programa ANSYS.

### 2.1. Elaboración del modelo en AutoCAD y compatibilidad con ANSYS.

Utilizando el Software destinado para el cálculo de engranajes cilíndricos de dientes rectos con distancia inter-axial libre y el manual de usuario del mismo, elaborados por González (2006), se logra determinar las coordenadas necesarias para realizar el dibujo en AutoCAD del perfil evolvente del diente. Las coordenadas polares y rectangulares que aparecen en las tablas 2.1 y 2.2 serán utilizadas para este propósito.

*Tabla 2.1. Coordenadas polares de los puntos utilizados para el dibujo del diente en AutoCAD.*

<b>Puntos</b>	<b>Radios</b>	<b>Valores de los radios. (mm)</b>	<b>Ángulos con respecto al eje y.</b>	<b>Valores de los ángulos. (°)</b>
<b>Pe</b>	Re	39,00	$\beta_e$	1,58
<b>Pp</b>	Rp	36,00	$\beta_p$	3,75
<b>Po</b>	Ro	33,83	$\beta_o$	4,60
	Ri	32,25		

*Tabla 2.2. Coordenadas rectangulares absolutas de los puntos utilizados para el dibujo de los dientes en AutoCAD.*

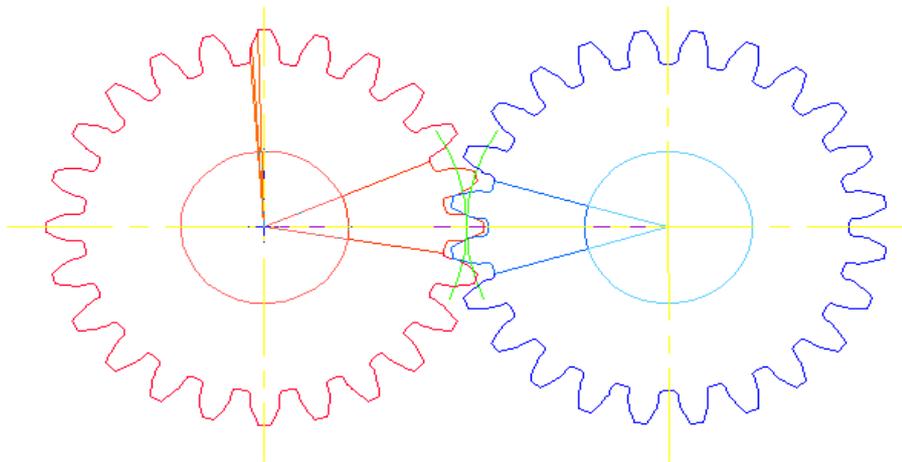
<b>Puntos</b>	<b>Valor de la coordenada x. (mm)</b>	<b>Valor de la coordenada y. (mm)</b>
Pn1	-1,5800	37,9671
Pn2	-2,0094	36,9454
Pn3	-2,5003	35,3690
Pn4	-2,6154	34,8164
Pn5	-2,6926	34,2661
Pi	-2,5876	32,1460

### **2.2.1. Pasos para la creación del modelo en AutoCAD.**

Para obtener el modelo representado en la figura 2.1 se siguió la secuencia de pasos que aparece a continuación:

1. Construir el contorno del perfil del diente a partir de los datos que aparecen en las tablas 2.1 y 2.2.
2. Hacer un espejo al perfil del diente para crear los dos flancos del diente.
3. Crear un arco con radio igual al de la circunferencia exterior de la rueda para lograr la parte superior del diente, y crear los arcos de los radios de redondeo del pie de los dientes.
4. Realizar un arreglo polar con la cantidad de dientes de la rueda (24 dientes) y el ángulo que existirá entre cada uno de los dientes (15°).
5. Crear la circunferencia que representará el agujero donde se acoplará el árbol.

6. Copiar la rueda en el punto que coincide con el centro de rotación de la segunda rueda, el que se encuentra en un punto en la distancia inter-axial entre las dos ruedas.
7. Definir mediante líneas y construir una poli-línea con la geometría del modelo a utilizar en ANSYS.
8. Girar  $7,5^\circ$  la poli-línea de la derecha para lograr el engrane con la de la izquierda (en este momento el diente de la rueda derecha es simétrico a la línea horizontal).
9. Girar  $11,25^\circ$  la poli-línea de la izquierda y  $-11,25^\circ$  la de la derecha, para lograr con este giro que los dientes contacten en un punto que coincida con las circunferencias primitivas de los dos modelos (en el polo de engrane).
10. Girar  $2^\circ$  la poli-línea de la izquierda y  $-2^\circ$  la de la derecha desde la posición de  $-11,25^\circ$  para obtener la posición  $-9,25^\circ$ .
11. Girar  $-2^\circ$  la poli-línea de la izquierda y  $2^\circ$  la de la derecha desde la posición de  $-11,25^\circ$  para obtener la posición  $-13,25^\circ$ .



*Figura 2.1. Modelo en AutoCAD del par dentado con dos pares de dientes seleccionados.*

### **2.2.2. Compatibilidad del modelo elaborado en AutoCAD con el programa ANSYS.**

Después de obtener los tres modelos geométricos a partir la representación en AutoCAD, de los cuales aparece una representación general en la figura 2.1 y los pasos de creación enunciados anteriormente, de donde se obtuvieron las coordenadas de los puntos notables de las poli-líneas del modelo de los pares dentados, utilizando los comandos de AutoCAD "Inquiry" (búsqueda) – "List" (listar) se obtuvo una lista de las coordenadas de los "at points", los que fueron copiados en un archivo con extensión .txt como se muestra en el anexo # 9 y convertidos en "key points" (puntos claves) para lograr que fueran legibles por el programa ANSYS, además se modificaron otros aspectos de los ficheros .txt que facilitaron la legibilidad por ANSYS.

Se accedió a los ficheros .txt desde ANSYS mediante la orden "read input from" (leer entrada desde) lográndose cargar en ANSYS todos los "key points" necesarios para construir las líneas que conformarán la geometría de los modelos.

El procedimiento anterior se realizó a partir de la metodología propuesta por González y Peña, (2012).

## **2.2. Definición del análisis de contacto a realizar utilizando ANSYS.**

En este epígrafe se definirán los aspectos que permitirán realizar el análisis de contacto por el Método de Elementos Finitos. La selección de valores, la toma de decisiones, los pasos para realizar la solución computacional de los modelos y el control de la solución.

### **2.2.1. Parámetros básicos de los modelos geométricos.**

Los modelos geométricos que se utilizarán en la análisis empleando el software ANSYS, se elaboraron seleccionando dos dientes de cada una de las ruedas modeladas en AutoCAD, de los cuales un par establecerá contacto en el polo de engrane, en una variante y próximo a este en las dos restantes variantes. Los parámetros básicos de los modelos geométricos aparecen en la tabla 2.3.

Tabla 2.3. Parámetros básicos de los modelos geométricos.

<b>Parámetros</b>	<b>Valores mm</b>
Módulo , <b>m</b>	3,00
Diámetro de la circunferencia exterior, <b>de</b>	78,00
Diámetro de la circunferencia primitiva, <b>d</b>	72,00
Diámetro de la circunferencia básica, <b>do</b>	67,66
Diámetro de la circunferencia interior, <b>di</b>	64,50
Número de dientes, <b>z</b>	2
Ancho, <b>b</b>	25
Coefficiente de corrección, <b>ξ</b>	0,00

### 2.2.2. Posiciones de los modelos geométricos.

Las tres posiciones mostradas en la figura 2.2 se han definido con el fin de hacer un análisis comparativo del comportamiento del proceso de carga de los dientes durante el engrane de dos ruedas. Este análisis se realiza partiendo de un valor del grado de recubrimiento, que en este caso es de 1,50, el cual fue determinado utilizando el mismo software destinado para el cálculo de engranajes cilíndricos de dientes rectos con distancia inter-axial libre y su manual de usuario, elaborados por González (2006).

Cuando se observa la figura 2.2, en la posición  $-11,25^\circ$  los dientes contactan en el polo de engrane, y en las posiciones  $-9,25^\circ$  y  $-13,25^\circ$  los dientes se encuentran en posiciones próximas a donde empiezan a engranar dos pares de dientes. Como puede apreciarse la diferencia entre posiciones es de  $2^\circ$ .

El giro que se realiza está basado en el grado de recubrimiento que tiene un valor de 1,50, como se expresó anteriormente, lo que representa el porcentaje del engrane en que existen dos pares de dientes engranados, el valor de este porcentaje es de 75%, el otro 25% corresponde al de un solo par de dientes. Si el ángulo entre los dientes es  $15^\circ$ , los  $4^\circ$  que en total se giraron las poli-líneas se

encuentran próximos al valor verdadero, para el cual solamente existe un solo par de dientes engranados. De esta forma se logran colocar los dientes en tres posiciones diferentes, donde solo existe engranado un solo par de dientes.

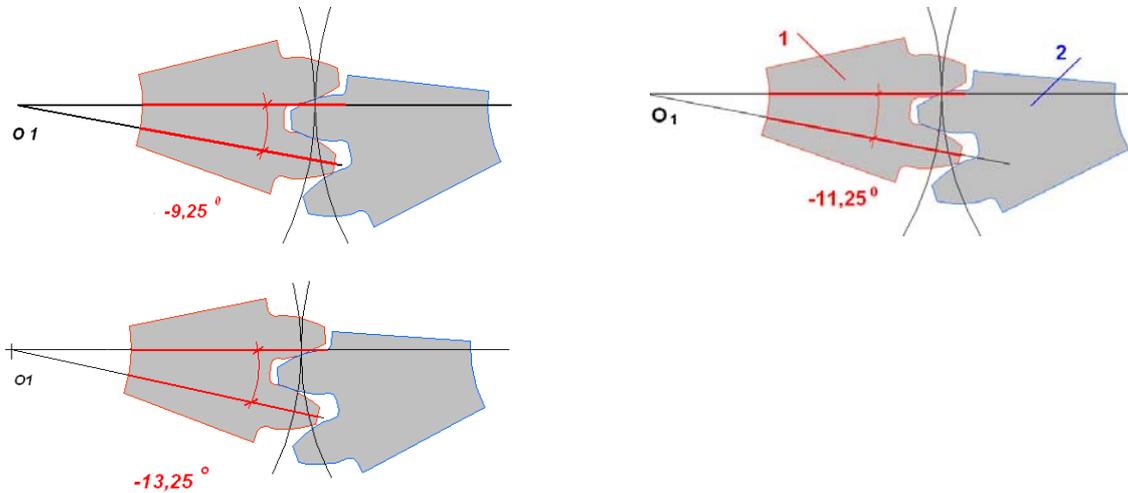


Figura 2.2. Posiciones del elemento rígido (1) y del elemento flexible (2), utilizadas para realizar el análisis de contacto (-9,25°; -11,25°; -13,25°).

### 2.2.3. Propiedades mecánicas del material.

El comportamiento plástico de los materiales de ingeniería se caracteriza por la deformación irre recuperable, comienza cuando las tensiones exceden el límite de fluencia del material. Como usualmente hay poca diferencia entre el límite de elasticidad y el límite de proporcionalidad, el programa ANSYS asume en los análisis de plasticidad que estas dos proporciones son coincidentes. Más allá de este límite, la relación de tensión-deformación se volverá no-lineal, pero necesariamente no se volverá inelástica.

El modelo del material a utilizar se definirá a partir de la opción Bilineal Isotrópico, donde se usa el criterio de fluencia de Von Mises. Las propiedades mecánicas que se le atribuirán al modelo aparecen en la tabla 2.4.

Tabla 2.4. Propiedades mecánicas del material.

<b>Magnitud</b>	<b>Valores en el SI</b>
Módulo de Elasticidad (Young).	200 GPa
Coefficiente de Poisson.	0,27
Límite de Fluencia.	390 MPa
Módulo Tangente.	140 GPa
Coefficiente de rozamiento	0,3

#### **2.2.4. Creación del modelo geométrico.**

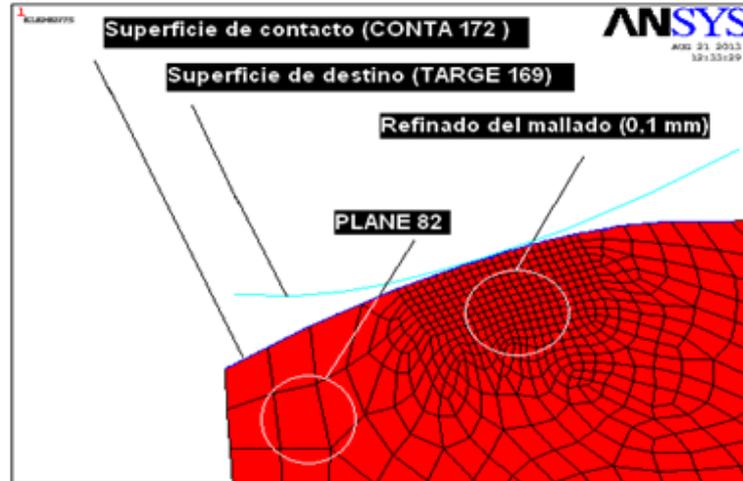
Para la creación del modelo geométrico se construyeron las líneas que conforman las dos geometrías (anexo # 12) a partir de los "key points" mostrados en el anexo # 11. Posteriormente se construyeron las áreas de las dos partes del modelo, el área correspondiente al elemento flexible fue subdividida en la zona próxima al contacto para facilitar el refinado del mallado (anexo # 13).

#### **2.2.5. Mallado del modelo y par de contacto.**

La obtención del modelo discretizado se logra a partir del mallado libre del área del elemento flexible, que no interactúa con el modelo rígido, y posteriormente el refinado del mallado próximo a la parte de la superficie del diente donde se produce el contacto. En la figura 2.3 se puede apreciar la diferencia en la densidad del mallado. Básicamente, la selección de un modelo discretizado sensato está basado en dos tareas importantes: la selección del tipo de elemento finito y la selección de densidad del mallado necesario.

Las condiciones del contacto de los dientes de los pares engranados son sensibles a la geometría de las superficies en contacto, lo que significa que los elementos cerca de la zona de contacto necesitan ser refinados, lo que no es

recomendable para el modelo en su conjunto, con el propósito de reducir los requerimientos computacionales (González 2007).



*Figura 2.3. Discretización mediante mallado (elemento PLANE82) y establecimiento del par de contacto (elementos CONTA172 y TARGET169).*

#### **2.2.5.1. Constantes reales empleadas en el contacto.**

Los parámetros de entrada del contacto definen la interacción entre la superficie rígida (superficie de destino) y la deformable (superficie de contacto) figura 2.3, se modifican en función de los resultados que se obtengan en cada uno de los parámetros de salida, puesto que influyen directamente en los valores de estos, condicionando la interacción de la superficie deformable y la superficie rígida. Las constantes reales del elemento CONTA172 son las que más influencia ejercen sobre la obtención de un modelo de contacto adecuado.

La constante real  $FKN$  se utilizará para definir el factor de rigidez normal del contacto. El rango del factor está entre 0,001-100. Un valor pequeño facilita la convergencia pero provoca una penetración mayor. Si la deformación es considerable es recomendable usar un valor entre (0,01- 0,1). Si existen dificultades de convergencia o demasiada penetración, entonces se debe

ajustar este factor de rigidez. En la simulación realizada se asignó el valor de  $FKN=1$ , lográndose parámetros de salida del contacto aceptables.

Se definió  $FTOLN = 0,1$  teniendo en cuenta que este valor no debe ser mayor que la profundidad del elemento subyacente. La dimensión de los elementos subyacente es  $0,1\text{mm}$ . La compatibilidad del contacto se satisface si la penetración está dentro del intervalo del valor  $FTOLN$ . En los tres modelos analizados la penetración máxima de la superficie rígida en la superficie deformable está por debajo del valor asignado a  $FTOLN$ .

Se mantuvo el valor que ANSYS asigna por defecto a la constante  $PINB$  (Región de Pinball). Por defecto la región del Pinball es 4 veces la profundidad del elemento subyacente para el contacto rígido-flexible, es decir  $PINB= 0,4$ . Esta región es definida por ANSYS para eliminar la configuración espuria del contacto que surge cuando un segmento del blanco está muy distante del elemento de contacto pero penetra en él.

Las constantes  $PMIN$ ,  $PMAX$ ,  $ICONT$ ,  $CNOF$  no fue necesario modificarlas debido a que no se presentaron problemas de falta de contacto inicial por motivo del modelado de la geometría y la generación de la malla, o a superficies curvas o irregulares.

#### **2.2.6. Definición de las condiciones de fronteras y cargas.**

Las cargas se aplicarán en tres puntos de la línea inferior del elemento flexible, como se muestra en la figura 2.4, con el fin de lograr un efecto similar al producido por el momento que transmite el árbol acoplado a una posible herramienta deformadora (elemento rígido), este fue tomado de los experimentos realizado en (González, 2007) y su valor es de  $361\ 946,625\ \text{N mm}$ .

La limitación de desplazamientos, tanto para el elemento flexible, como para el rígido se aplicará en las líneas que aparecen señaladas en la figura 2.4. Dicha

limitación de desplazamiento eliminará todos los grados de libertad del modelo rígido y los de la línea señalada del modelo flexible.

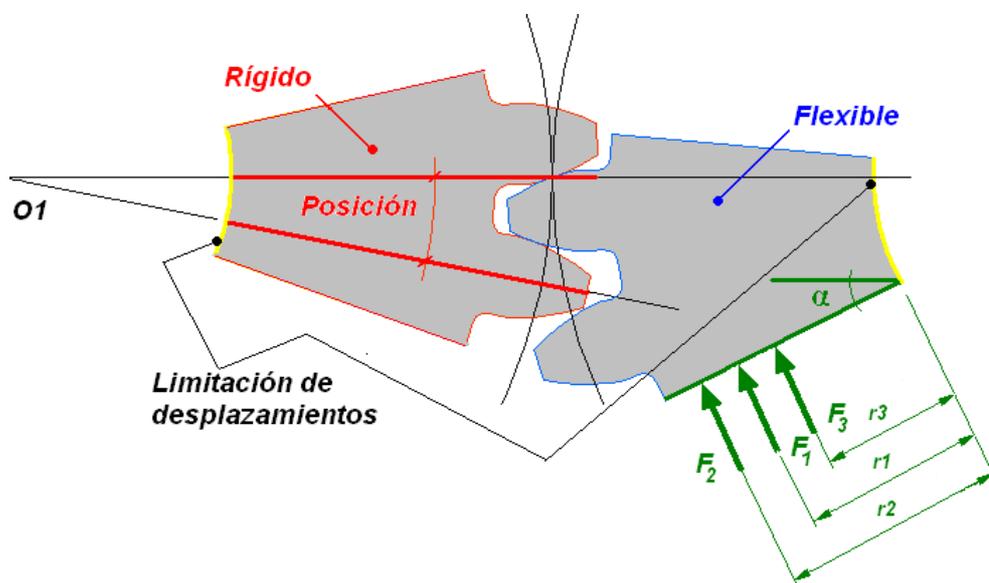


Figura 2.4. Aplicación de las condiciones de fronteras y las cargas

Los radios ( $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ) y las fuerzas ( $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ) que aparecen en la figura 2.4, así como sus valores tabla 2.5, se definieron a partir de proporciones que permitieran la aplicación de las fuerzas en tres posiciones de la línea del contorno del modelo flexible, esta distribución se hizo a partir de una similar realizada por (González, 2007), donde se obtuvieron buenos resultados en la simulación.

Tabla 2.5. Proporciones de los radios y fuerzas para la aplicación de cargas al modelo.

No.	radios mm	Fuerzas N
2	13,7211	12600
1	11,4431	10500
3	8,6677	7950

Para la aplicación de las fuerzas en el software ANSYS es necesario descomponer las fuerzas representadas perpendiculares a la superficie (figura 2.4) en dos componentes  $F_x$  y  $F_y$ . En el anexo # 14 aparece el modelo de ANSYS con la representación de las fuerzas y las limitaciones de los desplazamientos. Para la descomposición se definieron los ángulos de inclinación de las líneas de acción de las fuerzas con respecto a la vertical para cada una de las posiciones, así como el seno y el coseno de dichos ángulos, los que aparecen en la tabla 2.6.

*Tabla 2.6. Ángulo de inclinación ( $\alpha$ ) de las líneas sobre las que se aplicarán las fuerzas para cada una de las posiciones.*

<b>Pos</b>	<b>-9,25 °</b>	<b>-11,25 °</b>	<b>-13.25 °</b>
<b><math>\alpha</math></b>	<b>26 °</b>	<b>28 °</b>	<b>30 °</b>
<b>cos <math>\alpha</math></b>	0,89879	0,88295	0,86602
<b>sen <math>\alpha</math></b>	0.43837	0,46947	0,5

A partir de los ángulos, senos y cosenos de la tabla 2.6 se procede a calcular las componentes de las fuerzas para las tres posiciones (-9,25°; -11,25°; -13,25°). Los valores de estas componentes aparecen en las tablas 2.7, 2.8 y 2.9, estas fuerzas serán las que se aplicarán a cada uno de los modelos.

Tabla 2.7. Componentes  $F_x$  y  $F_y$  de las fuerzas para la posición  $-9,25^\circ$ .

Posición $-9,25^\circ$					
#	Fuerza (N)	Sen $\alpha$	$F_x$ (N)	Cos $\alpha$	$F_y$ (N)
2	12600	<b>0,43837</b>	-5523,462	<b>0,89879</b>	11324,754
1	10500		-4602,885		9437,295
3	7950		-3485,042		7145,3805

Tabla 2.8. Componentes  $F_x$  y  $F_y$  de las fuerzas para la posición  $-11,25^\circ$ .

Posición $-11,25^\circ$					
#	Fuerza (N)	Sen $\alpha$	$F_x$ (N)	Cos $\alpha$	$F_y$ (N)
2	12600	<b>0,46947</b>	-5915,322	<b>0,88295</b>	11125,17
1	10500		-4929,435		9270,975
3	7950		-3732,2865		7019,4525

Tabla 2.9. Componentes  $F_x$  y  $F_y$  de las fuerzas para la posición  $-13,25^\circ$ .

Posición $-13,25^\circ$					
#	Fuerza (N)	Sen $\alpha$	$F_x$ (N)	Cos $\alpha$	$F_y$ (N)
2	12600	<b>0,5</b>	-6300	<b>0,86602</b>	10911,852
1	10500		-5250		9093,21
3	7950		-3975		6884,859

### 2.2.7. Control de la solución.

El control de la solución es de gran importancia en la etapa de pre-proceso. Permite el ahorro de recursos computacionales debido a que ajusta el programa con el fin de dar una solución lo más económica posible al problema. El control

de la solución permite que el programa se detenga una vez que la solución converja. Los valores asignados al número de sub-pasos, número máximo de sub-pasos y número mínimo de sub-pasos de los modelos tratados en el presente trabajo aparecen en la tabla 2.10.

*Tabla 2.10. Control de la solución definido para los tres modelos correspondientes a las posiciones -9,25°; -11,25°; -13,25°*

Número de subpasos	100
Número máximo de subpasos	1000
Número mínimo de subpasos	20

En el anexo # 10 aparecen los códigos ANSYS que contienen la etapa de pre-proceso y de solución de los modelos correspondientes a las posiciones -9,25°, -11,25°, -13,25°.

### **2.3. Conclusiones parciales del capítulo.**

1. El modelo geométrico obtenido en AutoCAD , así como las tres posiciones tomadas para realizar el contacto, permitirán la simulación por el MEF del comportamiento de los parámetros del contacto y las tensiones tangenciales alternantes y la medida en que estos influyen en la región próxima al polo de engrane de los engranajes cilíndricos de dientes rectos.
2. La discretización del modelo, principalmente la realizada en la zona próxima a la parte de la superficie que contactará, definirá la ubicación geométrica de los valores de los diferentes parámetros, a partir de una disposición de los nodos perpendicular con respecto a la superficie y de una distancia de separación entre ellos de 0,1mm.
3. La selección del tipo de contacto, las características del mismo, las constantes reales y sus valores, permitirán aproximar el modelo de contacto

creado en ANSYS a las condiciones reales en las que se produce el contacto cuando engranan dos dientes de un engranaje cilíndrico de dientes rectos.

4. Se crearon condiciones de frontera aplicadas al modelo que permitirán la aproximación a las condiciones reales de carga a las que se encuentra sometida la superficie de trabajo de los dientes. Se tomaron en cuenta las exigencias del modelo rígido-flexible en cuanto a la aplicación de fuerzas y limitaciones de los desplazamientos.

5. Los datos de salida con los resultados de la simulación permitirá graficar el comportamiento de los parámetros de contacto y las tensiones tangenciales alternantes en el perfil del diente y también en la capa sub-superficial en función de las cargas aplicadas al modelo.

6. Las gráficas de contorno del comportamiento de los parámetros del contacto y de las tensiones tangenciales alternantes permitirán monitorear su desarrollo y distribución en los modelos elaborados para las tres posiciones de contacto.

7. Los datos obtenidos garantizan que se pueda graficar en Excel las tensiones tangenciales alternantes, permitiendo visualizar su comportamiento.

8. Ejecutando nuevamente los ficheros, que contiene las líneas de comandos de ANSYS, existe la posibilidad de modificar los datos de la etapa de pre-proceso y también obtener más información sobre la simulación del contacto realizada en el presente trabajo.

## **CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.**

Como es explicado en los capítulos anteriores se utilizó el Software ANSYS para modelar el fenómeno de contacto en la superficie de trabajo de un engranaje cilíndrico de dientes rectos, con el fin de hacer un análisis para tres posiciones de la parte de la superficie próxima al polo de engrane, donde solo existe un par de dientes engranados. En el presente capítulo se hará el análisis correspondiente de los resultados obtenidos a partir de la simulación, haciendo énfasis en los parámetros del contacto y las tensiones tangenciales alternantes para cada una de las posiciones escogidas.

### **3.1. Análisis del comportamiento de los parámetros del contacto.**

Los parámetros de salida del contacto, son de gran importancia debido a que permiten determinar los nodos que se encuentran contactando. La penetración de la superficie rígida en la superficie flexible, la presión del contacto, las tensiones producidas por la fricción entre las superficies, el deslizamiento entre las superficies, la tensión total, etc., permiten hacer una valoración a cerca del comportamiento de la interacción ente las superficies. Los datos de salida pueden ser modificados a partir los datos de entrada de los elementos CONTA172 y TARGET169, procurando acercar el modelo computacional a las condiciones de contacto deseadas. Los nodos de la superficie de contacto se encuentran interconectados con los nodos de los elementos subyacentes, por lo que el efecto que ejerce la superficie rígida sobre la superficie deformable influye directamente en los parámetros de resistencia que se alcanzan hacia el interior del modelo.

#### **3.1.1. Selección de los nodos donde se medirán los valores de los parámetros del contacto.**

Para las tres posiciones la superficie TARGET y la superficie CONTACT establecen el contacto en diferentes partes, en la tabla 3.1 aparecen los nodos de la superficie de contacto que se encuentran en estado pegado o en deslizamiento, para cada una de las posiciones. El orden de los nodos en la

tabla 3.1 se definió de acuerdo a la posición que ocupan desde la cabeza hacia el pie del diente en la superficie de contacto. Los números de los nodos en la tabla 3.1 señalados en **negrita** corresponden a los nodos en estado de contacto en deslizamiento.

*Tabla 3.1 Nodos seleccionados para realizar el análisis de contacto.*

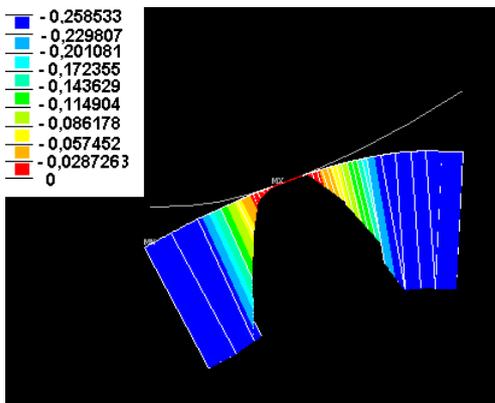
<b>Posición</b>	<b>-9,25°</b>	<b>-11,25°</b>	<b>-13,25°</b>
	10	-	-
	12	-	-
	14	-	-
	16	-	-
	18	-	-
	20	-	-
	22	<b>22</b>	-
<b>NODOS</b>	<b>2</b>	2	2
	-	333	341
	-	-	343
	-	-	345
	-	-	347
	-	-	349
	-	-	339
	-	-	<b>515</b>

### **3.1.2. Análisis de los resultados obtenidos del contacto.**

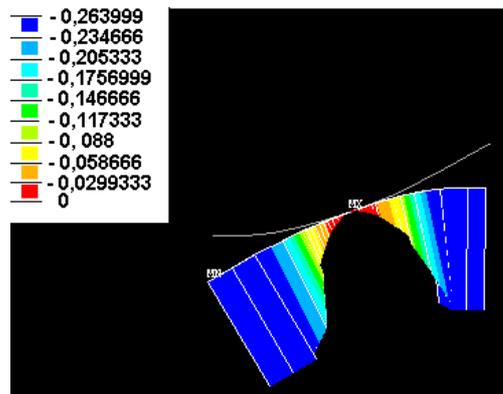
El análisis de los resultados obtenidos de los parámetros de contacto brindará una idea del comportamiento de estos parámetros y dará la posibilidad de definir la interrelación existente entre ellos, permitiendo hacer una valoración del comportamiento del contacto entre las superficies.

### 3.1.2.1. Distancia de la Abertura (GAP).

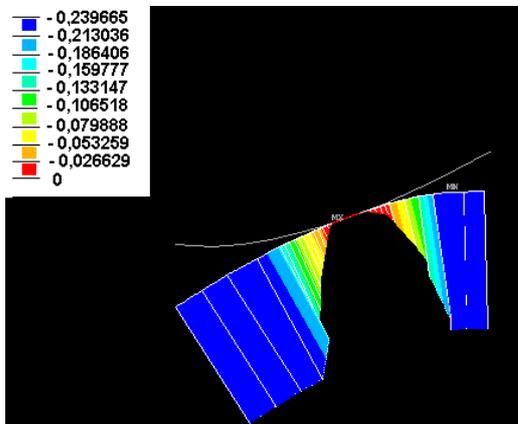
En la figura 3.1 aparecen los esquemas que brinda ANSYS de la distancia de la apertura entre las superficies (GAP) para las tres posiciones. Se puede apreciar que en las partes del perfil donde aparecen los valores negativos se encuentran separadas las superficies. El intervalo donde aparece el color rojo se aproxima al valor 0 mm y solo en la porción de la superficie donde aparece una línea roja el valor del GAP es 0 mm.



a) Posición -9,25°.



b) Posición -11,25°.



c) Posición -13,25°.

Figura 3.1. Comportamiento de la Abertura del GAP.

La longitud de la línea roja, que se encuentra geoméricamente sobre las superficies, muestra la porción de las superficies con GAP=0. Se puede observar que esta línea es más pequeña en la figura 3.1 b (Posición -11,25°),

por lo que la cantidad de nodos que se encuentran con  $GAP=0$  es menor que en las figuras 3.1 a (Posición  $-9,25^\circ$ ) y c (Posición  $-13,25^\circ$ ).

Partiendo de que la distancia de la abertura del contacto (GAP) expresa la separación que existen entre las superficies del modelo en las que se analiza el contacto se hace necesario, primeramente, definir cuales son los nodos que se encuentran con valor de GAP igual a cero, estos nodos, generalmente, son los que realizarán contacto. En la posición  $-9,25^\circ$  existen 7 nodos con  $GAP = 0$  mm, en la posición  $-11,25^\circ$  el  $GAP = 0$  mm corresponde a 2 nodos y 7 nodos con  $GAP = 0$  mm en la posición  $-13,25^\circ$ . Los números de identificación de los nodos aparecen en la tabla 3.1.

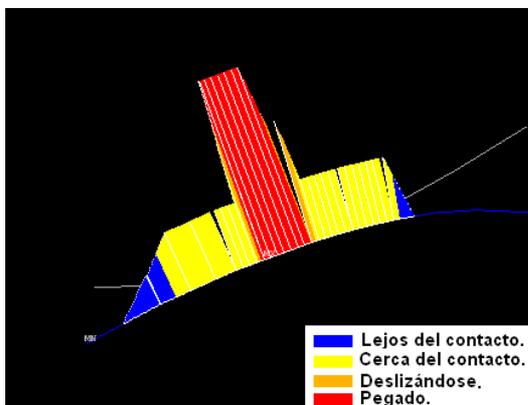
Para tener mayor información sobre los valores más significativos del GAP y de los demás parámetros del contacto, consultar las tablas A.15.1, A.15.2, A.15.3 del anexo #15.

### **3.1.2.2. Estado de Contacto (STAT).**

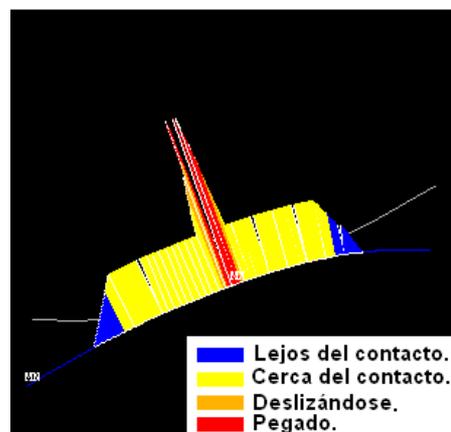
El estado de contacto (STAT) está estrechamente relacionado con la distancia de la abertura (GAP), este brinda una medida de la interacción entre la superficie. El estado de contacto pegado, el cual es identificado por ANSYS con un valor igual a 3, representa la parte de las superficies que generalmente poseen  $GAP = 0$  mm, donde la interacción entre las superficies es más fuerte. El estado de contacto en deslizamiento donde el  $GAP \neq 0$  mm, generalmente se le atribuye a nodos que se encuentran a continuación de los nodos con estado de contacto pegado y es identificado con el número 2 por el programa ANSYS. Los nodos que poseen los dos estados anteriormente explicados son los que arrojan valores diferentes de cero en los parámetros restantes del contacto. Los otros dos estados de contacto son: el próximo al contacto, identificado con el número 1 y el lejano al contacto, identificado con el número 0. Estos dos últimos estados no tienen influencia directa en la interacción entre las superficies.

En la figura 3.2 b, correspondiente a la posición  $-11,25^\circ$ , se puede observar que existe una parte de la superficie donde aparecen las líneas perpendiculares

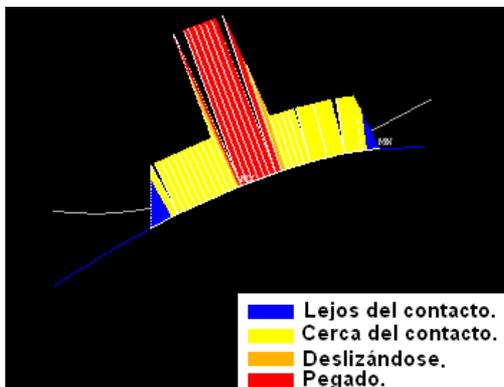
a la superficie de color rojo, esta parte es menor que la ocupada en las figuras 3.2 a y b, las que corresponden a las posiciones  $-9,25^\circ$  y  $-13,25^\circ$ , precisamente, la coloración roja identifica el estado de contacto pegado o estado de contacto con valor 3. La distribución muestra que existe una cantidad mayor de nodos con estado de contacto pegado en las posiciones  $-9,25^\circ$  y  $-13,25^\circ$ . El estado de contacto de deslizamiento, que aparece con color naranja en el gráfico, se comporta similar en los tres modelos, encontrándose solo un nodo con este estado en cada caso.



a) Posición  $-9,25^\circ$ .



b) Posición  $-11,25^\circ$ .



c) Posición  $-13,25^\circ$ .

*Figura 3.2. Comportamiento del Estado de Contacto.*

Existe para la posición  $-9,25^\circ$  7 nodos con estado de contacto pegado y 1 en deslizamiento. En la posición  $-11,25^\circ$  son 2 los nodos con estado pegado y 1 con deslizamiento. Con 7 nodos en estado pegado y 1 en deslizamiento esta la posición  $-13,25^\circ$ . En la tabla 3.1 los números de identificación de los nodos

señalados en **negrita** corresponden a los nodos con estado de contacto en deslizamiento y los restantes al estado pegado.

### 3.1.2.3. Presión del Contacto (PRES).

La presión del contacto (PRES) para la posición  $-9,25^\circ$  (figura 3.3 a) tiene un valor máximo en el nodo 12, siendo esta de 966,80 MPa y un valor mínimo de 260,09 MPa en el nodo 10. Para la posición  $-11,25^\circ$  (figura 3.3 b) tiene un valor máximo en el nodo 2, siendo esta de 4297 MPa y un valor mínimo de 818,58 MPa en el nodo 22. Tiene valor máximo en el nodo 339, siendo esta de 1043,3 MPa y un valor mínimo de 59,50 MPa en el nodo 515 para la posición  $-13,25^\circ$  (figura 3.3 c).

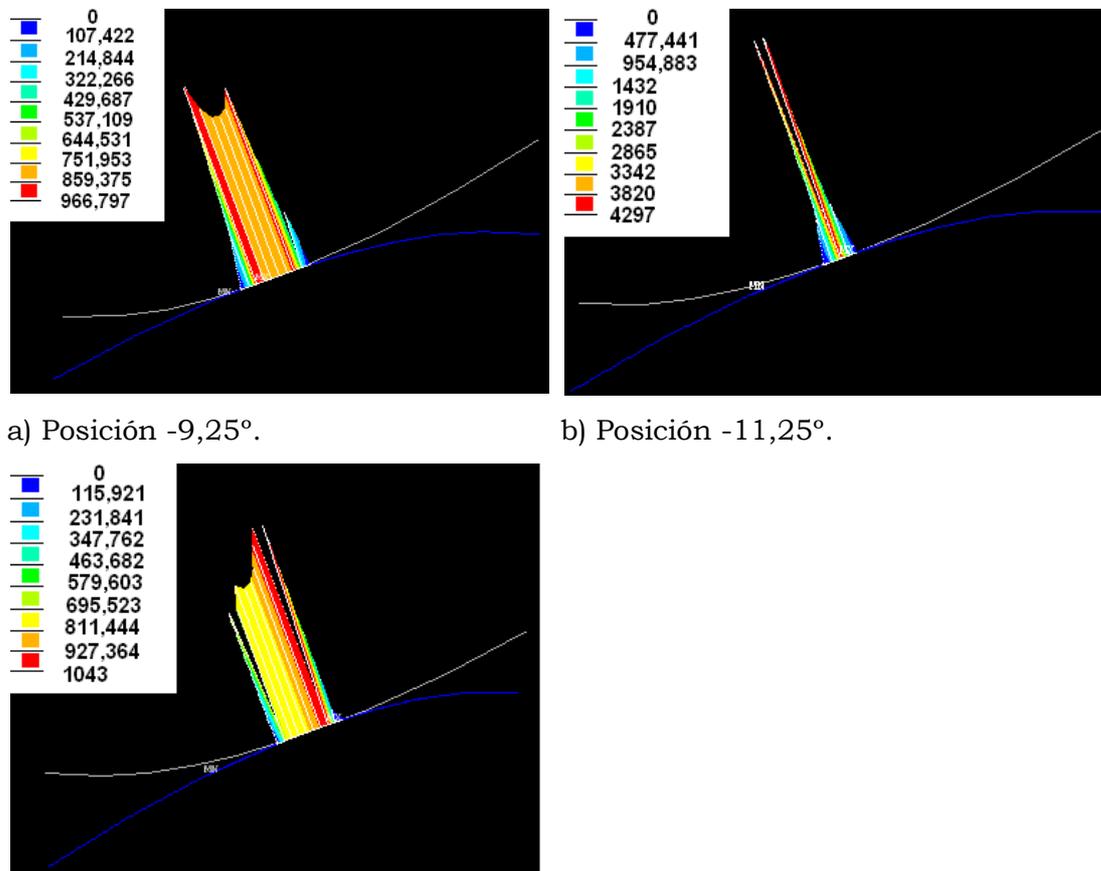


Figura 3.3. Comportamiento de la Presión del Contacto.

Se puede constatar que para la posición  $-11,25^\circ$  existe una concentración de la presión en el nodo intermedio, lo que muestra que la acción de la superficie rígida sobre la superficie flexible se encuentra mayormente sobre este nodo, lo que afectará directamente el comportamiento interno del modelo. Para las posiciones  $-9,25^\circ$  y  $-13,25^\circ$  se observa mayor distribución y valores más bajos de presión.

Existe una dependencia directa entre los valores que alcanza la presión y los valores de los parámetros restantes, especialmente en el comportamiento que se observa de la penetración de contacto y de la tensión total.

#### **3.1.2.4. Penetración del Contacto (PENE).**

La figura 3.4 muestra el comportamiento de la penetración (PENE) para las tres posiciones. En la posición  $-9,25^\circ$  (figura 3.4 a) se puede observar que se ocupa la parte de la superficie donde se encuentran los nodos 2, 10, 12, 14, 16, 18, 20 y 22, el rango de valores va desde 0,0009 mm, en el nodo 10, hasta 0,0032 mm, en el nodo 12. Los valores para la posición  $-11,25^\circ$  (figura 3.4 b) se encuentran dentro del rango de 0,0007 mm en el nodo 22 a 0,0034 mm en el nodo 2, en este caso los nodos con valores de penetración diferente de 0 son: 2, 22 y 333 los que reciben influencia de la superficie rígida y sus valores de penetración son superiores a los de las posiciones  $-9,25^\circ$  (figura 3.4 a) y  $-13,25^\circ$  (figura 3.4 c). Los valores de (PENE) se encuentran en el rango de 0,0001 mm en el nodo 515 a 0,0025 mm en el nodo 339 para la posición  $-13,25^\circ$ , en esta posición los nodos implicados son: 2, 339, 341, 343, 345, 347, 349, 515, observándose al igual que para la posición  $-9,25^\circ$  que la penetración tiene una mayor distribución con respecto a la que tiene la posición  $-11,25^\circ$ . El análisis realizado arroja que existe una menor distribución y una mayor penetración en la posición  $-11,25^\circ$ .

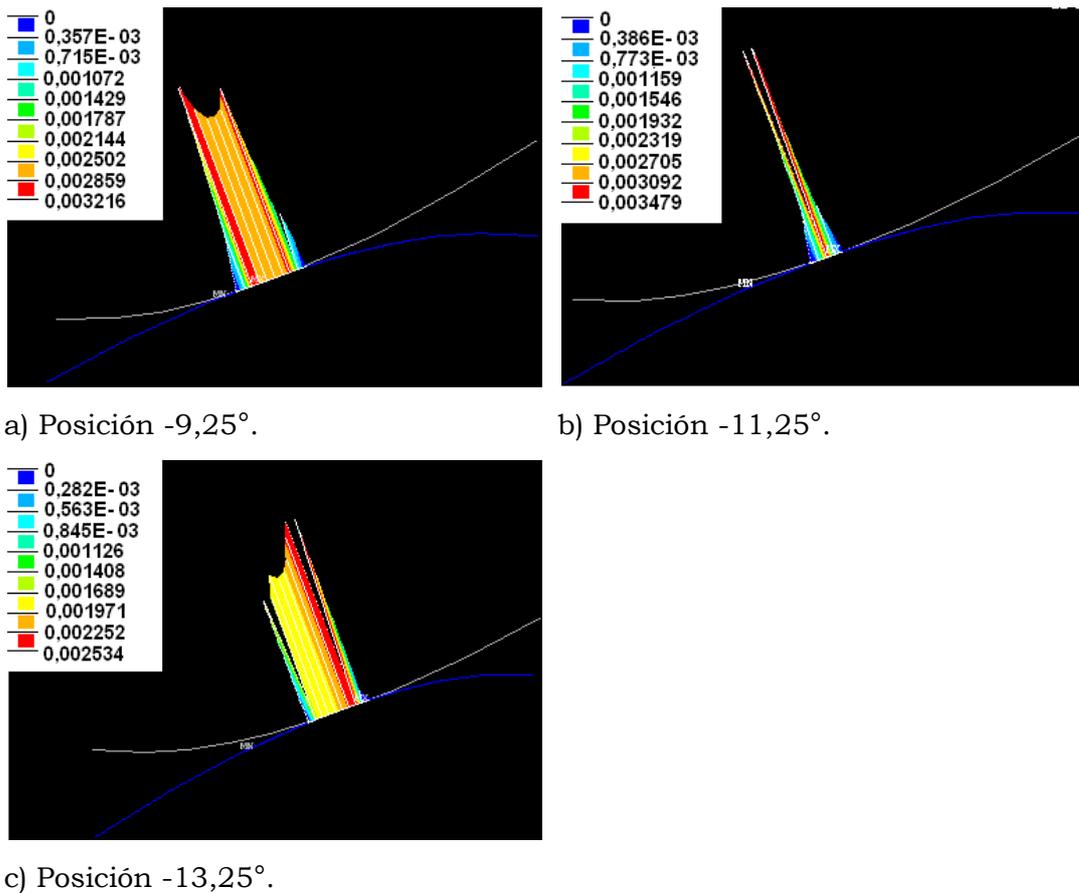


Figura 3.4. Comportamiento de la Penetración del Contacto.

### 3.1.2.5. Tensión Total del Contacto (STOT).

La tensión total (STOT) se comporta con un valor máximo de 967,20 MPa en el nodo 12 y uno mínimo de 260,29 MPa en el nodo 10 para la posición  $-9,25^\circ$  (figura 3.5 a). (STOT) en la posición  $-11,25^\circ$  (figura 3.5 b) posee un valor máximo de 4304,4 MPa en el nodo 2 y uno mínimo de 818,80 MPa en el nodo 22. En la posición  $-13,25^\circ$  (figura 3.5 c) se comporta con un valor máximo de 1058,7 MPa en el nodo 339 y uno mínimo de 59,64 MPa en el nodo 515.

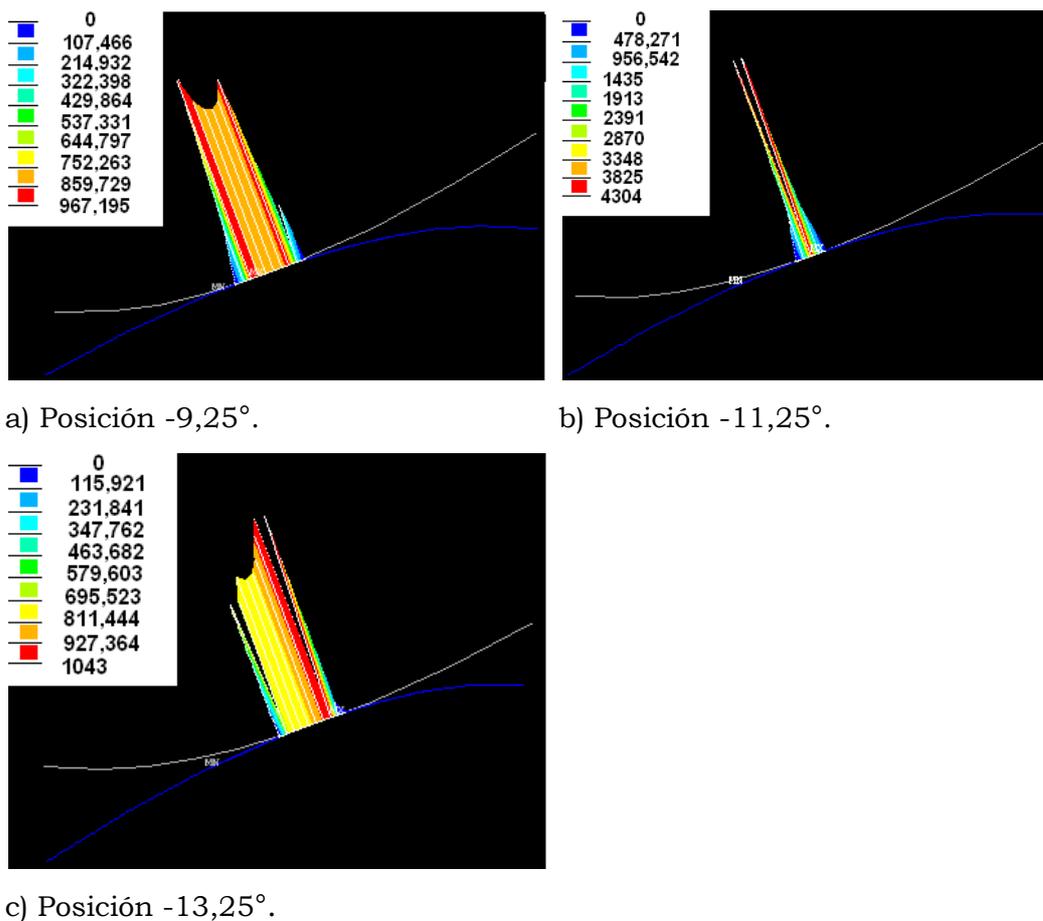


Figura 3.5. Comportamiento de la Tensión Total del Contacto.

Como se puede apreciar el comportamiento de las tensiones totales del contacto posee una mayor concentración en la posición -11,25°. Las tensiones totales del contacto presentan un comportamiento similar al de la presión. La distribución y los valores de estas son bastante aproximados. La tensión total también posee dependencia del valor de la presión del contacto.

### 3.1.2.6. Tensión de Fricción del Contacto (SFRIC).

La tensión de fricción del contacto (SFRIC) está relacionada con la interacción entre las superficies rígida y flexible, esta afecta directamente la tendencia del deslizamiento entre las superficies. Las tensiones de fricción tienen un comportamiento tangente a las superficies e influyen en las tensiones tangenciales alternantes que surgen en el interior del modelo. El posible deslizamiento entre las superficies es trasladado al interior del modelo, debido a

que existe una interconexión entre los elementos de contacto y los elementos que se encuentran dentro del modelo por mediación de los elementos subyacentes.

Como puede apreciarse en la figura 3.6 existe una distribución mayor de las tensiones de fricción en las posiciones  $-9,25^\circ$  (figura 3.6 a) y  $-13,25^\circ$  (figura 3.6 c), siendo menor en la posición  $-11,25^\circ$  (figura 3.6 b) y los valores mayores de SFRIC se encuentran en la posición anteriormente mencionada.

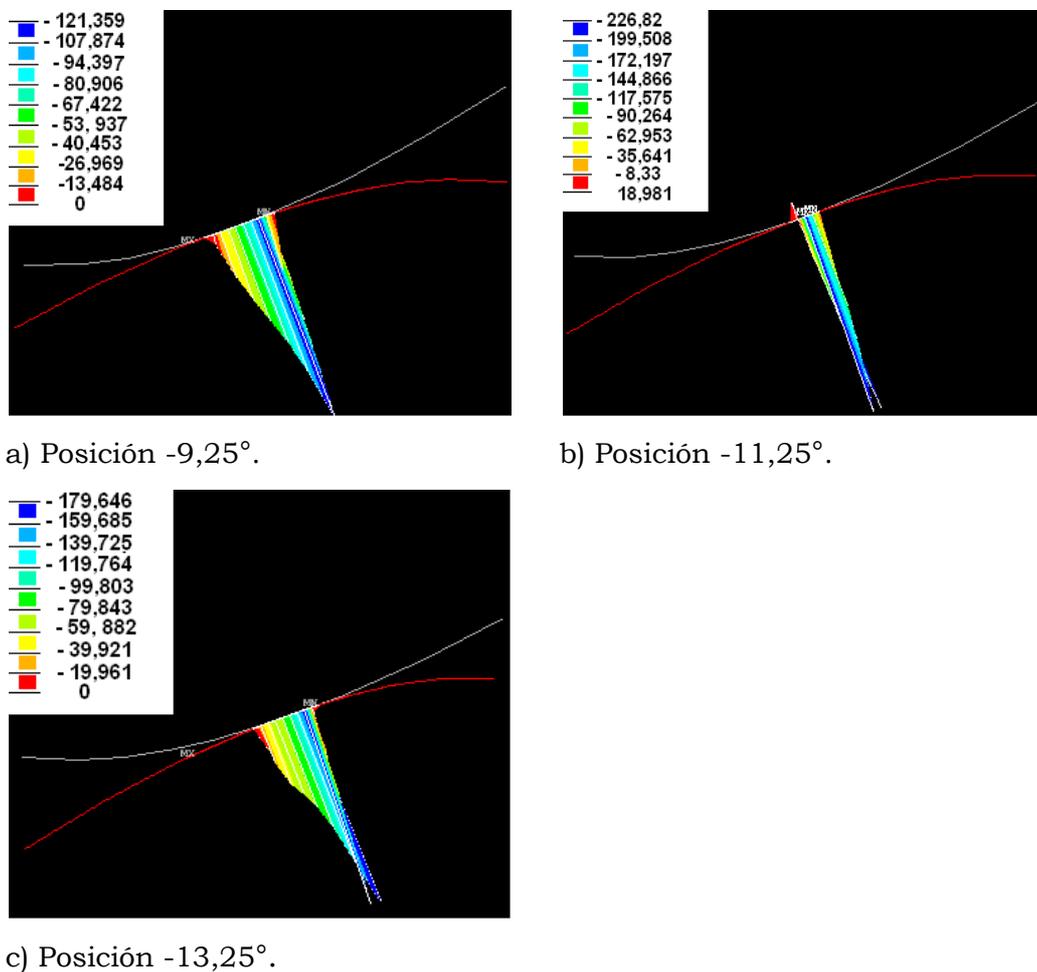


Figura 3.6. Comportamiento de la Tensión de Fricción del Contacto.

La tensión de fricción del contacto posee el valor más notable de  $-121,36$  MPa en el nodo 22 y menos notable de  $-5,32$  MPa en el nodo 10 para la posición

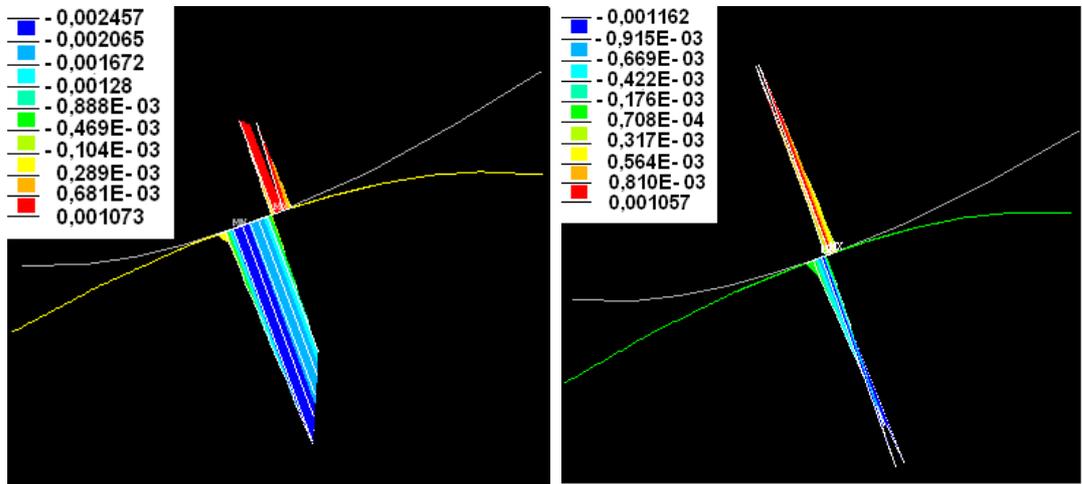
-9,25° (figura 3.6 a). SFRIC en la posición -11,25° (figura 3.6 b) posee como valor más negativo el de -226,82 MPa en el nodo 2 y el más positivo es de 18,98 MPa en el nodo 22. En la posición -13,25° (figura 3.6 c) se comporta con un valor más notable de -179,65 MPa en el nodo 339 y uno menos notable de -4,14MPa en el nodo 515.

Como puede apreciarse existe un valor más notable de la tensión de fricción en el nodo 2 de la posición -11,25 °, este comportamiento está justificado porque en esta posición solamente existen tres nodos en contacto, por lo que el efecto será mayor en la superficie del modelo. El comportamiento anterior explica la diferencia que existirá entre la ubicación y los valores de la tensión tangencial alternante entre el modelo de la posición de -11,25° y los modelos de las posiciones -9,25° y -13,25°.

### **3.1.2.7. Distancia de Deslizamiento del Contacto (SLID).**

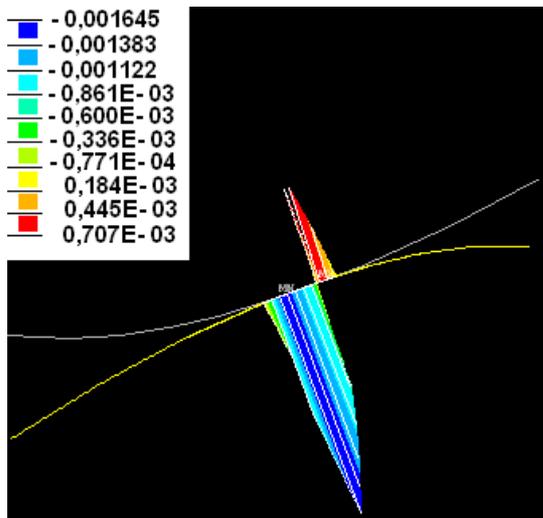
Los valores de la distancia del deslizamiento están en función de la interacción de la superficie flexible con la superficie rígida, el deslizamiento surge a partir de la penetración de la superficie rígida en la flexible. Los nodos que componen la superficie flexible alcanzan nuevas posiciones adaptándose a la configuración que le impone la superficie rígida.

En la figura 3.7 aparecen los esquemas que brinda ANSYS sobre el comportamiento de la distancia del deslizamiento. El deslizamiento ocurre en direcciones opuestas y a ambos lados de los nodos que poseen valores máximos de presión. Este es más notable en la parte de la superficie donde las tensiones de fricción (SFRIC) son menos significativas. En las posiciones -9,25° (figura 3.7 a) y -13,25° (figura 3.7c) se observan más nodos con deslizamiento que en la posición -11,25° (figura 3.7b). En la posición -9,25° el valor más positivo se encuentra en el nodo 22 con 0,0011mm y el más negativo en el nodo 12 con -0,0025 mm. Valores de -0,0012 mm y 0,0011 mm se registraron en los nodos 2 y 333 cuando se analizó la posición -11,25°. En la posición -13,25° los valores fueron de -0,0016 mm en el nodo 341 y 0,0007 mm en el nodo 339.



a) Posición -9,25°.

b) Posición -11,25°.



c) Posición -13,25°.

Figura 3.7. Comportamiento de la Distancia de Deslizamiento del Contacto.

### 3.2. Análisis del comportamiento de las Tensiones Tangenciales Alternantes.

En el presente epígrafe se realizará el análisis de los resultados obtenidos de las tensiones tangenciales alternantes, este será basado en los valores registrados en los nodos que se encuentran por debajo del polo de engrane y en los valores más significativos de las tensiones.

### **3.2.1. Selección de los nodos de donde se obtendrán los valores de las Tensiones Tangenciales Alternantes.**

Para el análisis del comportamiento de las tensiones tangenciales alternantes se seleccionaron nodos ubicados por debajo del polo de engrane perpendiculares a la superficie de contacto de los modelos y los nodos donde se encontraban los valores más significativos de estas tensiones. Esta selección se hizo debido a que se medirán las tensiones tangenciales alternantes ( $\tau_{xy}$ ) ( $S_{xy}$ ) que actúan en estos nodos, cuando los dientes del modelo contactan en tres posiciones diferentes. En la tabla 3.2 se muestran el número de identificación de los nodos que se encuentran por debajo del polo de engrane, la posición que ocupan con respecto a la superficie y la distancia entre la superficie y cada uno de los nodos cuando el modelo está descargado. La separación entre los nodos esta definida por el tamaño de los elementos, dicho tamaño depende del refinado del mallado en el área próxima a la parte de la superficie que contacta. El tamaño de los elementos es de 0,1mm. Las coordenadas de los nodos que se encuentran por debajo del polo de engrane para las tres posiciones, aparecen en las tablas A.16.1, A.16.2, A.16.3 del anexo # 16.

Tabla 3.2. Nodos utilizados para realizar el análisis de las Tensiones Tangenciales Alternantes.

Ubicación de los nodos con respecto a la superficie.	Nodos Pos -9,25°	Nodos Pos -11,25°	Nodos Pos -13,25°	Distancia con respecto a la superficie (mm).
<b>Superficial</b>	2	2	2	0
<b>Sub-superficial 1</b>	26	26	40	0,1
<b>Sub-superficial 2</b>	28	28	38	0,2
<b>Sub-superficial 3</b>	30	30	36	0,3
<b>Sub-superficial 4</b>	32	32	34	0,4
<b>Sub-superficial 5</b>	34	34	32	0,5
<b>Sub-superficial 6</b>	36	36	30	0,6
<b>Sub-superficial 7</b>	38	38	28	0,7
<b>Sub-superficial 8</b>	24	24	26	0,8
<b>Sub-superficial 9</b>	2749	2650	24	0,9

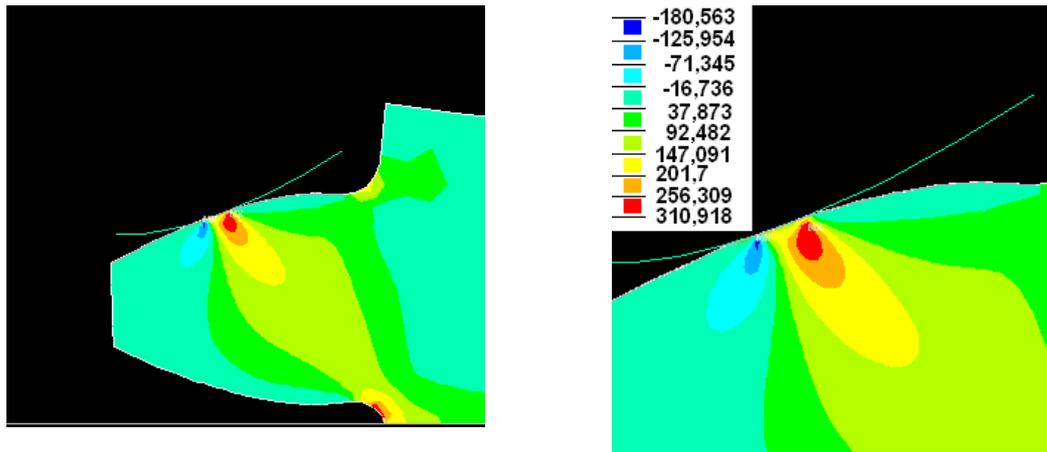
### 3.2.2. Análisis de los resultados obtenidos de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ).

En cada una de las tres posiciones analizadas las tensiones tangenciales alternantes poseen un comportamiento diferente en cuanto a su magnitud y a la posición que ocupa en el área del modelo. Tanto la magnitud como la posición van variando según se vaya produciendo el proceso de engrane y en cada uno de los ciclos del engranaje. Las tensiones tangenciales alternantes surgen con el desplazamiento de los planos interatómicos, produciendo la fatiga del material y generando grietas en el interior de los dientes de los engranajes. Este efecto es causado por valores de tensiones que generalmente no sobrepasan el límite de fluencia del material, que para el tipo de acero tratado es de 390 MPa.

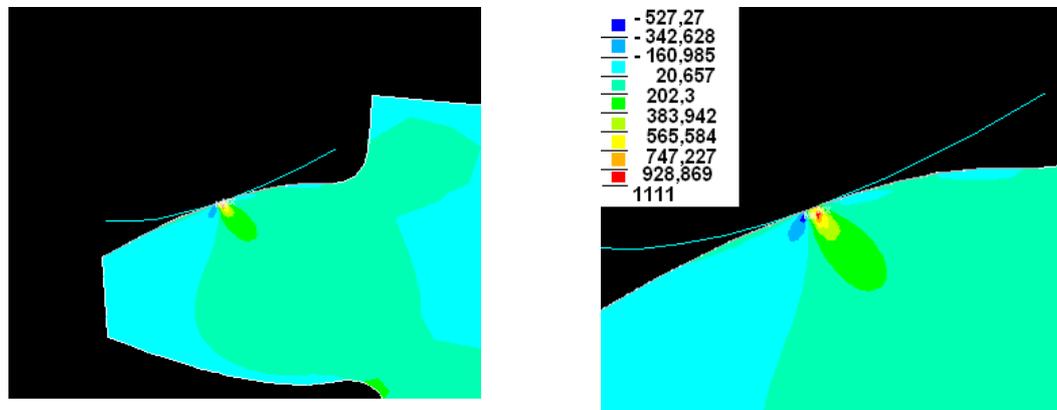
En la figura 3.8 b se muestra que las áreas formadas por los valores de las tensiones tangenciales alternantes positivas y negativas son menores que los correspondientes a los dos modelos restantes (figuras 3.8 a y c). Ocupan un área mayor los aros correspondientes a los valores positivos en todos los modelos. Los valores positivos más significativos para todos los casos se encuentra por debajo y a la derecha de la zona donde contactan las superficies, los valores más significativos negativos se encuentran a la izquierda de dicha zona.

Cuando se realizó el análisis del modelo para la posición  $-9,25^\circ$  se obtuvo que el valor más positivo es de 303,21 MPa en el nodo 137, el que se encuentra a una distancia de 0,2 mm de la superficie y a 0,1 mm de una línea con origen en el polo de engrane y perpendicular a la superficie. En el nodo 123 se registró el valor más negativo, este tiene una magnitud de -128,90 MPa, la ubicación de este nodo es de 0,2 mm con respecto a la superficie y 0,8 mm de distancia a la línea con origen en el polo y perpendicular a la superficie. Entre los nodos que registran los valores extremos existe una distancia de 0,9 mm. La diferencia es de 432 unidades entre el valor más positivo y el más negativo.

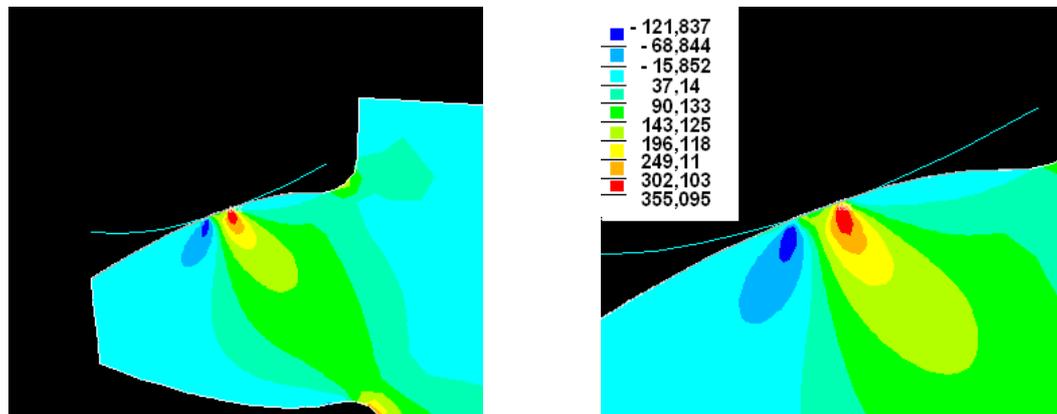
En el modelo correspondiente a la posición  $-11,25^\circ$  el valor más positivo se encuentra en el nodo 439, este es de 875,14 MPa, se encuentra a 0,1mm de distancia con respecto a la superficie y 0,2 mm a la derecha de una línea con origen en el polo de engrane y perpendicular a la superficie. El nodo 104 se encuentra a 0,1 mm con respecto a la superficie y a 0,2 mm con respecto a la línea anteriormente mencionada, su valor es de -364,68 MPa. Entre los dos valores existe una diferencia de 1240 unidades.



a) Posición -9,25°.



b) Posición -11,25°.



c) Posición -13,25°.

Figura 3.8. Comportamiento de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $t_{xy}$ ).

Para la posición  $-13,25^\circ$  el valor más positivo es de 359,57 MPa registrado en el nodo 367, la distancia desde este nodo hasta la superficie es de 0,1 mm y con respecto a la línea con origen en el polo de engrane y perpendicular a la superficie es de 0,6 mm a la derecha de esta. El valor más negativo es de -131,22 MPa, encontrándose este en el nodo 110. El nodo 110 se encuentra a 0,1 mm de la superficie y 0,1 mm a la izquierda de la línea con origen en el polo y perpendicular a la superficie. La diferencia entre los valores de las tensiones es de 490 unidades.

El gráfico que aparece en la figura 3.9 muestra los valores correspondientes a los nodos que se encuentran sobre una línea perpendicular a la superficie de contacto, por debajo de esta y con origen en el polo de engrane, específicamente en el nodo número 2. Para el análisis se tomaron 10 nodos en cada una de las posiciones, incluyendo el nodo 2 que coincide en los tres casos. La selección de los nodos se hizo partiendo de la intención de medir el comportamiento de las tensiones tangenciales alternantes para cada una de las posiciones en la línea perpendicular a la superficie con origen en el polo de engrane.

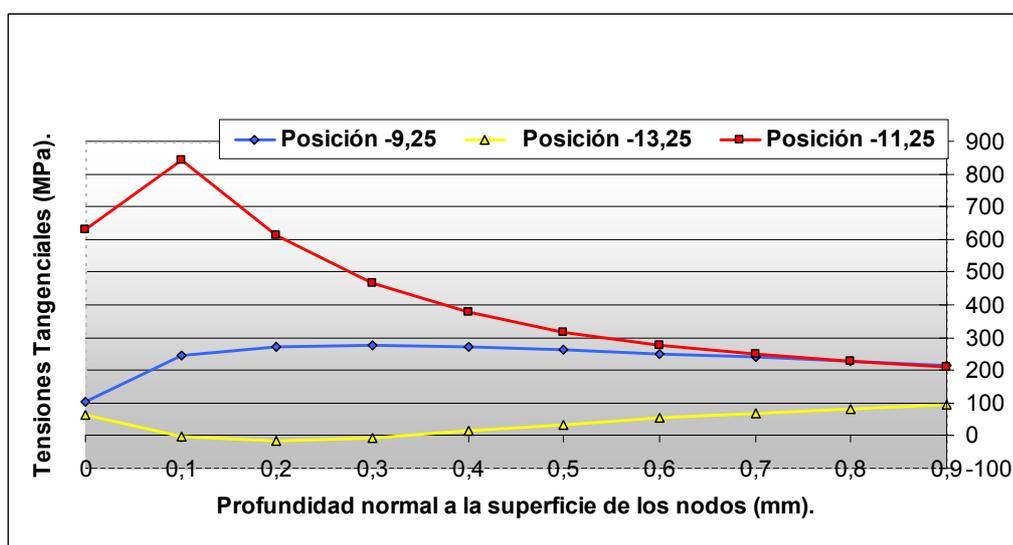


Figura 3.9. Gráfico de comportamiento de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $S_{xy}$ ) ( $\tau_{xy}$ ) en los nodos que se encuentran por debajo del polo de engrane (Posiciones  $-9,25^\circ$ ;  $-11,25^\circ$ ;  $-13,25^\circ$ ).

Las tres curvas mostradas en el gráfico describen el comportamiento de las tensiones tangenciales alternantes por debajo del polo y perpendicular a la superficie.

La línea correspondiente a la posición  $-11,25^\circ$  del gráfico mostrado en la figura 3.9, representa como se comporta la tensión tangencial alternante cuando el valor máximo de presión está actuando sobre el nodo 2. Se puede observar que en los 5 primeros valores, correspondientes a los nodos 2, 26, 28, 30 y 32, existe una diferencia notable en cuanto a la magnitud de la tensión tangencial alternante, apreciándose que todos los valores son positivos. Esta diferencia entre los valores está dada por la influencia directa que ejerce la superficie rígida sobre la superficie deformable, donde el principal nodo receptor del contacto es el nodo 2.

Al analizar la curva correspondiente a la posición  $-9,25^\circ$  representada en el gráfico de la figura 3.9, donde el nodo receptor de la máxima presión de contacto es el 12, que se encuentra distante del polo de engrane y a su izquierda. También es necesario destacar que existe una distribución de la presión entre 8 nodos de la superficie. Debido a la distancia con respecto al polo y la cantidad de nodos receptores del contacto los valores de la tensión tangencial alternante no van a experimentar cambios bruscos y van a ser menores que los alcanzados en la posición  $-11,25^\circ$ . También se puede observar que todos los valores alcanzados para esta posición son positivos.

En la línea correspondiente a la posición  $-13,25^\circ$ , en el gráfico de la figura 3.9, se pueden apreciar valores menores de tensión que los alcanzados para la posición  $-11,25^\circ$ . El nodo receptor de mayor presión de contacto es el nodo 339. Para este caso existen 8 nodos contactando con la superficie rígida. El nodo que mayor presión recibe se encuentra, al igual que en la posición  $-9,25^\circ$ , distante del nodo que coincide con el polo de engrane, pero, a la derecha de

este. No existen cambios bruscos entre los valores de los nodos y se aprecian algunos valores negativos.

Los valores de las tensiones tangenciales alternantes en los nodos seleccionados utilizados para la construcción del gráfico de la figura 3.9 se encuentran registrados en las tablas A.17.1, A.17.2 y A.17.3, en el anexo # 17.

### **3.4. Conclusiones parciales del capítulo.**

1. Existe una interrelación directa entre los parámetros del contacto. Para que exista penetración la superficie rígida debe ejercer presión sobre la flexible, como resultado se producen tensiones de fricción y otras tensiones que se oponen a la penetración y al deslizamiento entre las superficies, los elementos de contacto transmiten a los elementos subyacente dichas tensiones y se crea, de esta forma, el campo tensional en el interior del modelo.

2. Cuanto mayor y más concentrada en la superficie del modelo sea la tensión de fricción del contacto, mayor es la concentración de las tensiones tangenciales alternantes, se eleva su magnitud y se aproximan más a la superficie del modelo. El proceso contrario ocurre si existe una mayor distribución de las tensiones de fricción y valores menores de estas en cada uno de los nodos de la superficie.

3. Durante el proceso de engrane las tensiones tangenciales alternantes varían su posición, magnitud y sentido en dependencia de la posición que ocupe el contacto en la superficie del diente y la posición que tenga con respecto al nodo donde se analiza el comportamiento de dichas tensiones.

4. Las tensiones tangenciales alternantes experimentan variaciones en dependencia de la distancia a que se encuentren con respecto a la superficie, los cambios más bruscos se encuentran entre 0,1mm y 0,5 mm de profundidad con respecto a la superficie del modelo.

5. Los resultados obtenidos en la simulación concuerdan con lo plasmado en la bibliografía sobre el proceso de deterioro de los dientes producto del contacto,

puesto que se constató, mediante los resultados obtenidos, que a menor superficie de contacto mayores en magnitud, más concentradas y próximas a la superficie se encuentran las tensiones tangenciales alternantes, estas tensiones son las principales responsables de la aparición de la fatiga y generación de las grietas que producen el deterioro de la superficie de los dientes. Si a esto sumamos que el proceso de engrane es un proceso cíclico, podemos entonces afirmar que mientras más deteriorada esté la superficie, mayor será la acción de las tensiones tangenciales alternantes, repitiéndose esta relación hasta dar como resultado el deterioro parcial o total del diente.

## **CONCLUSIONES.**

1. Se le dio cumplimiento al objetivo propuesto en el presente trabajo puesto que: se logró definir el comportamiento de las tensiones tangenciales alternantes generadas por el fenómeno de contacto en la zona próxima al polo de engrane y esclarecer su relación con el deterioro de la superficie de trabajo del diente.
2. Se logró obtener resultados relacionados con el comportamiento de los parámetros del contacto y la interrelación existente entre estos y las tensiones tangenciales alternantes.
3. Mediante el análisis del comportamiento de las tensiones tangenciales alternantes se pudo tener una idea más exacta sobre: la ubicación de los valores más significativos, el área que ocupan dentro del modelo dichas tensiones, el movimiento dentro del modelo de las tensiones en dependencia de la parte de la superficie donde se establece el contacto y el valor que poseen en dependencia de la profundidad a que se encuentren de la superficie del modelo.

## **RECOMENDACIONES.**

1. Realizar experimentos y mediciones reales que permitan complementar y confirmar los resultados obtenidos mediante la simulación del comportamiento de las tensiones tangenciales alternantes.
2. Realizar otros análisis de contacto empleando el MEF, con el fin de definir el comportamiento de la tensión de compresión máxima y el esfuerzo máximo de cizallamiento, para de esta forma, poder obtener resultados más integrales sobre el comportamientos del campo tensional que se produce en los dientes durante el proceso de engrane.
3. Experimentar con otras variantes de materiales, correcciones, modelos geométricos, discretización, aplicación de condiciones de fronteras y modelos de contacto, para generalizar y perfeccionar este tipo de análisis aplicado a los engranajes cilíndricos de dientes rectos.

## BIBLIOGRAFÍA.

1. Askeland, R., 1998. *Ciencia e ingeniería de los materiales*. 3era. Ed. Missouri, Internacional Thomson Editores. 551 p. ISBN 0-534-93423-4
2. Atanasovska, I.; Nikolic-Stanojlovic, V.; Dimitrijevic, D.; Momcilovic, D., 2009. "Finite Element Model for Stress Analysis and Nonlinear Contact Analysis of Helical Gears". Institute Kirilo Savic, Serbia, pp. 61-69.
3. Baranov, G. G., 1979. *Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas*. Editorial MIR. Moscú. 574 Pág.
4. Cárdenas, J.; Moya, J.; Hernández, D., 2011. "Factores geométricos para calcular la flexión en engranajes cilíndricos rectos asimétricos con perfil evolvente – trocoide". *Ingeniería Mecánica*, 14 (3), pp. 230-244.
5. Contact Technology Guide, 2009. Disponible en: [www.ansys.com](http://www.ansys.com).
6. Cotaquispe, L. O., 2006. "Análisis del proceso de transmisión de la carga en un engranaje metálico de dientes rectos exteriores mediante la modelación". COMEC, UCLV, pp. 1-9.
7. Childs, P., 2004. *Mechanical Design*. 2da. Ed. Oxford, Elsevier Butterworth-Heinemann. 351 p. ISBN 0 7506 5771 5
8. Dobrovolski, V., 1980. *Elementos de Máquinas*. Editorial MIR. Moscú. 584p.
9. Felippa, C. A., 2004. *Introduction to Finite Element Methods*. University of Colorado Boulder, USA.
10. Fernández, O.; Sandino, O.; Peña, B., 2012. "Software para el diseño de transmisiones". *CD de Monografías 2012, Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos"*.

11. González Rey, G., 2001. *Cálculo de Engranajes Cilíndricos*. ISPJAE. Ciudad de la Habana.
12. González Rey, G.; García, R.; Frechilla, P., 2002. "El método de elementos finitos como alternativa en el cálculo de engranajes". *Ingeniería Mecánica*, 1, pp. 67-72.
13. González Rey, G.; García, J.; Frechilla, P., 2005. "Modelo matemático y procedimiento para la generación gráfica de los contornos de dientes de engranajes cilíndricos". *Ingeniería Mecánica*. Vol. 2.
14. González, O., 2006. "Influencia de la razón de transmisión en la velocidad específica de deslizamiento en ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos normales". CD-ROM de monografías. UMCC, ISBN: 959 - 16 - 0490 - 4.
15. González, O., 2006. "Rodadura y Velocidad de Deslizamiento en Engranajes Cilíndricos de Dientes Rectos". *Aten@s*, ISSN: 6872-2749 RNPS 1842.
16. González, O., 2006. MANUAL DE USUARIO. SOFTWARE "CÁLCULO GEOMÉTRICO DE TRANSMISIONES POR ENGRANAJES CON DISTANCIA INTERAXIAL LIBRE". Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos".
17. González, O.; Alfonso, E., 2006. "Modelación de engranajes cilíndricos de dientes rectos. Una solución computarizada". CD-ROM de monografías. UMCC. ISBN: 959 - 16 - 0490 - 4.
18. González, O., 2007. *Endurecimiento Sub-estructural en Engranajes Cilíndricos de Dientes Rectos*. Tesis de Doctorado. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Cuba.

19. González, O.; Alfonso, E., 2008. "Endurecimiento combinado en engranajes cilíndricos de dientes rectos". *Ingeniería Mecánica*, 11(2), pp 67-72.
20. González, O.; Alfonso, E., 2008. "Análisis del estado tensional en el contacto de dientes de engranajes cilíndricos mediante el Método de Elementos Finitos". *Revista de Ingeniería Mecánica*. (11), 3.
21. González, O.; Peña, B., 2012. "Modelación bidimensional de sólidos dentro de ANSYS". *CD de Monografías 2012, Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos"*.
22. González, I.; González, O., 2012. "Modelación en AutoCAD de engranajes cilíndricos de dientes helicoidales". *CD de Monografías 2012, Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos"*.
23. Gupta, B; Choubey, A; Varde, G., 2012. "Contact stress of spur gear". *International Journal of Engineering Research & Technology*. 4 (2), pp. 1-7.
24. Gurumani, R.; Shanmugam, S., 2011. "Modeling and analysis of crowned spur gear teeth". *Engineering MECHANICS*, (18)1, pp. 65-78.
25. Hueber, S.; Stadler, G.; Wohlmuth, B. I., 2008. "A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with coulomb friction". *Society for Industrial and Applied Mathematics*, (30), 2, pp. 572- 596.
26. Jackson, R. L.; Itti Ch.; Green, I., 2005. "A Finite Element Study of the Residual Stress and Deformation in Hemispherical Contacts". *Transactions of the ASME*. (127), pp. 484-493.
27. Kamal, H., 2012. "Three dimensional dynamic stress analyses for a gear teeth using finite element method". *ARP Journal of Engineering and Applied Sciences*. (7) 7, pp. 794- 805.

28. Kim, N; Stoker, K., 2008. "A Comparison of Spur Gear Response under Non-Ideal Loading Conditions". SAE International. University of Florida. pp. 1-8.
29. Liu, Y., 2003. Lecture Notes: "Introduction to the Finite Element Method". University of Cincinnati. USA.
30. Liu, G. R.; Nguyen-Thoi, T.; Nguyen-Xuan, H; Lam, K.Y., 2009." A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems". Computers and Structures, (83), pp. 14–26.
31. Mallesh, G.; Shankarmurthy, H. J., 2009. "Parametric analysis of Asymmetric Spur Gear Tooth", NIT, (17), 18, pp. 398-403.
32. Mott, R. L., 2006. *Diseño de elementos de máquinas*. Editorial Félix Varela. 596 p.
33. Piña, J.L., 2009. *La lubricación de engranajes y los modos de fallas del dentado*. Bahía Blanca, Argentina. 31 pag.
34. Renfro, M., 2010. "Modelling Gear Teeth in Pro/ENGINEER Wildfire 4.0" Macmillan". National Kaohsiung University of Applied Sciences, Taiwan. 398-403.
35. Reshetov, D., 1985. *Elementos de máquinas*. Editorial: Pueblo y Educación.
36. Rodríguez, J.M.; Torres, A., 2012. "Personalización y normalización de AutoCAD para Dibujo Mecánico". CD monografía UMCC.
37. Shigley, J. y Mischke, C. 1990. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. 5ta. Ed. (4a. en español). McGraw - Hill Inter- Americana de México. ISBN 968-422-778-7.

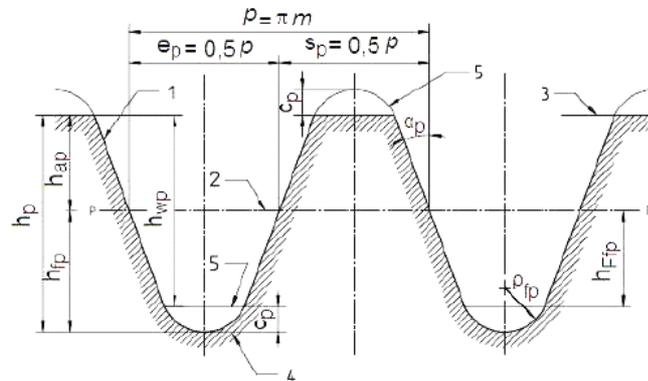
38. Shigley, J.; Mischke Ch., 1996. *Standard handbook of machine design*. McGraw-Hill Inc. ISBN 0-07-056958-4.
39. Stanojevic, N.; Cvejic, I., 2003. "The Analysis of Contact Stress on Meshed Teeth's Flanks Along the Path of Contact for a Tooth Pair". *Mechanics, Automatic Control and Robotics*. (3) 15.
40. Sraml, M.; Flasker, J., 2007. "Computational approach to contact fatigue damage initiation analysis of gear teeth flanks ". *Int J Adv Manuf Technol*, (31), pp. 1066–1075.
41. Structural Analysis Guide, 2009. Disponible en: [www.ansys.com](http://www.ansys.com).
42. Torres, A.; Rodríguez, J.M., 2010. "La utilización del color aplicado al dibujo asistido por computadora en las carreras de ingenierías". CD monografía UMCC. ISBN 978-959-16-1326-4.
43. Torres, A.; Rodríguez, J.M., 2012. "Representación Isométrica de cuerpos mediante el editor gráfico AutoCAD" *CD de Monografías 2012, Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos"*.
44. Vera, N.; Dolicanin, C; Dimitrijevic, D., 2012. "Dynamic Model for the Stress and Strain State Analysis of a Spur Gear Transmission". *Journal of Mechanical Engineering*, pp. 56-67.
45. Wang, J.; Howard, I., 2008. "A Further Study on High-Contact-Ratio Spur Gears in Mesh with Double-Scope Tooth Profile Modification". (*Proceedings of 10th ASME International Power Transmission and Gearing Conference PTG 2007, September 4–7, 2007, Las Vegas*) pp. 64-70.
46. Zeping, W., 2009. " Determination and Development of appropriate models of contact element". University "Polithenica" of Bucharest.

**Anexo # 1. Nomenclatura.**

- cp** Holgura radial superior entre el perfil de cremallera básica de referencia y el perfil de cremallera conjugada.
- ep** Espacio interdental en cremallera básica de referencia.
- hap** Altura de la cabeza del diente en cremallera básica de referencia.
- hfp** Altura del pie del diente en cremallera básica de referencia.
- hFfp** Parte recta en la altura del pie del diente en cremallera básica de referencia.
- hp** Altura del diente en cremallera básica de referencia.
- hwp** Altura común entre cremallera básica de referencia y cremallera conjugada.
- m** Módulo.
- p** Paso.
- sp** Espesor del diente en cremallera básica de referencia.
- UFP** Dimensión del socavado (sobre-espesor para rectificado).
- aFP** Ángulo del socavado.
- ap** Ángulo de presión.
- ρfp** Radio de la curva de unión en perfil del diente de la cremallera básica.
- z** Número de dientes.
- β** Ángulo de la hélice en el cilindro de referencia.
- b** Ancho del diente.
- x** Coeficiente de corrección del diente.
- a** Ángulo del perfil de la cremallera de referencia.
- c\*** Factor de holgura radial.
- d** Diámetro de referencia.
- df** Diámetro de fondo.
- da** Diámetro de cresta.

- db** Diámetro básico.
- h** Altura del diente.
- hf** Altura del pie del diente.
- ha** Altura de cabeza del diente.
- Pb** Paso básico normal.
- S** Espesor del diente.
- e** Ancho del hueco.
- u** Razón de engrane.
- aw** Distancia interaxial.
- α<sub>tw</sub>** Ángulo de engranaje en el plano transversal.
- xΣ** Corrección sumaria.
- εβ** Coeficiente de recubrimiento axial.
- Eα** Coeficiente de recubrimiento transversal.
- ro1, ro2** Radios de las circunferencias básicas del piñón y la rueda.
- r1, r2** Radios cualesquiera de los perfiles de los dientes del piñón y la rueda.
- ρ1, ρ2** Radios de curvatura del punto de contacto en r1 y r2.
- ω1, ω2** Velocidades angulares del piñón y la rueda.
- α** Ángulo de presión.

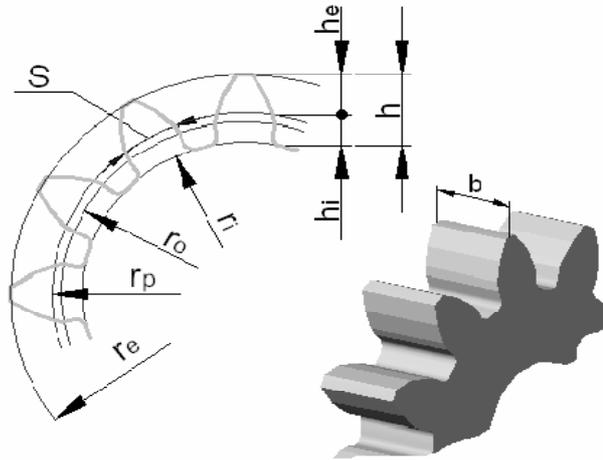
**Anexo # 2. Perfil de referencia de la cremallera básica y sus parámetros fundamentales.**



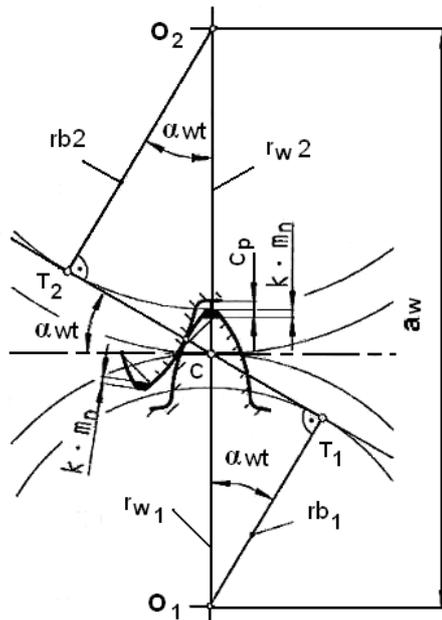
**Leyenda**

- 1** Perfil de la cremallera básica de referencia
- 2** Línea de módulo
- 3** Línea de cresta (superior)
- 4** Línea de pie (fondo)
- 5** Perfil del diente de la cremallera básica conjugada

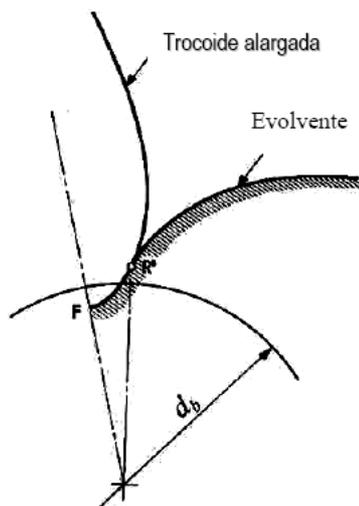
### Anexo # 3. Geometría de la rueda aislada.



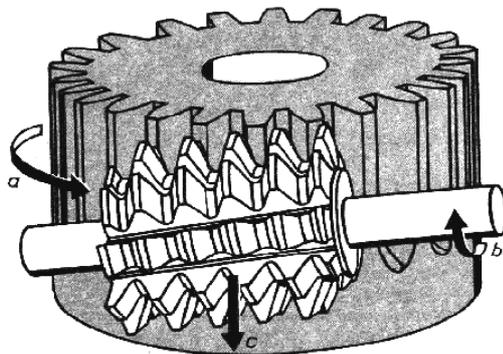
### Anexo # 4. Geometría del par de ruedas.



**Anexo # 5. Curvas asociadas al perfil activo de los dientes de engranajes cilíndricos de dientes rectos.**



**Anexo # 6. Elaboración de engranaje cilíndrico de dientes rectos por el método de generación utilizando fresa madre.**



**Anexo # 7. Ecuación de Hertz para evaluar la capacidad de trabajo de un engranaje cilíndrico según la resistencia a los esfuerzos de contacto.**

$$\sigma_H = Z_E * Z_H \sqrt{\frac{2M_{t1} * K_A * K_\beta * K_v * (u + 1)}{d_{w1}^2 * b_W * u}} \leq [\sigma_H]$$

Siendo:

$K_A$  - Coeficiente de aplicación de la carga.

$K_\beta$  - Coeficiente de concentración de la carga.

$K_v$  - Coeficiente de cargas dinámicas.

$Z_E$  - Factor de elasticidad.

$Z_H$  - Factor de forma.

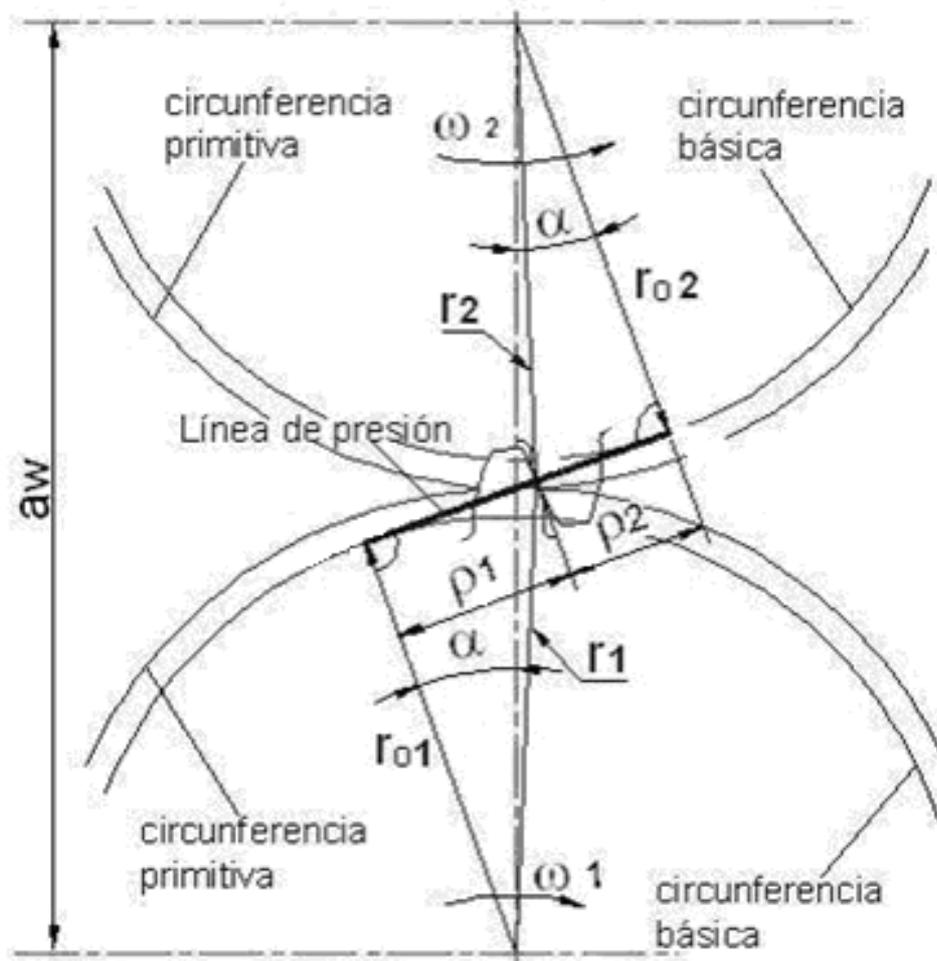
$b_W$  - Ancho de engranaje (rueda).

$d_1$  - Diámetro primitivo del piñón.

$u$  - Razón de engranaje.

$M_{t1}$  -Momento torsor en el piñón.

Anexo # 8. Esquema del contacto de dos ruedas engranadas.



## Anexo # 9. Coordenadas de los puntos que definen la geometría de los modelos obtenidos en el software AutoCAD.

### A.9.1. Coordenadas de los puntos que definen la geometría del modelo obtenido en software AutoCAD para la posición -9,25°.

```
LWPOLYLINE Layer: "Herramienta Deformadora -9,25 Grados"
              Space: Model space
              Handle = 1DB
              Closed
              Constant width 0.0000
              area 293.5860
              perimeter 82.4701
              at point X= 38.6511 Y= -5.2052 Z= 0.0000
              bulge -0.0138
              center X= 0.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
              radius 39.0000
              start angle 352
              end angle 349
              at point X= 38.3054 Y= -7.3279 Z= 0.0000
              at point X= 37.2194 Y= -7.6624 Z= 0.0000
              at point X= 36.1420 Y= -7.9220 Z= 0.0000
              at point X= 35.0773 Y= -8.0982 Z= 0.0000
              at point X= 34.5072 Y= -8.1531 Z= 0.0000
              at point X= 33.9433 Y= -8.1779 Z= 0.0000
              at point X= 33.3877 Y= -8.1656 Z= 0.0000
              at point X= 32.8464 Y= -8.0983 Z= 0.0000
              at point X= 32.1735 Y= -7.9329 Z= 0.0000
              bulge 0.4061
              center X= 31.9587 Y= -8.8069 Z= 0.0000
              radius 0.9000
              start angle 76
              end angle 165
              at point X= 31.0911 Y= -8.5678 Z= 0.0000
              at point X= 30.6553 Y= -10.0158 Z= 0.0000
              at point X= 14.2583 Y= -4.6585 Z= 0.0000
              bulge 0.1436
              center X= 0.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
              radius 15.0000
              start angle 342
              end angle 15
              at point X= 14.5161 Y= 3.7794 Z= 0.0000
              at point X= 31.2096 Y= 8.1256 Z= 0.0000
              at point X= 31.5561 Y= 6.6537 Z= 0.0000
              bulge 0.4061
              center X= 32.4368 Y= 6.8394 Z= 0.0000
              radius 0.9000
              start angle 192
              end angle 280
              at point X= 32.5978 Y= 5.9539 Z= 0.0000
```

```

at point X= 33.2795 Y= 6.0779 Z= 0.0000
at point X= 33.8239 Y= 6.1121 Z= 0.0000
at point X= 34.3792 Y= 6.0904 Z= 0.0000
at point X= 34.9405 Y= 6.0313 Z= 0.0000
at point X= 35.5063 Y= 5.9417 Z= 0.0000
at point X= 36.5582 Y= 5.7008 Z= 0.0000
at point X= 37.6178 Y= 5.3759 Z= 0.0000
at point X= 38.6813 Y= 4.9758 Z= 0.0000
bulge -0.0138
center X= 0.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
radius 39.0000
start angle 7
end angle 4
at point X= 38.8968 Y= 2.8359 Z= 0.0000
at point X= 37.9344 Y= 2.2318 Z= 0.0000
at point X= 36.9608 Y= 1.7022 Z= 0.0000
at point X= 35.9781 Y= 1.2564 Z= 0.0000
at point X= 35.4415 Y= 1.0558 Z= 0.0000
at point X= 34.9033 Y= 0.8859 Z= 0.0000
at point X= 34.3635 Y= 0.7540 Z= 0.0000
at point X= 33.8232 Y= 0.6790 Z= 0.0000
at point X= 33.1304 Y= 0.6645 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 33.1492 Y= -0.2353 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 91
end angle 180
at point X= 32.2492 Y= -0.2289 Z= 0.0000
at point X= 32.2030 Y= -1.7403 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 33.1017 Y= -1.7889 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 177
end angle 265
at point X= 33.0281 Y= -2.6859 Z= 0.0000
at point X= 33.7186 Y= -2.7426 Z= 0.0000
at point X= 34.2533 Y= -2.8504 Z= 0.0000
at point X= 34.7841 Y= -3.0151 Z= 0.0000
at point X= 35.3110 Y= -3.2175 Z= 0.0000
at point X= 35.8343 Y= -3.4504 Z= 0.0000
at point X= 36.7880 Y= -3.9554 Z= 0.0000
at point X= 37.7274 Y= -4.5435 Z= 0.0000

```

LWPOLYLINE Layer: "Probeta -9,25 Grados"

Space: Model space

Handle = 1DC

Closed

Constant width 0.0000

area 293.5860

perimeter 82.4701

at point X= 40.0566 Y= -4.4363 Z= 0.0000

bulge 0.4061

center X= 39.1651 Y= -4.5601 Z= 0.0000

radius 0.9000

start angle 8

```

end angle      96
  at point X= 39.0663 Y= -3.6655 Z= 0.0000
  at point X= 38.3776 Y= -3.7417 Z= 0.0000
  at point X= 37.8321 Y= -3.7378 Z= 0.0000
  at point X= 37.2797 Y= -3.6774 Z= 0.0000
  at point X= 36.7239 Y= -3.5793 Z= 0.0000
  at point X= 36.1657 Y= -3.4504 Z= 0.0000
  at point X= 35.1332 Y= -3.1367 Z= 0.0000
  at point X= 34.0989 Y= -2.7387 Z= 0.0000
  at point X= 33.0658 Y= -2.2654 Z= 0.0000
    bul ge    -0.0138
    center X= 72.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
    radi us   39.0000
start angle    183
end angle      180
  at point X= 33.0002 Y= -0.1157 Z= 0.0000
  at point X= 34.0024 Y= 0.4198 Z= 0.0000
  at point X= 35.0105 Y= 0.8802 Z= 0.0000
  at point X= 36.0219 Y= 1.2564 Z= 0.0000
  at point X= 36.5711 Y= 1.4190 Z= 0.0000
  at point X= 37.1200 Y= 1.5509 Z= 0.0000
  at point X= 37.6677 Y= 1.6449 Z= 0.0000
  at point X= 38.2118 Y= 1.6821 Z= 0.0000
  at point X= 38.9039 Y= 1.6481 Z= 0.0000
    bul ge     0.4061
    center X= 38.9480 Y= 2.5471 Z= 0.0000
    radi us    0.9000
start angle    267
end angle      356
  at point X= 39.8453 Y= 2.4779 Z= 0.0000
  at point X= 39.9968 Y= 3.9824 Z= 0.0000
  at point X= 57.1148 Y= 1.8523 Z= 0.0000
    bul ge     0.1436
    center X= 72.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
    radi us   15.0000
start angle    173
end angle      206
  at point X= 58.4718 Y= -6.4797 Z= 0.0000
  at point X= 42.9143 Y= -13.9314 Z= 0.0000
  at point X= 42.2932 Y= -12.5527 Z= 0.0000
    bul ge     0.4061
    center X= 41.4642 Y= -12.9030 Z= 0.0000
    radi us    0.9000
start angle    23
end angle      111
  at point X= 41.1372 Y= -12.0645 Z= 0.0000
  at point X= 40.4916 Y= -12.3163 Z= 0.0000
  at point X= 39.9638 Y= -12.4537 Z= 0.0000
  at point X= 39.4146 Y= -12.5384 Z= 0.0000
  at point X= 38.8522 Y= -12.5874 Z= 0.0000
  at point X= 38.2798 Y= -12.6075 Z= 0.0000
  at point X= 37.2012 Y= -12.5717 Z= 0.0000
  at point X= 36.0991 Y= -12.4549 Z= 0.0000
  at point X= 34.9788 Y= -12.2651 Z= 0.0000
    bul ge    -0.0138

```

```

center X= 72.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
radius 39.0000
start angle 198
end angle 195
at point X= 34.3590 Y= -10.2057 Z= 0.0000
at point X= 35.1884 Y= -9.4290 Z= 0.0000
at point X= 36.0430 Y= -8.7234 Z= 0.0000
at point X= 36.9227 Y= -8.0982 Z= 0.0000
at point X= 37.4111 Y= -7.7990 Z= 0.0000
at point X= 37.9071 Y= -7.5295 Z= 0.0000
at point X= 38.4118 Y= -7.2970 Z= 0.0000
at point X= 38.9278 Y= -7.1203 Z= 0.0000
at point X= 39.6051 Y= -6.9739 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 39.4150 Y= -6.0942 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 282
end angle 11
at point X= 40.2996 Y= -5.9288 Z= 0.0000

```

*A.9.2. Coordenadas de los puntos que definen la geometría del modelo obtenido en software AutoCAD para la posición -11,25°.*

```

LWPOLYLINE Layer: "Herramienta Deformadora -11,25 Grados"
Space: Model space
Handle = 1DB
Closed
Constant width 0.0000
area 293.5860
perimeter 82.4701
at point X= 38.4459 Y= -6.5510 Z= 0.0000
bulge -0.0138
center X= 0.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
radius 39.0000
start angle 350
end angle 347
at point X= 38.0263 Y= -8.6603 Z= 0.0000
at point X= 36.9293 Y= -8.9567 Z= 0.0000
at point X= 35.8435 Y= -9.1785 Z= 0.0000
at point X= 34.7733 Y= -9.3175 Z= 0.0000
at point X= 34.2016 Y= -9.3524 Z= 0.0000
at point X= 33.6372 Y= -9.3575 Z= 0.0000
at point X= 33.0824 Y= -9.3258 Z= 0.0000
at point X= 32.5438 Y= -9.2396 Z= 0.0000
at point X= 31.8771 Y= -9.0509 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 31.6319 Y= -9.9169 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 74
end angle 163
at point X= 30.7731 Y= -9.6476 Z= 0.0000

```

```

at point X= 30.2871 Y= -11.0795 Z= 0.0000
at point X= 14.0870 Y= -5.1533 Z= 0.0000
  bul ge 0.1436
  center X= 0.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
  radi us 15.0000
start angle 340
end angle 13
at point X= 14.6391 Y= 3.2705 Z= 0.0000
at point X= 31.4741 Y= 7.0315 Z= 0.0000
at point X= 31.7691 Y= 5.5484 Z= 0.0000
  bul ge 0.4061
  center X= 32.6557 Y= 5.7032 Z= 0.0000
  radi us 0.9000
start angle 190
end angle 278
at point X= 32.7857 Y= 4.8127 Z= 0.0000
at point X= 33.4714 Y= 4.9128 Z= 0.0000
at point X= 34.0166 Y= 4.9279 Z= 0.0000
at point X= 34.5708 Y= 4.8869 Z= 0.0000
at point X= 35.1297 Y= 4.8082 Z= 0.0000
at point X= 35.6920 Y= 4.6989 Z= 0.0000
at point X= 36.7349 Y= 4.4214 Z= 0.0000
at point X= 37.7825 Y= 4.0598 Z= 0.0000
at point X= 38.8314 Y= 3.6228 Z= 0.0000
  bul ge -0.0138
  center X= 0.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
  radi us 39.0000
start angle 5
end angle 2
at point X= 38.9720 Y= 1.4767 Z= 0.0000
at point X= 37.9891 Y= 0.9066 Z= 0.0000
at point X= 36.9977 Y= 0.4112 Z= 0.0000
at point X= 36.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
at point X= 35.4568 Y= -0.1817 Z= 0.0000
at point X= 34.9129 Y= -0.3327 Z= 0.0000
at point X= 34.3688 Y= -0.4457 Z= 0.0000
at point X= 33.8263 Y= -0.5019 Z= 0.0000
at point X= 33.1334 Y= -0.4921 Z= 0.0000
  bul ge 0.4061
  center X= 33.1208 Y= -1.3920 Z= 0.0000
  radi us 0.9000
start angle 89
end angle 178
at point X= 32.2216 Y= -1.3542 Z= 0.0000
at point X= 32.1227 Y= -2.8631 Z= 0.0000
  bul ge 0.4061
  center X= 33.0191 Y= -2.9430 Z= 0.0000
  radi us 0.9000
start angle 175
end angle 263
at point X= 32.9142 Y= -3.8369 Z= 0.0000
at point X= 33.6024 Y= -3.9176 Z= 0.0000
at point X= 34.1330 Y= -4.0441 Z= 0.0000
at point X= 34.6577 Y= -4.2272 Z= 0.0000
at point X= 35.1772 Y= -4.4479 Z= 0.0000

```

```

at point X= 35.6920 Y= -4.6989 Z= 0.0000
at point X= 36.6275 Y= -5.2369 Z= 0.0000
at point X= 37.5458 Y= -5.8574 Z= 0.0000

```

```

LWPOLYLINE Layer: "Probeta -11,25 Grados"
Space: Model space

```

```

Handle = 1DC

```

```

Closed

```

```

Constant width 0.0000
area 293.5860
perimeter 82.4701
at point X= 40.2309 Y= -5.5484 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 39.3443 Y= -5.7032 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 10
end angle 98
at point X= 39.2143 Y= -4.8127 Z= 0.0000
at point X= 38.5286 Y= -4.9128 Z= 0.0000
at point X= 37.9834 Y= -4.9279 Z= 0.0000
at point X= 37.4292 Y= -4.8869 Z= 0.0000
at point X= 36.8703 Y= -4.8082 Z= 0.0000
at point X= 36.3080 Y= -4.6989 Z= 0.0000
at point X= 35.2651 Y= -4.4214 Z= 0.0000
at point X= 34.2175 Y= -4.0598 Z= 0.0000
at point X= 33.1686 Y= -3.6228 Z= 0.0000
bulge -0.0138
center X= 72.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
radius 39.0000
start angle 185
end angle 182
at point X= 33.0280 Y= -1.4767 Z= 0.0000
at point X= 34.0109 Y= -0.9066 Z= 0.0000
at point X= 35.0023 Y= -0.4112 Z= 0.0000
at point X= 36.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
at point X= 36.5432 Y= 0.1817 Z= 0.0000
at point X= 37.0871 Y= 0.3327 Z= 0.0000
at point X= 37.6312 Y= 0.4457 Z= 0.0000
at point X= 38.1737 Y= 0.5019 Z= 0.0000
at point X= 38.8666 Y= 0.4921 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 38.8792 Y= 1.3920 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 269
end angle 358
at point X= 39.7784 Y= 1.3542 Z= 0.0000
at point X= 39.8773 Y= 2.8631 Z= 0.0000
at point X= 57.0592 Y= 1.3317 Z= 0.0000
bulge 0.1436
center X= 72.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
radius 15.0000
start angle 175
end angle 208
at point X= 58.7061 Y= -6.9479 Z= 0.0000
at point X= 43.4182 Y= -14.9380 Z= 0.0000

```

```

at point X= 42.7494 Y= -13.5818 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 41.9331 Y= -13.9608 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 25
end angle 113
at point X= 41.5770 Y= -13.1343 Z= 0.0000
at point X= 40.9406 Y= -13.4084 Z= 0.0000
at point X= 40.4179 Y= -13.5642 Z= 0.0000
at point X= 39.8720 Y= -13.6680 Z= 0.0000
at point X= 39.3117 Y= -13.7366 Z= 0.0000
at point X= 38.7403 Y= -13.7766 Z= 0.0000
at point X= 37.6612 Y= -13.7785 Z= 0.0000
at point X= 36.5557 Y= -13.7003 Z= 0.0000
at point X= 35.4294 Y= -13.5496 Z= 0.0000
bulge -0.0138
center X= 72.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
radius 39.0000
start angle 200
end angle 197
at point X= 34.7381 Y= -11.5131 Z= 0.0000
at point X= 35.5399 Y= -10.7080 Z= 0.0000
at point X= 36.3694 Y= -9.9729 Z= 0.0000
at point X= 37.2267 Y= -9.3175 Z= 0.0000
at point X= 37.7043 Y= -9.0014 Z= 0.0000
at point X= 38.1906 Y= -8.7148 Z= 0.0000
at point X= 38.6869 Y= -8.4648 Z= 0.0000
at point X= 39.1964 Y= -8.2701 Z= 0.0000
at point X= 39.8682 Y= -8.1002 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 39.6475 Y= -7.2277 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 284
end angle 13
at point X= 40.5259 Y= -7.0315 Z= 0.0000

```

*A.9.3. Coordenadas de los puntos que definen la geometría del modelo obtenido en software AutoCAD para la posición -13,25°.*

```

LWPOLYLINE Layer: "Herramienta Deformadora -13,25 Grados"
                Space: Model space
                Handle = 1DB
                Closed
                Constant width 0.0000
                area 293.5860
                perimeter 82.4701
                at point X= 38.1938 Y= -7.8887 Z= 0.0000
                bulge -0.0138
                center X= 0.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
                radius 39.0000
                start angle 348
                end angle 345
                at point X= 37.7009 Y= -9.9821 Z= 0.0000
                at point X= 36.5943 Y= -10.2400 Z= 0.0000
                at point X= 35.5013 Y= -10.4238 Z= 0.0000
                at point X= 34.4270 Y= -10.5254 Z= 0.0000
                at point X= 33.8544 Y= -10.5403 Z= 0.0000
                at point X= 33.2901 Y= -10.5257 Z= 0.0000
                at point X= 32.7368 Y= -10.4747 Z= 0.0000
                at point X= 32.2015 Y= -10.3698 Z= 0.0000
                at point X= 31.5418 Y= -10.1579 Z= 0.0000
                bulge 0.4061
                center X= 31.2666 Y= -11.0148 Z= 0.0000
                radius 0.9000
                start angle 72
                end angle 161
                at point X= 30.4177 Y= -10.7157 Z= 0.0000
                at point X= 29.8820 Y= -12.1298 Z= 0.0000
                at point X= 13.8986 Y= -5.6418 Z= 0.0000
                bulge 0.1436
                center X= 0.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
                radius 15.0000
                start angle 338
                end angle 11
                at point X= 14.7443 Y= 2.7576 Z= 0.0000
                at point X= 31.7004 Y= 5.9288 Z= 0.0000
                at point X= 31.9434 Y= 4.4363 Z= 0.0000
                bulge 0.4061
                center X= 32.8349 Y= 4.5601 Z= 0.0000
                radius 0.9000
                start angle 188
                end angle 276
                at point X= 32.9337 Y= 3.6655 Z= 0.0000
                at point X= 33.6224 Y= 3.7417 Z= 0.0000
                at point X= 34.1679 Y= 3.7378 Z= 0.0000
                at point X= 34.7203 Y= 3.6774 Z= 0.0000
                at point X= 35.2761 Y= 3.5793 Z= 0.0000
                at point X= 35.8343 Y= 3.4504 Z= 0.0000

```

```

at point X= 36.8668 Y= 3.1367 Z= 0.0000
at point X= 37.9011 Y= 2.7387 Z= 0.0000
at point X= 38.9342 Y= 2.2654 Z= 0.0000
bulge -0.0138
center X= 0.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
radius 39.0000
start angle 3
end angle 0
at point X= 38.9998 Y= 0.1157 Z= 0.0000
at point X= 37.9976 Y= -0.4198 Z= 0.0000
at point X= 36.9895 Y= -0.8802 Z= 0.0000
at point X= 35.9781 Y= -1.2564 Z= 0.0000
at point X= 35.4289 Y= -1.4190 Z= 0.0000
at point X= 34.8800 Y= -1.5509 Z= 0.0000
at point X= 34.3323 Y= -1.6449 Z= 0.0000
at point X= 33.7882 Y= -1.6821 Z= 0.0000
at point X= 33.0961 Y= -1.6481 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 33.0520 Y= -2.5471 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 87
end angle 176
at point X= 32.1547 Y= -2.4779 Z= 0.0000
at point X= 32.0032 Y= -3.9824 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 32.8963 Y= -4.0936 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 173
end angle 261
at point X= 32.7602 Y= -4.9832 Z= 0.0000
at point X= 33.4452 Y= -5.0880 Z= 0.0000
at point X= 33.9711 Y= -5.2329 Z= 0.0000
at point X= 34.4890 Y= -5.4342 Z= 0.0000
at point X= 35.0005 Y= -5.6728 Z= 0.0000
at point X= 35.5063 Y= -5.9417 Z= 0.0000
at point X= 36.4224 Y= -6.5120 Z= 0.0000
at point X= 37.3185 Y= -7.1641 Z= 0.0000

```

LWPOLYLINE Layer: "Probeta -13, 25 Grados"

Space: Model space

Handle = 1DC

Closed

```

Constant width 0.0000
area 293.5860
perimeter 82.4701
at point X= 40.4439 Y= -6.6537 Z= 0.0000
bulge 0.4061
center X= 39.5632 Y= -6.8394 Z= 0.0000
radius 0.9000
start angle 12
end angle 100
at point X= 39.4022 Y= -5.9539 Z= 0.0000
at point X= 38.7205 Y= -6.0779 Z= 0.0000
at point X= 38.1761 Y= -6.1121 Z= 0.0000
at point X= 37.6208 Y= -6.0904 Z= 0.0000

```

```

at point X= 37.0595 Y= -6.0313 Z= 0.0000
at point X= 36.4937 Y= -5.9417 Z= 0.0000
at point X= 35.4418 Y= -5.7008 Z= 0.0000
at point X= 34.3822 Y= -5.3759 Z= 0.0000
at point X= 33.3187 Y= -4.9758 Z= 0.0000
  bul ge -0.0138
  center X= 72.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
  radi us 39.0000
start angle 187
end angle 184
at point X= 33.1032 Y= -2.8359 Z= 0.0000
at point X= 34.0656 Y= -2.2318 Z= 0.0000
at point X= 35.0392 Y= -1.7022 Z= 0.0000
at point X= 36.0219 Y= -1.2564 Z= 0.0000
at point X= 36.5585 Y= -1.0558 Z= 0.0000
at point X= 37.0967 Y= -0.8859 Z= 0.0000
at point X= 37.6365 Y= -0.7540 Z= 0.0000
at point X= 38.1768 Y= -0.6790 Z= 0.0000
at point X= 38.8696 Y= -0.6645 Z= 0.0000
  bul ge 0.4061
  center X= 38.8508 Y= 0.2353 Z= 0.0000
  radi us 0.9000
start angle 271
end angle 0
at point X= 39.7508 Y= 0.2289 Z= 0.0000
at point X= 39.7970 Y= 1.7403 Z= 0.0000
at point X= 57.0219 Y= 0.8094 Z= 0.0000
  bul ge 0.1436
  center X= 72.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
  radi us 15.0000
start angle 177
end angle 210
at point X= 58.9567 Y= -7.4076 Z= 0.0000
at point X= 43.9569 Y= -15.9264 Z= 0.0000
at point X= 43.2412 Y= -14.5943 Z= 0.0000
  bul ge 0.4061
  center X= 42.4386 Y= -15.0016 Z= 0.0000
  radi us 0.9000
start angle 27
end angle 115
at point X= 42.0539 Y= -14.1880 Z= 0.0000
at point X= 41.4275 Y= -14.4842 Z= 0.0000
at point X= 40.9105 Y= -14.6581 Z= 0.0000
at point X= 40.3686 Y= -14.7809 Z= 0.0000
at point X= 39.8110 Y= -14.8690 Z= 0.0000
at point X= 39.2414 Y= -14.9290 Z= 0.0000
at point X= 38.1630 Y= -14.9685 Z= 0.0000
at point X= 37.0554 Y= -14.9289 Z= 0.0000
at point X= 35.9246 Y= -14.8177 Z= 0.0000
  bul ge -0.0138
  center X= 72.0000 Y= 0.0000 Z= 0.0000
  radi us 39.0000
start angle 202
end angle 199
at point X= 35.1626 Y= -12.8065 Z= 0.0000

```

```
at point X= 35.9358 Y= -11.9739 Z= 0.0000
at point X= 36.7391 Y= -11.2104 Z= 0.0000
at point X= 37.5730 Y= -10.5254 Z= 0.0000
at point X= 38.0394 Y= -10.1928 Z= 0.0000
at point X= 38.5153 Y= -9.8894 Z= 0.0000
at point X= 39.0026 Y= -9.6222 Z= 0.0000
at point X= 39.5050 Y= -9.4099 Z= 0.0000
at point X= 40.1705 Y= -9.2167 Z= 0.0000
  bulge 0.4061
  center X= 39.9195 Y= -8.3524 Z= 0.0000
  radius 0.9000
start angle 286
end angle 15
at point X= 40.7904 Y= -8.1256 Z= 0.0000
```

## Anexo # 10. Códigos ANSYS que contienen la etapa de pre-proceso y de solución de los modelos.

### A.10.1. Códigos ANSYS que contienen la etapa de pre-proceso y de solución del modelo correspondiente a la posición $-9,25^\circ$ .

```
/PREP7
!*
! -9,25 Grados
!*
! KEY POINT (Puntos para crear el contorno del modelo).
!*
!*
! Elemento Rígido (Herramienta deformadora).
!*
K, ,38.6511, -5.2052, 0.0000
K, ,0.0000, 0.0000, 0.0000
!radio 39.0000
K, ,38.3054, -7.3279, 0.0000
K, ,37.2194, -7.6624, 0.0000
K, ,36.1420, -7.9220, 0.0000
K, ,35.0773, -8.0982, 0.0000
K, ,34.5072, -8.1531, 0.0000
K, ,33.9433, -8.1779, 0.0000
K, ,33.3877, -8.1656, 0.0000
K, ,32.8464, -8.0983, 0.0000
K, ,32.1735, -7.9329, 0.0000
K, ,31.9587, -8.8069, 0.0000
!radio 0.9000
K, ,31.0911, -8.5678, 0.0000
K, ,30.6553, -10.0158, 0.0000
K, ,14.2583, -4.6585, 0.0000
!radio 15.0000
K, ,14.5161, 3.7794, 0.0000
K, ,31.2096, 8.1256, 0.0000
K, ,31.5561, 6.6537, 0.0000
K, ,32.4368, 6.8394, 0.0000
!radio 0.9000
K, ,32.5978, 5.9539, 0.0000
K, ,33.2795, 6.0779, 0.0000
K, ,33.8239, 6.1121, 0.0000
K, ,34.3792, 6.0904, 0.0000
K, ,34.9405, 6.0313, 0.0000
K, ,35.5063, 5.9417, 0.0000
K, ,36.5582, 5.7008, 0.0000
K, ,37.6178, 5.3759, 0.0000
K, ,38.6813, 4.9758, 0.0000
!radio 39.0000
K, ,38.8968, 2.8359, 0.0000
K, ,37.9344, 2.2318, 0.0000
K, ,36.9608, 1.7022, 0.0000
```

```

K, , 35. 9781, 1. 2564, 0. 0000
K, , 35. 4415, 1. 0558, 0. 0000
K, , 34. 9033, 0. 8859, 0. 0000
K, , 34. 3635, 0. 7540, 0. 0000
K, , 33. 8232, 0. 6790, 0. 0000
K, , 33. 1304, 0. 6645, 0. 0000
K, , 33. 1492, -0. 2353, 0. 0000
!radi o 0. 9000
K, , 32. 2492, -0. 2289, 0. 0000
K, , 32. 2030, -1. 7403, 0. 0000
K, , 33. 1017, -1. 7889, 0. 0000
!radi o 0. 9000
K, , 33. 0281, -2. 6859, 0. 0000
K, , 33. 7186, -2. 7426, 0. 0000
K, , 34. 2533, -2. 8504, 0. 0000
K, , 34. 7841, -3. 0151, 0. 0000
K, , 35. 3110, -3. 2175, 0. 0000
K, , 35. 8343, -3. 4504, 0. 0000
K, , 36. 7880, -3. 9554, 0. 0000
K, , 37. 7274, -4. 5435, 0. 0000
! *
! Elemento Flexi ble (Probeta).
! *
K, , 40. 0566, -4. 4363, 0. 0000
K, , 39. 1651, -4. 5601, 0. 0000
!radi o 0. 9000
K, , 39. 0663, -3. 6655, 0. 0000
K, , 38. 3776, -3. 7417, 0. 0000
K, , 37. 8321, -3. 7378, 0. 0000
K, , 37. 2797, -3. 6774, 0. 0000
K, , 36. 7239, -3. 5793, 0. 0000
K, , 36. 1657, -3. 4504, 0. 0000
K, , 35. 1332, -3. 1367, 0. 0000
K, , 34. 0989, -2. 7387, 0. 0000
K, , 33. 0658, -2. 2654, 0. 0000
K, , 72. 0000, 0. 0000, 0. 0000
!radi o 39. 0000
K, , 33. 0002, -0. 1157, 0. 0000
K, , 34. 0024, 0. 4198, 0. 0000
K, , 35. 0105, 0. 8802, 0. 0000
K, , 36. 0219, 1. 2564, 0. 0000
K, , 36. 5711, 1. 4190, 0. 0000
K, , 37. 1200, 1. 5509, 0. 0000
K, , 37. 6677, 1. 6449, 0. 0000
K, , 38. 2118, 1. 6821, 0. 0000
K, , 38. 9039, 1. 6481, 0. 0000
K, , 38. 9480, 2. 5471, 0. 0000
!radi o 0. 9000
K, , 39. 8453, 2. 4779, 0. 0000
K, , 39. 9968, 3. 9824, 0. 0000
K, , 57. 1148, 1. 8523, 0. 0000
!radi o 15. 0000
K, , 58. 4718, -6. 4797, 0. 0000
K, , 42. 9143, -13. 9314, 0. 0000
K, , 42. 2932, -12. 5527, 0. 0000

```

```

K, , 41. 4642, -12. 9030, 0. 0000
! radi o    0. 9000
K, , 41. 1372, -12. 0645, 0. 0000
K, , 40. 4916, -12. 3163, 0. 0000
K, , 39. 9638, -12. 4537, 0. 0000
K, , 39. 4146, -12. 5384, 0. 0000
K, , 38. 8522, -12. 5874, 0. 0000
K, , 38. 2798, -12. 6075, 0. 0000
K, , 37. 2012, -12. 5717, 0. 0000
K, , 36. 0991, -12. 4549, 0. 0000
K, , 34. 9788, -12. 2651, 0. 0000
! radi o    39. 0000
K, , 34. 3590, -10. 2057, 0. 0000
K, , 35. 1884, -9. 4290, 0. 0000
K, , 36. 0430, -8. 7234, 0. 0000
K, , 36. 9227, -8. 0982, 0. 0000
K, , 37. 4111, -7. 7990, 0. 0000
K, , 37. 9071, -7. 5295, 0. 0000
K, , 38. 4118, -7. 2970, 0. 0000
K, , 38. 9278, -7. 1203, 0. 0000
K, , 39. 6051, -6. 9739, 0. 0000
K, , 39. 4150, -6. 0942, 0. 0000
! radi o    0. 9000
K, , 40. 2996, -5. 9288, 0. 0000
! *
! LINEAS DEL CONTORNO DEL MODELO GEOMÉTRICO.
! *
! Elemento Rígi do (Herrami enta deformadora).
! *
L,      16,      17
L,      15,      14
L,      20,      21
L,      21,      22
L,      22,      23
L,      23,      24
L,      24,      25
L,      25,      26
L,      26,      27
L,      27,      28
L,      37,      36
L,      36,      35
L,      35,      34
L,      34,      33
L,      31,      30
L,      30,      29
L,      33,      32
L,      32,      31
L,      42,      43
L,      43,      44
L,      44,      45
L,      45,      46
L,      46,      47
L,      47,      48
L,      48,      49
L,      49,      1

```

L, 11, 10  
L, 10, 9  
L, 9, 8  
L, 8, 7  
L, 7, 6  
L, 6, 5  
L, 5, 4  
L, 4, 3  
L, 14, 13  
L, 40, 39  
L, 18, 17

! \*

LARC, 15, 16, 2, 15,

LARC, 18, 20, 19, 0. 9,

LARC, 39, 37, 38, 0. 9,

LARC, 42, 40, 41, 0. 9,

LARC, 29, 28, 2, 39,

LARC, 13, 11, 12, 0. 9,

LARC, 3, 1, 2, 39,

! \*

! Elemento Flexible (Probeta).

! \*

L, 92, 93

L, 74, 73

L, 73, 72

L, 76, 77

L, 79, 80

L, 80, 81

L, 81, 82

L, 82, 83

L, 83, 84

L, 84, 85

L, 85, 86

L, 86, 87

L, 88, 89

L, 89, 90

L, 90, 91

L, 91, 92

L, 93, 94

L, 94, 95

L, 95, 96

L, 98, 50

L, 52, 53

L, 53, 54

L, 54, 55

L, 55, 56

L, 56, 57

L, 57, 58

L, 58, 59

L, 59, 60

L, 62, 63

L, 63, 64

L, 64, 65

L, 65, 66

L, 66, 67

```

L,      67,      68
L,      68,      69
L,      69,      70
! *
LARC, 70, 72, 71, 0.9,
LARC, 52, 50, 51, 0.9,
LARC, 96, 98, 97, 0.9,
LARC, 79, 77, 78, 0.9,
LARC, 87, 88, 61, 39,
LARC, 60, 62, 61, 39,
LARC, 75, 74, 61, 15,
! *
! KEY POINTS Y LINEAS PARA LA APLICACIÓN DE LAS CARGAS.
! *
! *
KBETW, 75, 76, 0, RATIO, 0.79543,
KBETW, 75, 76, 0, RATIO, 0.66337,
KBETW, 75, 76, 0, RATIO, 0.50247,
! *
L,      75,      101
L,      101,     100
L,      100,     99
L,      99,      76
! *
! ELEMENTO PARA EL MALLADO (del Elemento Flexible)
! *
ET, 1, PLANE82
! *
KEYOPT, 1, 3, 3
KEYOPT, 1, 5, 0
KEYOPT, 1, 6, 0
! *
! CONSTANTE REAL (Espesor de la probeta).
! *
R, 1, 25,
! *
! *
! PROPIEDADES DEL MATERIAL DEL ELEMENTO FLEXIBLE (Probeta).
! *
MPTEMP, , , , , , , ,
MPTEMP, 1, 0
MPDATA, EX, 1, , 2e5
MPDATA, PRXY, 1, , 0.27
TB, BISO, 1, 1, 2,
TBTEMP, 0
TBDATA, , 390, 1.45e5, , , ,
! *
! CREACIÓN DEL ÁREA DE LA HERRAMIENTA.
! *
FLST, 2, 44, 4
FI TEM, 2, 38
FI TEM, 2, 1
FI TEM, 2, 2
FI TEM, 2, 43
FI TEM, 2, 35

```

FI TEM, 2, 27  
FI TEM, 2, 28  
FI TEM, 2, 29  
FI TEM, 2, 30  
FI TEM, 2, 31  
FI TEM, 2, 32  
FI TEM, 2, 33  
FI TEM, 2, 34  
FI TEM, 2, 44  
FI TEM, 2, 26  
FI TEM, 2, 25  
FI TEM, 2, 24  
FI TEM, 2, 23  
FI TEM, 2, 22  
FI TEM, 2, 21  
FI TEM, 2, 20  
FI TEM, 2, 19  
FI TEM, 2, 41  
FI TEM, 2, 36  
FI TEM, 2, 40  
FI TEM, 2, 11  
FI TEM, 2, 12  
FI TEM, 2, 13  
FI TEM, 2, 14  
FI TEM, 2, 17  
FI TEM, 2, 18  
FI TEM, 2, 15  
FI TEM, 2, 16  
FI TEM, 2, 42  
FI TEM, 2, 10  
FI TEM, 2, 9  
FI TEM, 2, 8  
FI TEM, 2, 7  
FI TEM, 2, 6  
FI TEM, 2, 5  
FI TEM, 2, 4  
FI TEM, 2, 3  
FI TEM, 2, 39  
FI TEM, 2, 37  
AL, P51X

! \*

! CREACIÓN DEL ÁREA Y EL MALLADO DE LA PROBETA.

! \*

! \*

FLST, 3, 4, 8

FI TEM, 3, 37. 3, 0. 8, 0

FI TEM, 3, 36. 25, 0. 55, 0

FI TEM, 3, 36. 8, 0. 7, 0

FI TEM, 3, 35. 3, 0. 2, 0

K, , P51X

L, 64, 105

L, 65, 103

L, 66, 104

L, 67, 102

L, 105, 103

```

L,      103,      104
L,      104,      102
! *
FLST, 2, 4, 4
FI TEM, 2, 75
FI TEM, 2, 92
FI TEM, 2, 96
FI TEM, 2, 93
AL, P51X
FLST, 2, 1, 5, ORDE, 1
FI TEM, 2, 2
AESI ZE, P51X, 0. 1,
CM, _Y, AREA
ASEL, , , ,      2
CM, _Y1, AREA
CHKMSH, ' AREA'
CMSEL, S, _Y
! *
MSHKEY, 1
AMESH, _Y1
MSHKEY, 0
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
FLST, 2, 4, 4
FI TEM, 2, 76
FI TEM, 2, 93
FI TEM, 2, 97
FI TEM, 2, 94
AL, P51X
FLST, 2, 1, 5, ORDE, 1
FI TEM, 2, 3
AESI ZE, P51X, 0. 1,
CM, _Y, AREA
ASEL, , , ,      3
CM, _Y1, AREA
CHKMSH, ' AREA'
CMSEL, S, _Y
! *
MSHKEY, 1
AMESH, _Y1
MSHKEY, 0
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
LPLLOT
APLOT
LPLLOT
FLST, 2, 4, 4
FI TEM, 2, 77
FI TEM, 2, 94

```

```
FI TEM, 2, 95
FI TEM, 2, 98
AL, P51X
FLST, 2, 1, 5, ORDE, 1
FI TEM, 2, 4
AESIZE, P51X, 0. 1,
CM, _Y, AREA
ASEL, , , , 4
CM, _Y1, AREA
CHKMSH, ' AREA'
CMSEL, S, _Y
! *
MSHKEY, 1
AMESH, _Y1
MSHKEY, 0
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
FLST, 2, 49, 4
FI TEM, 2, 73
FI TEM, 2, 74
FI TEM, 2, 92
FI TEM, 2, 96
FI TEM, 2, 97
FI TEM, 2, 98
FI TEM, 2, 95
FI TEM, 2, 78
FI TEM, 2, 79
FI TEM, 2, 80
FI TEM, 2, 81
FI TEM, 2, 86
FI TEM, 2, 47
FI TEM, 2, 46
FI TEM, 2, 67
FI TEM, 2, 68
FI TEM, 2, 69
FI TEM, 2, 66
FI TEM, 2, 65
FI TEM, 2, 82
FI TEM, 2, 72
FI TEM, 2, 71
FI TEM, 2, 70
FI TEM, 2, 64
FI TEM, 2, 83
FI TEM, 2, 63
FI TEM, 2, 62
FI TEM, 2, 61
FI TEM, 2, 45
FI TEM, 2, 60
FI TEM, 2, 59
FI TEM, 2, 58
FI TEM, 2, 57
FI TEM, 2, 85
```

```

FI TEM, 2, 56
FI TEM, 2, 55
FI TEM, 2, 54
FI TEM, 2, 53
FI TEM, 2, 52
FI TEM, 2, 51
FI TEM, 2, 50
FI TEM, 2, 49
FI TEM, 2, 84
FI TEM, 2, 48
FI TEM, 2, 91
FI TEM, 2, 90
FI TEM, 2, 89
FI TEM, 2, 88
FI TEM, 2, 87
AL, P51X
! *
MSHKEY, 0
CM, _Y, AREA
ASEL, , , , 5
CM, _Y1, AREA
CHKMSH, ' AREA'
CMSEL, S, _Y
! *
AMESH, _Y1
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
/COM, CONTACT PAIR CREATION - START
CM, _NODECM, NODE
CM, _ELEMCM, ELEM
CM, _KPCM, KP
CM, _LINECM, LINE
CM, _AREACM, AREA
CM, _VOLUCM, VOLU
/GSAV, cwz, gsav, , temp
MP, MU, 1, 0.3
MAT, 1
R, 3
REAL, 3
ET, 2, 169
ET, 3, 172
KEYOPT, 3, 9, 0
KEYOPT, 3, 10, 2
R, 3,
RMORE,
RMORE, , 0
RMORE, 0
! Generate the target surface
LSEL, S, , , 11
LSEL, A, , , 12
LSEL, A, , , 13
LSEL, A, , , 14

```

```

LSEL, A, , , 15
LSEL, A, , , 16
LSEL, A, , , 17
LSEL, A, , , 18
CM, _TARGET, LI NE
TYPE, 2
LATT, -1, 3, 2, -1
TYPE, 2
LMESH, ALL
! Generate the contact surface
LSEL, S, , , 73
LSEL, A, , , 74
LSEL, A, , , 75
LSEL, A, , , 76
LSEL, A, , , 77
LSEL, A, , , 78
LSEL, A, , , 79
LSEL, A, , , 80
CM, _CONTACT, LI NE
TYPE, 3
NSLL, S, 1
ESLN, S, 0
ESURF
*SET, _REALI D, 3
ALLSEL
ESEL, ALL
ESEL, S, TYPE, , 2
ESEL, A, TYPE, , 3
ESEL, R, REAL, , 3
LSEL, S, REAL, , 3
/PSYMB, ESYS, 1
/PNUM, TYPE, 1
/NUM, 1
EPLLOT
ESEL, ALL
ESEL, S, TYPE, , 2
ESEL, A, TYPE, , 3
ESEL, R, REAL, , 3
LSEL, S, REAL, , 3
CMSEL, A, _NODECM
CMDEL, _NODECM
CMSEL, A, _ELEMCM
CMDEL, _ELEMCM
CMSEL, S, _KPCM
CMDEL, _KPCM
CMSEL, S, _LI NECM
CMDEL, _LI NECM
CMSEL, S, _AREACM
CMDEL, _AREACM
CMSEL, S, _VOLUCM
CMDEL, _VOLUCM
/GRES, cwz, gsav
CMDEL, _TARGET
CMDEL, _CONTACT
/COM, CONTACT PAI R CREATI ON - END

```

```

! *
! DESPLAZAMIENTOS Y FUERZAS.
! *
FLST, 2, 1, 4, ORDE, 1
FI TEM, 2, 44
! *
/GO
DL, P51X, , ALL, 0
FLST, 2, 1, 4, ORDE, 1
FI TEM, 2, 87
! *
/GO
DL, P51X, , ALL, 0
/RELOT, RESI ZE
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 74
! *
/GO
DK, P51X, , 0, , 0, UX, UY, , , , ,
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 75
! *
/GO
DK, P51X, , 0, , 0, UX, UY, , , , ,
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 99
! *
/GO
FK, P51X, FX, -5523. 462
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 99
! *
/GO
FK, P51X, FY, 11324. 754
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 100
! *
/GO
FK, P51X, FX, -4602. 885
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 100
! *
/GO
FK, P51X, FY, 9437. 295
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 101
! *
/GO
FK, P51X, FX, -3485. 042
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 101
! *
/GO
FK, P51X, FY, 7145. 381
! *

```

```

! CONTROL DE LA SOLUCION.
!*
NSUBST, 100, 1000, 10
OUTRES, ERASE
OUTRES, ALL, 1
AUTOTS, 1
LNSRCH, 1
NEQIT, 100
TIME, 1
!*
/SOLU
!*
! SOLUCIÓN.
!*
SOLVE
FINISH
!*

```

*A.10.2. Códigos ANSYS que contienen la etapa de pre-proceso y de solución del modelo correspondiente a la posición -11,25°.*

```

/PREP7
!*
! -11,25 Grados
!*
! KEY POINT (Puntos para crear el contorno del modelo).
!*
! Elemento Rígido (Herramienta deformadora).
!*
!radio exterior de la rueda    39.0000
!radio agujero de la rueda    15.0000
!radio en el pie del diente    0.9000
!*
K, , 38.4459, -6.5510, 0.0000
K, , 0.0000, 0.0000, 0.0000
K, , 38.0263, -8.6603, 0.0000
K, , 36.9293, -8.9567, 0.0000
K, , 35.8435, -9.1785, 0.0000
K, , 34.7733, -9.3175, 0.0000
K, , 34.2016, -9.3524, 0.0000
K, , 33.6372, -9.3575, 0.0000
K, , 33.0824, -9.3258, 0.0000
K, , 32.5438, -9.2396, 0.0000
K, , 31.8771, -9.0509, 0.0000
K, , 31.6319, -9.9169, 0.0000
K, , 30.7731, -9.6476, 0.0000
K, , 30.2871, -11.0795, 0.0000
K, , 14.0870, -5.1533, 0.0000
K, , 14.6391, 3.2705, 0.0000
K, , 31.4741, 7.0315, 0.0000
K, , 31.7691, 5.5484, 0.0000
K, , 32.6557, 5.7032, 0.0000
K, , 32.7857, 4.8127, 0.0000

```

K, , 33. 4714, 4. 9128, 0. 0000  
 K, , 34. 0166, 4. 9279, 0. 0000  
 K, , 34. 5708, 4. 8869, 0. 0000  
 K, , 35. 1297, 4. 8082, 0. 0000  
 K, , 35. 6920, 4. 6989, 0. 0000  
 K, , 36. 7349, 4. 4214, 0. 0000  
 K, , 37. 7825, 4. 0598, 0. 0000  
 K, , 38. 8314, 3. 6228, 0. 0000  
 K, , 38. 9720, 1. 4767, 0. 0000  
 K, , 37. 9891, 0. 9066, 0. 0000  
 K, , 36. 9977, 0. 4112, 0. 0000  
 K, , 36. 0000, 0. 0000, 0. 0000  
 K, , 35. 4568, -0. 1817, 0. 0000  
 K, , 34. 9129, -0. 3327, 0. 0000  
 K, , 34. 3688, -0. 4457, 0. 0000  
 K, , 33. 8263, -0. 5019, 0. 0000  
 K, , 33. 1334, -0. 4921, 0. 0000  
 K, , 33. 1208, -1. 3920, 0. 0000  
 K, , 32. 2216, -1. 3542, 0. 0000  
 K, , 32. 1227, -2. 8631, 0. 0000  
 K, , 33. 0191, -2. 9430, 0. 0000  
 K, , 32. 9142, -3. 8369, 0. 0000  
 K, , 33. 6024, -3. 9176, 0. 0000  
 K, , 34. 1330, -4. 0441, 0. 0000  
 K, , 34. 6577, -4. 2272, 0. 0000  
 K, , 35. 1772, -4. 4479, 0. 0000  
 K, , 35. 6920, -4. 6989, 0. 0000  
 K, , 36. 6275, -5. 2369, 0. 0000  
 K, , 37. 5458, -5. 8574, 0. 0000

! \*

! Elemento Flexible (Probeta).

!

!radio exterior de la rueda 39.0000

!radio agujero de la rueda 15.0000

!radio en el pie del diente 0.9000

! \*

K, , 40. 2309, -5. 5484, 0. 0000  
 K, , 39. 3443, -5. 7032, 0. 0000  
 K, , 39. 2143, -4. 8127, 0. 0000  
 K, , 38. 5286, -4. 9128, 0. 0000  
 K, , 37. 9834, -4. 9279, 0. 0000  
 K, , 37. 4292, -4. 8869, 0. 0000  
 K, , 36. 8703, -4. 8082, 0. 0000  
 K, , 36. 3080, -4. 6989, 0. 0000  
 K, , 35. 2651, -4. 4214, 0. 0000  
 K, , 34. 2175, -4. 0598, 0. 0000  
 K, , 33. 1686, -3. 6228, 0. 0000  
 K, , 72. 0000, 0. 0000, 0. 0000  
 K, , 33. 0280, -1. 4767, 0. 0000  
 K, , 34. 0109, -0. 9066, 0. 0000  
 K, , 35. 0023, -0. 4112, 0. 0000  
 K, , 36. 0000, 0. 0000, 0. 0000  
 K, , 36. 5432, 0. 1817, 0. 0000  
 K, , 37. 0871, 0. 3327, 0. 0000  
 K, , 37. 6312, 0. 4457, 0. 0000

K, , 38. 1737, 0. 5019, 0. 0000  
 K, , 38. 8666, 0. 4921, 0. 0000  
 K, , 38. 8792, 1. 3920, 0. 0000  
 K, , 39. 7784, 1. 3542, 0. 0000  
 K, , 39. 8773, 2. 8631, 0. 0000  
 K, , 57. 0592, 1. 3317, 0. 0000  
 K, , 58. 7061, -6. 9479, 0. 0000  
 K, , 43. 4182, -14. 9380, 0. 0000  
 K, , 42. 7494, -13. 5818, 0. 0000  
 K, , 41. 9331, -13. 9608, 0. 0000  
 K, , 41. 5770, -13. 1343, 0. 0000  
 K, , 40. 9406, -13. 4084, 0. 0000  
 K, , 40. 4179, -13. 5642, 0. 0000  
 K, , 39. 8720, -13. 6680, 0. 0000  
 K, , 39. 3117, -13. 7366, 0. 0000  
 K, , 38. 7403, -13. 7766, 0. 0000  
 K, , 37. 6612, -13. 7785, 0. 0000  
 K, , 36. 5557, -13. 7003, 0. 0000  
 K, , 35. 4294, -13. 5496, 0. 0000  
 K, , 34. 7381, -11. 5131, 0. 0000  
 K, , 35. 5399, -10. 7080, 0. 0000  
 K, , 36. 3694, -9. 9729, 0. 0000  
 K, , 37. 2267, -9. 3175, 0. 0000  
 K, , 37. 7043, -9. 0014, 0. 0000  
 K, , 38. 1906, -8. 7148, 0. 0000  
 K, , 38. 6869, -8. 4648, 0. 0000  
 K, , 39. 1964, -8. 2701, 0. 0000  
 K, , 39. 8682, -8. 1002, 0. 0000  
 K, , 39. 6475, -7. 2277, 0. 0000  
 K, , 40. 5259, -7. 0315, 0. 0000

! \*

! LINEAS DE CONTORNO DEL MODELO GEOMÉTRICO.

! \*

! Elemento Rígido (Herramienta Deformadora).

! \*

L,	16,	17
L,	17,	18
L,	15,	14
L,	11,	10
L,	10,	9
L,	9,	8
L,	8,	7
L,	7,	6
L,	6,	5
L,	5,	4
L,	4,	3
L,	1,	49
L,	49,	48
L,	48,	47
L,	47,	46
L,	46,	45
L,	45,	44
L,	44,	43
L,	43,	42
L,	37,	36

L, 36, 35  
L, 35, 34  
L, 34, 33  
L, 33, 32  
L, 32, 31  
L, 31, 30  
L, 30, 29  
L, 20, 21  
L, 21, 22  
L, 22, 23  
L, 23, 24  
L, 24, 25  
L, 25, 26  
L, 26, 27  
L, 27, 28  
L, 40, 39  
L, 14, 13

! \*

LARC, 20, 18, 19, 0. 9,

LARC, 39, 37, 38, 0. 9,

LARC, 42, 40, 41, 0. 9,

LARC, 11, 13, 12, 0. 9,

LARC, 3, 1, 2, 39,

LARC, 29, 28, 2, 39,

LARC, 15, 16, 2, 15,

! \*

! Elemento Flexible (Probeta).

! \*

L, 74, 73

L, 73, 72

L, 76, 77

L, 98, 50

L, 79, 80

L, 80, 81

L, 81, 82

L, 82, 83

L, 83, 84

L, 84, 85

L, 85, 86

L, 86, 87

L, 88, 89

L, 89, 90

L, 90, 91

L, 91, 92

L, 92, 93

L, 93, 94

L, 94, 95

L, 95, 96

L, 52, 53

L, 53, 54

L, 54, 55

L, 55, 56

L, 56, 57

L, 57, 58

L, 58, 59

```

L,      59,      60
L,      62,      63
L,      63,      64
L,      64,      65
L,      65,      66
L,      66,      67
L,      67,      68
L,      68,      69
L,      69,      70
! *
LARC, 70, 72, 71, 0. 9,
LARC, 50, 52, 51, 0. 9,
LARC, 98, 96, 97, 0. 9,
LARC, 79, 77, 78, 0. 9,
LARC, 87, 88, 61, 39,
LARC, 60, 62, 61, 39,
LARC, 75, 74, 61, 15,
! *
! KEY POINTS Y LINEAS PARA LA APLICACIÓN DE LAS CARGAS.
! *
KBETW, 75, 76, 0, RATIO, 0. 79543,
KBETW, 75, 76, 0, RATIO, 0. 66337,
KBETW, 75, 76, 0, RATIO, 0. 50247,
! *
L,      75,      101
L,      101,     100
L,      100,     99
L,      99,      76
! *
! ELEMENTO PARA EL MALLADO (Elemento Flexible).
! *
ET, 1, PLANE82
! *
KEYOPT, 1, 3, 3
KEYOPT, 1, 5, 0
KEYOPT, 1, 6, 0
! *
! CONSTANTE REAL (Espesor de la probeta).
! *
R, 1, 25,
! *
! PROPIEDADES DEL MATERIAL DEL ELEMENTO FLEXIBLE (Probeta).
! *
MPTEMP, , , , , , , , ,
MPTEMP, 1, 0
MPDATA, EX, 1, , 2e5
MPDATA, PRXY, 1, , 0. 27
TB, BISO, 1, 1, 2,
TBTEMP, 0
TBDATA, , 390, 1. 45e5, , , ,
! *
! CREACIÓN DEL ÁREA DE LA HERRAMIENTA.
! *
FLST, 2, 44, 4
FITEM, 2, 1

```

FI TEM, 2, 44  
FI TEM, 2, 3  
FI TEM, 2, 2  
FI TEM, 2, 38  
FI TEM, 2, 28  
FI TEM, 2, 29  
FI TEM, 2, 30  
FI TEM, 2, 31  
FI TEM, 2, 32  
FI TEM, 2, 33  
FI TEM, 2, 34  
FI TEM, 2, 35  
FI TEM, 2, 43  
FI TEM, 2, 27  
FI TEM, 2, 26  
FI TEM, 2, 25  
FI TEM, 2, 24  
FI TEM, 2, 23  
FI TEM, 2, 22  
FI TEM, 2, 21  
FI TEM, 2, 20  
FI TEM, 2, 39  
FI TEM, 2, 36  
FI TEM, 2, 40  
FI TEM, 2, 19  
FI TEM, 2, 18  
FI TEM, 2, 17  
FI TEM, 2, 16  
FI TEM, 2, 15  
FI TEM, 2, 14  
FI TEM, 2, 13  
FI TEM, 2, 12  
FI TEM, 2, 42  
FI TEM, 2, 11  
FI TEM, 2, 10  
FI TEM, 2, 9  
FI TEM, 2, 8  
FI TEM, 2, 7  
FI TEM, 2, 6  
FI TEM, 2, 5  
FI TEM, 2, 4  
FI TEM, 2, 41  
FI TEM, 2, 37  
AL, P51X

! \*

! CREACIÓN DEL ÁREA Y EL MALLADO DE LA PROBETA.

! \*

FLST, 3, 4, 8

FI TEM, 3, 37. 4, -0. 4, 0

FI TEM, 3, 36. 3, -0. 7, 0

FI TEM, 3, 36. 85, -0. 55, 0

FI TEM, 3, 35. 4, -1. 05, 0

K, , P51X

L, 64, 105

L, 65, 103

```

L,      66,      104
L,      67,      102
L,     105,      103
L,     103,      104
L,     104,      102
FLST, 2, 4, 4
FI TEM, 2, 75
FI TEM, 2, 92
FI TEM, 2, 93
FI TEM, 2, 96
AL, P51X
FLST, 2, 1, 5, ORDE, 1
FI TEM, 2, 2
AESIZE, P51X, 0. 1,
CM, _Y, AREA
ASEL, , , ,      2
CM, _Y1, AREA
CHKMSH, ' AREA'
CMSEL, S, _Y
! *
MSHKEY, 1
AMESH, _Y1
MSHKEY, 0
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
LPLOT
FLST, 2, 4, 4
FI TEM, 2, 94
FI TEM, 2, 93
FI TEM, 2, 76
FI TEM, 2, 97
AL, P51X
FLST, 2, 1, 5, ORDE, 1
FI TEM, 2, 3
AESIZE, P51X, 0. 1,
CM, _Y, AREA
ASEL, , , ,      3
CM, _Y1, AREA
CHKMSH, ' AREA'
CMSEL, S, _Y
! *
MSHKEY, 1
AMESH, _Y1
MSHKEY, 0
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
LPLOT
FLST, 2, 4, 4
FI TEM, 2, 95

```

```
FI TEM, 2, 77
FI TEM, 2, 94
FI TEM, 2, 98
AL, P51X
FLST, 2, 1, 5, ORDE, 1
FI TEM, 2, 4
AESIZE, P51X, 0. 1,
CM, _Y, AREA
ASEL, , , , 4
CM, _Y1, AREA
CHKMSH, ' AREA'
CMSEL, S, _Y
! *
MSHKEY, 1
AMESH, _Y1
MSHKEY, 0
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
FLST, 2, 49, 4
FI TEM, 2, 73
FI TEM, 2, 74
FI TEM, 2, 92
FI TEM, 2, 96
FI TEM, 2, 97
FI TEM, 2, 98
FI TEM, 2, 95
FI TEM, 2, 78
FI TEM, 2, 79
FI TEM, 2, 80
FI TEM, 2, 81
FI TEM, 2, 86
FI TEM, 2, 72
FI TEM, 2, 71
FI TEM, 2, 70
FI TEM, 2, 69
FI TEM, 2, 68
FI TEM, 2, 67
FI TEM, 2, 66
FI TEM, 2, 65
FI TEM, 2, 82
FI TEM, 2, 48
FI TEM, 2, 83
FI TEM, 2, 64
FI TEM, 2, 63
FI TEM, 2, 62
FI TEM, 2, 61
FI TEM, 2, 60
FI TEM, 2, 59
FI TEM, 2, 58
FI TEM, 2, 85
FI TEM, 2, 57
FI TEM, 2, 56
```

```

FI TEM, 2, 55
FI TEM, 2, 54
FI TEM, 2, 53
FI TEM, 2, 52
FI TEM, 2, 51
FI TEM, 2, 50
FI TEM, 2, 49
FI TEM, 2, 84
FI TEM, 2, 47
FI TEM, 2, 91
FI TEM, 2, 90
FI TEM, 2, 89
FI TEM, 2, 88
FI TEM, 2, 87
FI TEM, 2, 45
FI TEM, 2, 46
AL, P51X
MSHKEY, 0
CM, _Y, AREA
ASEL, , , , 5
CM, _Y1, AREA
CHKMSH, ' AREA'
CMSEL, S, _Y
! *
AMESH, _Y1
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
! CREACIÓN DEL PAR DE CONTACTO.
! *
/COM, CONTACT PAIR CREATION - START
CM, _NODECM, NODE
CM, _ELEMCM, ELEM
CM, _KPCM, KP
CM, _LINECM, LINE
CM, _AREACM, AREA
CM, _VOLUCM, VOLU
/GSAV, cwz, gsav, , temp
MP, MU, 1, 0.3
MAT, 1
R, 3
REAL, 3
ET, 2, 169
ET, 3, 172
KEYOPT, 3, 9, 0
KEYOPT, 3, 10, 2
R, 3,
RMORE,
RMORE, , 0
RMORE, 0
! Generate the target surface
LSEL, S, , , 20
LSEL, A, , , 21

```

```

LSEL, A, , , 22
LSEL, A, , , 23
LSEL, A, , , 24
LSEL, A, , , 25
LSEL, A, , , 26
LSEL, A, , , 27
CM, _TARGET, LI NE
TYPE, 2
LATT, -1, 3, 2, -1
TYPE, 2
LMESH, ALL
! Generate the contact surface
LSEL, S, , , 73
LSEL, A, , , 74
LSEL, A, , , 75
LSEL, A, , , 76
LSEL, A, , , 77
LSEL, A, , , 78
LSEL, A, , , 79
LSEL, A, , , 80
CM, _CONTACT, LI NE
TYPE, 3
NSLL, S, 1
ESLN, S, 0
ESURF
*SET, _REALID, 3
ALLSEL
ESEL, ALL
ESEL, S, TYPE, , 2
ESEL, A, TYPE, , 3
ESEL, R, REAL, , 3
LSEL, S, REAL, , 3
/PSYMB, ESYS, 1
/PNUM, TYPE, 1
/NUM, 1
EPLLOT
ESEL, ALL
ESEL, S, TYPE, , 2
ESEL, A, TYPE, , 3
ESEL, R, REAL, , 3
LSEL, S, REAL, , 3
CMSEL, A, _NODECM
CMDEL, _NODECM
CMSEL, A, _ELEMCM
CMDEL, _ELEMCM
CMSEL, S, _KPCM
CMDEL, _KPCM
CMSEL, S, _LI NECM
CMDEL, _LI NECM
CMSEL, S, _AREACM
CMDEL, _AREACM
CMSEL, S, _VOLUCM
CMDEL, _VOLUCM
/GRES, cwz, gsav
CMDEL, _TARGET

```

```

CMDEL, _CONTACT
/COM, CONTACT PAIR CREATION - END
! DESPLAZAMIENTOS Y FUERZAS
!*
FLST, 2, 1, 4, ORDE, 1
FI TEM, 2, 44
!*
/GO
DL, P51X, , ALL, 0
FLST, 2, 1, 4, ORDE, 1
FI TEM, 2, 87
!*
/GO
DL, P51X, , ALL, 0
/REPLOT, RESI ZE
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 74
!*
/GO
DK, P51X, , 0, , 0, UX, UY, , , , ,
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 75
!*
/GO
DK, P51X, , 0, , 0, UX, UY, , , , ,
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 99
!*
/GO
FK, P51X, FX, -5915. 322
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 99
!*
/GO
FK, P51X, FY, 11125. 17
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 100
!*
/GO
FK, P51X, FX, -4929. 435
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 100
!*
/GO
FK, P51X, FY, 9270. 975
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 101
!*
/GO
FK, P51X, FX, -3732. 2865
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 101
!*
/GO
FK, P51X, FY, 7019. 4525

```

```

! *
! CONTROL DE LA SOLUCIÓN
! *
NSUBST, 100, 1000, 10
OUTRES, ERASE
OUTRES, ALL, 1
AUTOTS, 1
LNSRCH, 1
NEQIT, 100
TIME, 1
/SOLU
! *
! SOLUCIÓN
! *
SOLVE
FINISH
! *

```

*A.10.3. Códigos ANSYS que contienen la etapa de pre-proceso y de solución del modelo correspondiente a la posición -13,25°.*

```

/PREP7
! *
! -13,25 Grados
! *
! KEY POINT (Puntos para crear el contorno del modelo).
! *
! *
! Elemento Rígido (Herramienta deformadora).
! *
K, , 38.1938, -7.8887, 0.0000
K, , 0.0000, 0.0000, 0.0000
! radio 39.0000
K, , 37.7009, -9.9821, 0.0000
K, , 36.5943, -10.2400, 0.0000
K, , 35.5013, -10.4238, 0.0000
K, , 34.4270, -10.5254, 0.0000
K, , 33.8544, -10.5403, 0.0000
K, , 33.2901, -10.5257, 0.0000
K, , 32.7368, -10.4747, 0.0000
K, , 32.2015, -10.3698, 0.0000
K, , 31.5418, -10.1579, 0.0000
K, , 31.2666, -11.0148, 0.0000
! radio 0.9000
K, , 30.4177, -10.7157, 0.0000
K, , 29.8820, -12.1298, 0.0000
K, , 13.8986, -5.6418, 0.0000
! radio 15.0000
K, , 14.7443, 2.7576, 0.0000
K, , 31.7004, 5.9288, 0.0000
K, , 31.9434, 4.4363, 0.0000

```

K, , 32. 8349, 4. 5601, 0. 0000  
 ! radi o 0. 9000  
 K, , 32. 9337, 3. 6655, 0. 0000  
 K, , 33. 6224, 3. 7417, 0. 0000  
 K, , 34. 1679, 3. 7378, 0. 0000  
 K, , 34. 7203, 3. 6774, 0. 0000  
 K, , 35. 2761, 3. 5793, 0. 0000  
 K, , 35. 8343, 3. 4504, 0. 0000  
 K, , 36. 8668, 3. 1367, 0. 0000  
 K, , 37. 9011, 2. 7387, 0. 0000  
 K, , 38. 9342, 2. 2654, 0. 0000  
 ! radi o 39. 0000  
 K, , 38. 9998, 0. 1157, 0. 0000  
 K, , 37. 9976, -0. 4198, 0. 0000  
 K, , 36. 9895, -0. 8802, 0. 0000  
 K, , 35. 9781, -1. 2564, 0. 0000  
 K, , 35. 4289, -1. 4190, 0. 0000  
 K, , 34. 8800, -1. 5509, 0. 0000  
 K, , 34. 3323, -1. 6449, 0. 0000  
 K, , 33. 7882, -1. 6821, 0. 0000  
 K, , 33. 0961, -1. 6481, 0. 0000  
 K, , 33. 0520, -2. 5471, 0. 0000  
 ! radi o 0. 9000  
 K, , 32. 1547, -2. 4779, 0. 0000  
 K, , 32. 0032, -3. 9824, 0. 0000  
 K, , 32. 8963, -4. 0936, 0. 0000  
 ! radi o 0. 9000  
 K, , 32. 7602, -4. 9832, 0. 0000  
 K, , 33. 4452, -5. 0880, 0. 0000  
 K, , 33. 9711, -5. 2329, 0. 0000  
 K, , 34. 4890, -5. 4342, 0. 0000  
 K, , 35. 0005, -5. 6728, 0. 0000  
 K, , 35. 5063, -5. 9417, 0. 0000  
 K, , 36. 4224, -6. 5120, 0. 0000  
 K, , 37. 3185, -7. 1641, 0. 0000  
 ! \*  
 ! El emento Fl exi bl e (Probeta).  
 ! \*  
 K, , 40. 4439, -6. 6537, 0. 0000  
 K, , 39. 5632, -6. 8394, 0. 0000  
 ! radi o 0. 9000  
 K, , 39. 4022, -5. 9539, 0. 0000  
 K, , 38. 7205, -6. 0779, 0. 0000  
 K, , 38. 1761, -6. 1121, 0. 0000  
 K, , 37. 6208, -6. 0904, 0. 0000  
 K, , 37. 0595, -6. 0313, 0. 0000  
 K, , 36. 4937, -5. 9417, 0. 0000  
 K, , 35. 4418, -5. 7008, 0. 0000  
 K, , 34. 3822, -5. 3759, 0. 0000  
 K, , 33. 3187, -4. 9758, 0. 0000  
 K, , 72. 0000, 0. 0000, 0. 0000  
 ! radi o 39. 0000  
 K, , 33. 1032, -2. 8359, 0. 0000  
 K, , 34. 0656, -2. 2318, 0. 0000  
 K, , 35. 0392, -1. 7022, 0. 0000

```

K, , 36. 0219, -1. 2564, 0. 0000
K, , 36. 5585, -1. 0558, 0. 0000
K, , 37. 0967, -0. 8859, 0. 0000
K, , 37. 6365, -0. 7540, 0. 0000
K, , 38. 1768, -0. 6790, 0. 0000
K, , 38. 8696, -0. 6645, 0. 0000
K, , 38. 8508, 0. 2353, 0. 0000
! radi o 0. 9000
K, , 39. 7508, 0. 2289, 0. 0000
K, , 39. 7970, 1. 7403, 0. 0000
K, , 57. 0219, 0. 8094, 0. 0000
! radi o 15. 0000
K, , 58. 9567, -7. 4076, 0. 0000
K, , 43. 9569, -15. 9264, 0. 0000
K, , 43. 2412, -14. 5943, 0. 0000
K, , 42. 4386, -15. 0016, 0. 0000
! radi o 0. 9000
K, , 42. 0539, -14. 1880, 0. 0000
K, , 41. 4275, -14. 4842, 0. 0000
K, , 40. 9105, -14. 6581, 0. 0000
K, , 40. 3686, -14. 7809, 0. 0000
K, , 39. 8110, -14. 8690, 0. 0000
K, , 39. 2414, -14. 9290, 0. 0000
K, , 38. 1630, -14. 9685, 0. 0000
K, , 37. 0554, -14. 9289, 0. 0000
K, , 35. 9246, -14. 8177, 0. 0000
! radi o 39. 0000
K, , 35. 1626, -12. 8065, 0. 0000
K, , 35. 9358, -11. 9739, 0. 0000
K, , 36. 7391, -11. 2104, 0. 0000
K, , 37. 5730, -10. 5254, 0. 0000
K, , 38. 0394, -10. 1928, 0. 0000
K, , 38. 5153, -9. 8894, 0. 0000
K, , 39. 0026, -9. 6222, 0. 0000
K, , 39. 5050, -9. 4099, 0. 0000
K, , 40. 1705, -9. 2167, 0. 0000
K, , 39. 9195, -8. 3524, 0. 0000
! radi o 0. 9000
K, , 40. 7904, -8. 1256, 0. 0000
! *
! LINEAS DEL CONTORNO DEL MODELO GEOMÉTRICO.
! *
! Elemento Rígido (Herramienta deformadora).
! *
L, 16, 17
L, 15, 14
L, 20, 21
L, 21, 22
L, 22, 23
L, 23, 24
L, 24, 25
L, 25, 26
L, 26, 27
L, 27, 28
L, 37, 36

```

L,	36,	35
L,	35,	34
L,	34,	33
L,	31,	30
L,	30,	29
L,	33,	32
L,	32,	31
L,	42,	43
L,	43,	44
L,	44,	45
L,	45,	46
L,	46,	47
L,	47,	48
L,	48,	49
L,	49,	1
L,	11,	10
L,	10,	9
L,	9,	8
L,	8,	7
L,	7,	6
L,	6,	5
L,	5,	4
L,	4,	3
L,	14,	13
L,	40,	39
L,	18,	17

! \*

LARC, 15, 16, 2, 15,

LARC, 18, 20, 19, 0. 9,

LARC, 39, 37, 38, 0. 9,

LARC, 42, 40, 41, 0. 9,

LARC, 29, 28, 2, 39,

LARC, 13, 11, 12, 0. 9,

LARC, 3, 1, 2, 39,

! \*

! El emento Fl exi bl e (Probeta).

! \*

L,	92,	93
L,	74,	73
L,	73,	72
L,	76,	77
L,	79,	80
L,	80,	81
L,	81,	82
L,	82,	83
L,	83,	84
L,	84,	85
L,	85,	86
L,	86,	87
L,	88,	89
L,	89,	90
L,	90,	91
L,	91,	92
L,	93,	94
L,	94,	95

```

L,      95,      96
L,      98,      50
L,      52,      53
L,      53,      54
L,      54,      55
L,      55,      56
L,      56,      57
L,      57,      58
L,      58,      59
L,      59,      60
L,      62,      63
L,      63,      64
L,      64,      65
L,      65,      66
L,      66,      67
L,      67,      68
L,      68,      69
L,      69,      70
! *
LARC, 70, 72, 71, 0. 9,
LARC, 52, 50, 51, 0. 9,
LARC, 96, 98, 97, 0. 9,
LARC, 79, 77, 78, 0. 9,
LARC, 87, 88, 61, 39,
LARC, 60, 62, 61, 39,
LARC, 75, 74, 61, 15,
! *
! KEY POINTS Y LINEAS PARA LA APLICACIÓN DE LAS CARGAS
! *
KBETW, 75, 76, 0, RATI , 0. 79543,
KBETW, 75, 76, 0, RATI , 0. 66337,
KBETW, 75, 76, 0, RATI , 0. 50247,
! *
L,      75,      101
L,      101,     100
L,      100,     99
L,      99,      76
! *
! ELEMENTO PARA EL MALLADO (del Elemento Flexible).
! *
ET, 1, PLANE82
! *
KEYOPT, 1, 3, 3
KEYOPT, 1, 5, 0
KEYOPT, 1, 6, 0
! *
! CONSTANTE REAL (Espesor de la probeta).
! *
R, 1, 25,
! *
! *
! PROPIEDADES DEL MATERIAL DEL ELEMENTO FLEXIBLE (Probeta).
! *
MPTEMP, , , , , , , ,
MPTEMP, 1, 0

```

```
MPDATA, EX, 1, , 2e5
MPDATA, PRXY, 1, , 0.27
TB, BISO, 1, 1, 2,
TBTEMP, 0
TBDDATA, , 390, 1.45e5, , , ,
!*
! CREACIÓN DEL ÁREA DE LA HERRAMIENTA.
!*
FLST, 2, 44, 4
FI TEM, 2, 38
FI TEM, 2, 1
FI TEM, 2, 2
FI TEM, 2, 43
FI TEM, 2, 35
FI TEM, 2, 27
FI TEM, 2, 28
FI TEM, 2, 29
FI TEM, 2, 30
FI TEM, 2, 31
FI TEM, 2, 32
FI TEM, 2, 33
FI TEM, 2, 34
FI TEM, 2, 44
FI TEM, 2, 26
FI TEM, 2, 25
FI TEM, 2, 24
FI TEM, 2, 23
FI TEM, 2, 22
FI TEM, 2, 21
FI TEM, 2, 20
FI TEM, 2, 19
FI TEM, 2, 41
FI TEM, 2, 36
FI TEM, 2, 40
FI TEM, 2, 11
FI TEM, 2, 12
FI TEM, 2, 13
FI TEM, 2, 14
FI TEM, 2, 17
FI TEM, 2, 18
FI TEM, 2, 15
FI TEM, 2, 16
FI TEM, 2, 42
FI TEM, 2, 10
FI TEM, 2, 9
FI TEM, 2, 8
FI TEM, 2, 7
FI TEM, 2, 6
FI TEM, 2, 5
FI TEM, 2, 4
FI TEM, 2, 3
FI TEM, 2, 39
FI TEM, 2, 37
AL, P51X
!*

```

! CREACION DEL AREA Y EL MALLADO DE LA PROBETA.

! \*

FLST, 3, 4, 8

FI TEM, 3, 36. 9, -1. 85, 0

FI TEM, 3, 37. 4, -1. 75, 0

FI TEM, 3, 36. 4, -2. 05, 0

FI TEM, 3, 35. 45, -2. 45, 0

K, , P51X

L, 64, 105

L, 105, 104

L, 104, 65

L, 104, 102

L, 102, 66

L, 102, 103

L, 103, 67

FLST, 2, 4, 4

FI TEM, 2, 75

FI TEM, 2, 92

FI TEM, 2, 93

FI TEM, 2, 94

AL, P51X

FLST, 2, 1, 5, ORDE, 1

FI TEM, 2, 2

AESI ZE, P51X, 0. 1,

CM, \_Y, AREA

ASEL, , , , 2

CM, \_Y1, AREA

CHKMSH, ' AREA'

CMSEL, S, \_Y

! \*

MSHKEY, 1

AMESH, \_Y1

MSHKEY, 0

! \*

CMDELE, \_Y

CMDELE, \_Y1

CMDELE, \_Y2

! \*

FLST, 2, 4, 4

FI TEM, 2, 76

FI TEM, 2, 96

FI TEM, 2, 94

FI TEM, 2, 95

AL, P51X

FLST, 2, 1, 5, ORDE, 1

FI TEM, 2, 3

AESI ZE, P51X, 0. 1,

CM, \_Y, AREA

ASEL, , , , 3

CM, \_Y1, AREA

CHKMSH, ' AREA'

CMSEL, S, \_Y

! \*

MSHKEY, 1

AMESH, \_Y1

```

MSHKEY, 0
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
LPLOT
FLST, 2, 4, 4
FI TEM, 2, 77
FI TEM, 2, 98
FI TEM, 2, 96
FI TEM, 2, 97
AL, P51X
FLST, 2, 1, 5, ORDE, 1
FI TEM, 2, 4
AESIZE, P51X, 0. 1,
CM, _Y, AREA
ASEL, , , , 4
CM, _Y1, AREA
CHKMSH, ' AREA'
CMSEL, S, _Y
! *
MSHKEY, 1
AMESH, _Y1
MSHKEY, 0
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
FLST, 2, 49, 4
FI TEM, 2, 92
FI TEM, 2, 93
FI TEM, 2, 95
FI TEM, 2, 97
FI TEM, 2, 98
FI TEM, 2, 78
FI TEM, 2, 79
FI TEM, 2, 80
FI TEM, 2, 81
FI TEM, 2, 74
FI TEM, 2, 73
FI TEM, 2, 86
FI TEM, 2, 72
FI TEM, 2, 71
FI TEM, 2, 70
FI TEM, 2, 69
FI TEM, 2, 68
FI TEM, 2, 66
FI TEM, 2, 67
FI TEM, 2, 65
FI TEM, 2, 82
FI TEM, 2, 64
FI TEM, 2, 83
FI TEM, 2, 63

```

```

FI TEM, 2, 62
FI TEM, 2, 61
FI TEM, 2, 45
FI TEM, 2, 60
FI TEM, 2, 59
FI TEM, 2, 58
FI TEM, 2, 57
FI TEM, 2, 85
FI TEM, 2, 56
FI TEM, 2, 55
FI TEM, 2, 54
FI TEM, 2, 53
FI TEM, 2, 51
FI TEM, 2, 52
FI TEM, 2, 50
FI TEM, 2, 84
FI TEM, 2, 49
FI TEM, 2, 48
FI TEM, 2, 91
FI TEM, 2, 90
FI TEM, 2, 88
FI TEM, 2, 89
FI TEM, 2, 87
FI TEM, 2, 46
FI TEM, 2, 47
AL, P51X
MSHKEY, 0
CM, _Y, AREA
ASEL, , , , 5
CM, _Y1, AREA
CHKMSH, ' AREA'
CMSEL, S, _Y
! *
AMESH, _Y1
! *
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CMDELE, _Y2
! *
! *
/COM, CONTACT PAIR CREATION - START
CM, _NODECM, NODE
CM, _ELEMCM, ELEM
CM, _KPCM, KP
CM, _LINECM, LINE
CM, _AREACM, AREA
CM, _VOLUCM, VOLU
/GSAV, cwz, gsav, , temp
MP, MU, 1, 0.3
MAT, 1
MP, EMIS, 1, 7.88860905221e-031
R, 3
REAL, 3
ET, 2, 169
ET, 3, 172

```

```

KEYOPT, 3, 9, 0
KEYOPT, 3, 10, 2
R, 3,
RMORE,
RMORE, , 0
RMORE, 0
! Generate the target surface
LSEL, S, , , 11
LSEL, A, , , 12
LSEL, A, , , 13
LSEL, A, , , 14
LSEL, A, , , 15
LSEL, A, , , 16
LSEL, A, , , 17
LSEL, A, , , 18
CM, _TARGET, LI NE
TYPE, 2
LATT, -1, 3, 2, -1
TYPE, 2
LMESH, ALL
! Generate the contact surface
LSEL, S, , , 73
LSEL, A, , , 74
LSEL, A, , , 75
LSEL, A, , , 76
LSEL, A, , , 77
LSEL, A, , , 78
LSEL, A, , , 79
LSEL, A, , , 80
CM, _CONTACT, LI NE
TYPE, 3
NSLL, S, 1
ESLN, S, 0
ESURF
*SET, _REALI D, 3
ALLSEL
ESEL, ALL
ESEL, S, TYPE, , 2
ESEL, A, TYPE, , 3
ESEL, R, REAL, , 3
LSEL, S, REAL, , 3
/PSYMB, ESYS, 1
/PNUM, TYPE, 1
/NUM, 1
EPLLOT
ESEL, ALL
ESEL, S, TYPE, , 2
ESEL, A, TYPE, , 3
ESEL, R, REAL, , 3
LSEL, S, REAL, , 3
CMSEL, A, _NODECM
CMDEL, _NODECM
CMSEL, A, _ELEMCM
CMDEL, _ELEMCM
CMSEL, S, _KPCM

```

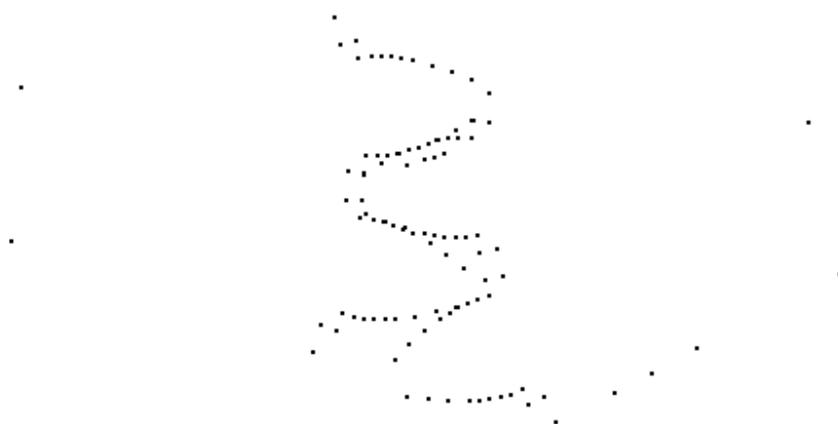
```

CMDEL, _KPCM
CMSEL, S, _LI NECM
CMDEL, _LI NECM
CMSEL, S, _AREACM
CMDEL, _AREACM
CMSEL, S, _VOLUCM
CMDEL, _VOLUCM
/GRES, cwz, gsav
CMDEL, _TARGET
CMDEL, _CONTACT
/COM, CONTACT PAIR CREATION - END
!*
! DESPLAZAMIENTOS Y FUERZAS
!*
FLST, 2, 1, 4, ORDE, 1
FI TEM, 2, 44
!*
/GO
DL, P51X, , ALL, 0
FLST, 2, 1, 4, ORDE, 1
FI TEM, 2, 87
!*
/GO
DL, P51X, , ALL, 0
/REPLOT, RESIZE
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 74
!*
/GO
DK, P51X, , 0, , 0, UX, UY, , , , ,
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 75
!*
/GO
DK, P51X, , 0, , 0, UX, UY, , , , ,
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 99
!*
/GO
FK, P51X, FX, -6300
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 99
!*
/GO
FK, P51X, FY, 10911.852
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 100
!*
/GO
FK, P51X, FX, -5250
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 100
!*
/GO
FK, P51X, FY, 9093.21

```

```
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 101
! *
/GO
FK, P51X, FX, -3975
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FI TEM, 2, 101
! *
/GO
FK, P51X, FY, 6884. 859
! *
! *
! CONTROL DE LA SOLUCI ÓN
! *
NSUBST, 100, 1000, 10
OUTRES, ERASE
OUTRES, ALL, 1
AUTOTS, 1
LNSRCH, 1
NEQI T, 100
TI ME, 1
/SOLU
! *
! SOLUCI ÓN
! *
SOLVE
FI NI SH
! *
```

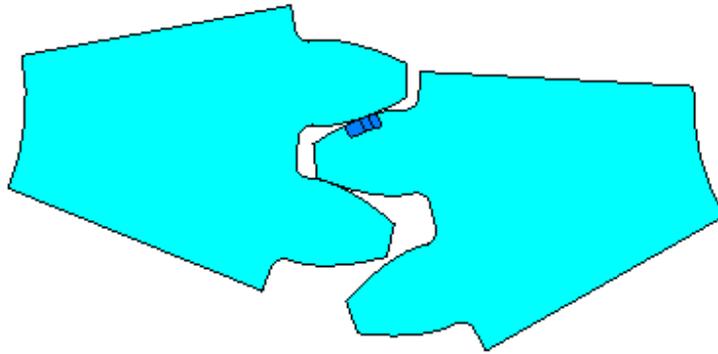
**Anexo # 11. Key points utilizados para la creación de las líneas.**



**Anexo # 12. Líneas que conforman la geometría del modelo.**



**Anexo # 13. Áreas del modelo.**



**Anexo # 14. Condiciones de frontera del modelo.**



**Anexo # 15. Valores de los parámetros del contacto en las tres posiciones.**

*Tabla A. 15. 1. Valores de los parámetros del contacto en la posición - 9,25 °.*

NOD #	STAT	PENE (mm)	PRES (MPa)	SFRI (MPa)	STOT (MPa)	SLID (mm)	GAP (mm)
1	1	0	0	0	0	0	-0,20969E-01
2	2	0,88275E-03	265,35	-32,454	267,33	0,97810E-03	-0,97799E-03
4	1	0	0	0	0	0	-0,12786E-01
6	1	0	0	0	0	0	-0,80539E-02
8	1	0	0	0	0	0	-0,34247E-02
10	3	0,86592E-03	260,29	-5,3200	260,35	-0,12280E-03	0
12	3	0,32163E-02	966,80	-27,366	967,20	-0,24568E-02	0
14	3	0,28101E-02	844,72	-43,655	845,85	-0,22092E-02	0
16	3	0,26459E-02	795,34	-57,430	797,42	-0,19940E-02	0
18	3	0,26088E-02	784,18	-72,157	787,50	-0,17820E-02	0
20	3	0,26953E-02	810,19	-91,072	815,31	-0,15531E-02	0
22	3	0,29914E-02	899,19	-121,36	907,36	0,10732E-02	0
304	1	0	0	0	0	0	-0,76916E-01
306	1	0	0	0	0	0	-0,11797E-01
308	1	0	0	0	0	0	-0,24508E-01
310	1	0	0	0	0	0	-0,37322E-01
312	1	0	0	0	0	0	-0,50201E-01
314	1	0	0	0	0	0	-0,63123E-01
462	1	0	0	0	0	0	-0,94552E-01
616	0	0	0	0	0	0	-0,25853
624	1	0	0	0	0	0	-0,68580E-01
<b>VALORES MÍNIMOS</b>							
NODO	616	1	1	22	1	12	616
VALOR	0	0	0	-121,36	0	-0,24568E-02	-0,25853
<b>VALORES MAXIMOS</b>							
NODO	10	12	12	1	12	22	10
VALOR	3	0,32163E-02	966,80	0	967,20	0,10732E-02	0

Tabla A. 15. 2. Valores de los parámetros del contacto en la posición -11,25 °.

NOD #	STAT	PENE (mm)	PRES (MPa)	SFRI (MPa)	STOT (MPa)	SLID (mm)	GAP (mm)
1	1	0	0	0		0	-0,99178E-01
2	3	0,34781E-02	4297,0	-226,82	4304,4	-0,11617E-02	0
4	1	0	0	0		0	-0,77191E-01
6	1	0	0	0		0	-0,65358E-01
8	1	0	0	0		0	-0,53550E-01
10	1	0	0	0		0	-0,41774E-01
12	1	0	0	0		0	-0,30200E-01
14	1	0	0	0		0	-0,22752E-01
16	1	0	0	0		0	-0,16326E-01
18	1	0	0	0		0	-0,10066E-01
20	1	0	0	0		0	-0,40910E-02
22	2	0,66258E-03	818,58	18,981	818,80	-0,10647E-03	-0,81704E-05
304	1	0	0	0		0	-0,26920E-01
333	3	0,80167E-03	990,42	-101,97	996,03	0,10568E-02	0
335	1	0	0	0		0	-0,33690E-02
337	1	0	0	0		0	-0,87614E-02
339	1	0	0	0		0	-0,14475E-01
341	1	0	0	0		0	-0,20359E-01
489	1	0	0	0		0	-0,37369E-01
491	1	0	0	0		0	-0,48311E-01
493	1	0	0	0		0	-0,59287E-01
495	1	0	0	0		0	-0,70289E-01
497	1	0	0	0		0	-0,81314E-01
616	0	0	0	0		0	-0,26400
<b>VALORES MÍNIMOS</b>							
NODO	616	1	1	2	1	2	616
VALOR	0	0	0	-226,82	0	-0,11617E-02	-0,26400
<b>VALORES MAXIMOS</b>							
NODO	2	2	2	22	2	333	2
VALOR	3	0,34781E-02	4297,0	18,981	4304,4	0,10568E-02	0

Tabla A. 15. 3. Valores de los parámetros del contacto en la posición -13,25 °.

NOD #	STAT	PENE (mm)	PRES (MPa)	SFRI (MPa)	STOT (MPa)	SLID (mm)	GAP (mm)
1	0	0	0	0	0		-0.18068
2	3	0,16693E-02	687,29	-34,686	688,17	-0,89959E-03	0
10	1	0	0	0	0	0	-0,91392E-01
12	1	0	0	0	0	0	-0,74018E-01
14	1	0	0	0	0	0	-0,60508E-01
16	1	0	0	0	0	0	-0,47032E-01
18	1	0	0	0	0	0	-0,33607E-01
20	1	0	0	0	0	0	-0,20260E-01
22	1	0	0	0	0	0	-0,70769E-02
339	3	0,25340E-02	1043,3	-179,65	1058,7	0,70663E-03	0
341	3	0,19510E-02	803,28	-57,340	805,33	-0,16446E-02	0
343	3	0,18824E-02	775,02	-68,495	778,05	-0,14577E-02	0
345	3	0,19245E-02	792,34	-83,230	796,71	-0,12625E-02	0
347	3	0,20722E-02	853,15	-104,58	859,54	-0,10431E-02	0
349	3	0,23525E-02	968,56	-138,80	978,47	-0,77190E-03	0
513	1	0	0	0	0	0	-0,33886E-01
515	2	0,14451E-03	59,497	-4,1360	59,641	0,38504E-03	-0,61754E-03
517	1	0	0	0	0	0	-0,44092E-02
519	1	0	0	0	0	0	-0,86225E-02
521	1	0	0	0	0	0	-0,12933E-01
523	1	0	0	0	0	0	-0,18420E-01
689	1	0	0	0	0	0	-0,82338E-01
691	0	0	0	0	0	0	-0,23967
<b>VALORES MÍNIMOS</b>							
<b>NODO</b>	<b>691</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>339</b>	<b>1</b>	<b>341</b>	<b>691</b>
<b>VALOR</b>	0	0	0	-179,65	0	-0,16446E-02	-0,23967
<b>VALORES MAXIMOS</b>							
<b>NODO</b>	<b>2</b>	<b>339</b>	<b>339</b>	<b>1</b>	<b>339</b>	<b>339</b>	<b>2</b>
<b>VALOR</b>	3	0,25340E-02	1043,3	0	1058,7	0,70663E-03	0

**Anexo # 16. Coordenadas de los nodos seleccionados para la medición del valor de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ) ( $S_{xy}$ ).**

*Tabla A. 16. 1. Coordenadas de los nodos seleccionados para la medición de las Tensiones Tangenciales Alternantes en la posición  $-9,25^\circ$ .*

NODO	X	Y	Z
2	36.022	1.2564	0.0000
24	36.250	0.55000	0.0000
26	36.050	1.1681	0.0000
28	36.079	1.0798	0.0000
30	36.107	0.99150	0.0000
32	36.136	0.90320	0.0000
34	36.164	0.81490	0.0000
36	36.193	0.72660	0.0000
38	36.221	0.63830	0.0000
2749	36.282	0.45860	0.0000

*Tabla A. 16. 2. Coordenadas de los nodos seleccionados para la medición de las Tensiones Tangenciales Alternantes en la posición  $-11,25^\circ$ .*

NODE	X	Y	Z
2	36.000	0.0000	0.0000
24	36.300	-0.70000	0.0000
26	36.038	-0.87500E-01	0.0000
28	36.075	-0.17500	0.0000
30	36.112	-0.26250	0.0000
32	36.150	-0.35000	0.0000
34	36.188	-0.43750	0.0000
36	36.225	-0.52500	0.0000
38	36.263	-0.61250	0.0000
2650	36.336	-0.78614	0.0000

*Tabla A. 16. 3. Coordenadas de los nodos seleccionados para la medición de las Tensiones Tangenciales Alternantes en la posición -13,25 °.*

<b>NODO</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>
2	36.022	-1.2564	0.0000
24	36.400	-2.0500	0.0000
26	36.358	-1.9618	0.0000
28	36.316	-1.8736	0.0000
30	36.274	-1.7855	0.0000
32	36.232	-1.6973	0.0000
34	36.190	-1.6091	0.0000
36	36.148	-1.5209	0.0000
38	36.106	-1.4328	0.0000
40	36.064	-1.3446	0.0000

**Anexo # 17. Valores de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ) ( $S_{xy}$ ).**

*Tabla A. 17. 1. Valores de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ) ( $S_{xy}$ ) en la posición  $-9,25^\circ$ .*

NODE	SX	SY	SXY
2	-484,06	-222,22	103,15
24	-98,778	-207,56	227,06
26	-504,86	-206,47	246,00
28	-408,81	-225,13	273,39
30	-331,18	-230,47	276,92
32	-265,47	-231,23	272,34
34	-210,50	-228,59	263,25
36	-165,18	-223,37	251,76
38	-128,35	-216,21	239,36
2749	-74,950	-197,42	215,18

*Tabla A. 17. 2. Valores de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ) ( $S_{xy}$ ) en la posición  $-11,25^\circ$ .*

NODO	SX	SY	SXY
2	-2741,3	-3698,1	630,67
24	-5,3433	-390,42	227,06
26	-725,35	-2440,2	840,44
28	-283,48	-1503,6	611,61
30	-145,96	-1057,3	467,58
32	-86,379	-801,67	375,88
34	-52,641	-641,10	317,01
36	-30,946	-530,96	276,86
38	-16,022	-450,96	248,25
2650	2,8232	-344,45	210,55

Tabla A. 17. 3. Valores de las Tensiones Tangenciales Alternantes ( $\tau_{xy}$ ) ( $S_{xy}$ ) en la posición  $-13,25^\circ$ .

NODO	SX	SY	SXY
2	-314,17	-657,17	65,525
24	30,074	-324,92	92,669
26	27,905	-357,74	83,271
28	24,550	-389,91	69,420
30	17,656	-427,59	53,549
32	6,2195	-466,51	34,438
34	-11,048	-505,17	13,375
36	-35,060	-542,91	-5,9295
38	-67,360	-582,32	-17,100
40	-114,29	-641,48	-4,3066