



Universidad de Matanzas «Camilo Cienfuegos»
Facultad de Ingenierías

**SIMULACIÓN DEL CONTACTO EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS
HELICOIDALES NORMALES UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS
FINITOS.**

*Tesis en Opción al Título de
Máster en Ingeniería Asistida por Computadora*

Autor: Ing. Irma González Arias

Tutor: Dr.C. Orestes González Quintero

Matanzas, 2013

❖ RESUMEN.

En el trabajo se aplica el método de elementos finitos a través de la herramienta ANSYS para realizar un análisis del estado de contacto, la penetración y el estado de las tensiones totales en la zona del polo de engrane de engranajes cilíndricos normales de dientes helicoidales, a partir del cálculo de los parámetros geométricos y mecánicos, la modelación geométrica tridimensional, utilizando un sistema de diseño y dibujo asistido por computadora, la definición del modelo de contacto, la selección de los elementos adecuados para el modelo, las características específicas del material y la definición de las condiciones de fronteras necesarias.

❖ ABSTRACT

At work apply the finite element methods through the ANSYS tool to make a statement analysis of contact, the penetration and the status of total tensions at the pole's zone are accomplished of engage of normal spur gears of helicoid teeth, as from the calculation of geometric parameters and mechanics, the geometric three-dimensional modelation, using a designing system and computer-aided drawing, the definition of the model of contact, the selection of the elements made suitable for the model, the specific characteristics of the material and the definition of the conditions of necessary frontiers.

❖ TABLA DE CONTENIDOS

RESUMEN.....	i
ABSTRACT.....	ii
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I: Estado del arte.....	3
1.1: Metodología para el cálculo geométrico de ruedas cilíndricas normales helicoidales y bihelicoidales.....	3
1.2: Fuerzas en los engranajes cilíndricos con dientes helicoidales y bihelicoidales.....	7
1.3: Línea de contacto.....	9
1.4: Posibles deterioros en las transmisiones por engranajes.....	11
1.5: Método de Elementos Finitos (FEM).....	12
1.6: Implementación del FEM.....	12
1.7: Problemas de contacto.....	14
1.8: Método aumentado de Lagrange.....	15
1.9: Tipos de contacto.....	16
1.10: Formulación matemática del método.....	17
1.11: Estados tensionales.....	18
1.12: Relación tensión-deformación-temperatura en elementos 3D (Ecuación constitutiva).....	18
1.13: Tipos de elementos usados para el modelado en 3D.....	20
1.14: Matriz de rigidez.....	24
1.15: Conclusiones parciales del Capítulo I.....	24
CAPÍTULO II: Materiales y métodos.....	25
2.1: Par dentado seleccionado.....	25
2.2: Identificación de la idoneidad del análisis por el	26

FEM.....	
2.3: Acerca de la obtención del modelo geométrico del par dentado...	26
2.4: Creación de un sólido 3D (diente helicoidal) por solevación en AutoCAD.....	27
2.5: Análisis de contacto en 3D.....	30
2.6: Idealización.....	31
2.7: Elementos ANSYS utilizados.....	31
2.8: Características del material.....	33
2.9: Discretización del modelo.....	33
2.10: Condiciones de frontera.....	36
2.11: Determinación de la fuerza aplicada.....	36
2.12: Conclusiones parciales del capítulo II.....	37
Capítulo III Análisis de los resultados.....	38
3.1: Cantidad de nodos en contacto.....	38
3.2: Presión de contacto.....	40
3.3: Penetración de contacto.....	41
3.4: Tensiones totales de contacto.....	41
3.5: Conclusiones parciales del capítulo III.....	42
CONCLUSIONES.....	43
RECOMENDACIONES.....	44
BIBLIOGRAFÍA.....	45
ANEXOS.....	47

❖ INTRODUCCIÓN.

Las transmisiones dentadas forman parte de las transmisiones mecánicas más difundidas en la práctica. Ellas pueden, transmitir potencias y velocidades en un rango amplio, con una elevada fiabilidad.

Los engranajes son la combinación de ruedas dentadas y se utilizan para transmitir el movimiento giratorio uniforme de un árbol a otro así como transformar el movimiento de rotación en movimiento de avance y viceversa.

El creciente desarrollo de la computación de los últimos años ha permitido el desarrollo de herramientas y métodos matemáticos para resolver diversos problemas ingenieriles. Ellos han revolucionado la visión de los diseñadores en diversos campos, como es el de los engranajes que en el siglo pasado su diseño estaba basado fundamentalmente en la combinación del número de dientes y el módulo, de manera que proporcionara la relación de transmisión deseada y sus dientes soportaran los esfuerzos a los que iban a estar sometido.

En la actualidad existen métodos numéricos como el método de elementos finitos que son aplicados para obtener un diseño adecuado, enfocando la solución desde varias ópticas, funcionalidad, eficiencia, eficacia, mínimo de costos de explotación de los elementos y la menor afectación al medio. Este método según Wei (2004) es el favorito para solucionar problemas de contacto que son los más retadores de resolver debido a que generalmente las regiones donde ocurre este proceso no se conocen completamente.

Se puede identificar como problema la insuficiencia de los modelos existentes para simular el fenómeno de contacto en engranajes cilíndricos normales de dientes helicoidales.

La solución a este problema se logrará empleando el método de elementos finitos, en tres dimensiones, será posible simular el fenómeno de contacto en engranajes cilíndricos normales de dientes helicoidales.

Por lo expresado anteriormente el objetivo de este trabajo es: simular el fenómeno de contacto en engranajes cilíndricos de dientes helicoidales normales, empleando el método de elementos finitos.

Objetivos específicos:

- Implementación del cálculo de los parámetros geométricos y mecánicos de los engranajes cilíndricos normales de dientes helicoidales.
- Modelación geométrica tridimensional, utilizando un sistema de diseño y dibujo asistido por computadora, del diente del engranaje cilíndrico helicoidal normal.
- Definir los parámetros del modelo del contacto de los engranajes cilíndricos de dientes helicoidales normales, utilizando el método de los elementos finitos.
- Implementar el modelo basado en elementos finitos del contacto entre los engranajes cilíndricos de dientes helicoidales normales.
- Ejecutar las simulaciones del proceso de contacto entre los engranajes cilíndricos de dientes helicoidales normales.
- Análisis de los resultados obtenidos con respecto al estado de contacto, la penetración y el estado tensional total.

CAPÍTULO I. ESTADO DEL ARTE

El objetivo de este capítulo es establecer los fundamentos teóricos en que se basa la investigación desarrollada, realizando un análisis de las fuentes bibliográficas consultadas al respecto.

1.1: Metodología para el cálculo geométrico de ruedas cilíndricas normales helicoidales y bihelicoidales.

La geometría de los dientes de los engranajes helicoidales es en forma de una hélice envolvente alrededor de su eje de giro, en este tipo de engranaje cualquier sección plana perpendicular al eje es idéntica al plano frontal, pero desfasándose de un modo progresivo respecto a él.

El cálculo geométrico brinda las dimensiones mínimas del par dentado y ellas garantizan la capacidad de trabajo durante un tiempo de funcionamiento. En la literatura clásica relacionada con este contenido Dobrovolski (1980), Golubev (1978), se encuentran descritos y explicados los parámetros geométricos de las ruedas de dientes oblicuos y bihelicoidales (engranaje de Chevron o en espina de pescado).

El cálculo de las transmisiones por engranajes determina las dimensiones mínimas de un par dentado para garantizar la capacidad de trabajo durante un tiempo de funcionamiento. Los mismos influyen en el cálculo de resistencia, además del tratamiento térmico y térmico-químico de los dientes bajo la influencia de la carga exterior pero la influencia decisiva en su capacidad de trabajo la ejercen las tensiones de contacto (σ_H) y las tensiones de flexión (σ_F). (Rodríguez, 2011)

El esfuerzo de un diente hacia el otro del par dentado se transmite mediante el engrane consecutivo de los dientes. La rueda menor del par que engrana lleva el nombre de piñón y se designa con el subíndice 1, la mayor es la rueda y se designa con el subíndice 2.

Dobrovolski (1980), plantea que los parámetros geométricos de las ruedas de dientes helicoidales y bihelicoidales (engranaje de Chevron) se determinan por las fórmulas para las ruedas de dientes rectos si se acepta que las magnitudes módulo (m), desplazamiento (ξ) están referidas a la sección frontal f , entonces es necesario tener en cuenta la relación con la sección normal n .

Para transmitir el movimiento entre árboles paralelos ambas ruedas dentadas deben de tener el mismo ángulo β de inclinación de los dientes en el cilindro primitivo, pero en direcciones de inclinación distintas a la derecha y a la izquierda (Baranov, 1979), el ángulo β se puede obtener desajando de la ecuación 1.1 relacionada con el módulo normal y debe de encontrarse entre los límites de 25° y 40° (Alfonso, 2004).

$$m_n = m_f \cos \beta \quad (1.1)$$

$$m_f = \frac{2a_w}{Z_1 + Z_2} \quad (1.2)$$

Donde Z es el número de dientes en el par engranado y a_w la distancia interaxial.

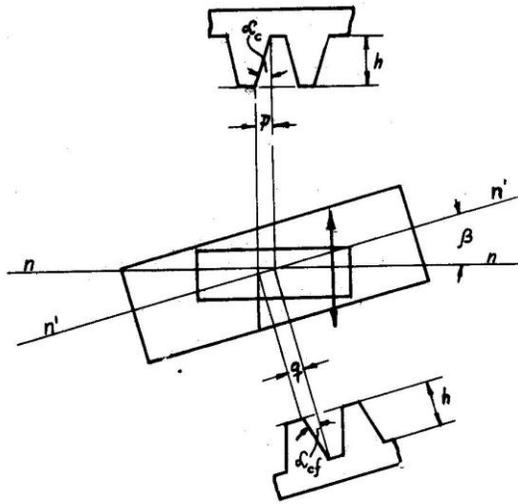
El paso normal (t_n) se produce en los dientes debido al desplazamiento de la cremallera con el ángulo (β) respecto al eje de la pieza y es igual al paso de la cremallera como se representa en la ecuación 1.3. El paso frontal (t_f) se forma por el borde de la rueda teniendo en cuenta dicho ángulo de inclinación de los dientes (β), ecuación 1.4.

$$t_n = t_c = m_n \pi \quad (1.3)$$

$$t_f = \frac{t_n}{\cos \beta} \quad (1.4)$$

Esta posición de los dientes, en cada plano en el principio y final provoca que el contacto de cada pareja de dientes, se produzca de forma desfasada. Esta forma gradual de producirse el engrane entre los dientes es la causa que origina que estas transmisiones sean más silenciosas que las de dientes rectos. (Mirabet y Martínez, 2008).

El ángulo α_o es el llamado ángulo de perfil que se recomienda sea 20° (Dobrovolski, 1980; Golubev, 1978), para el caso de los engranajes de Chevron el ángulo α_{cf} se obtiene de las proyecciones perpendiculares de las sección de la cremallera en el eje de la pieza y la dirección de su movimiento, como se observa en la figura 1.1 y se expresa matemáticamente en la ecuación 1.5. Específicamente cuando estos engranajes son normales el ángulo de montaje α_{mo} es igual al ángulo de la cremallera (Golubev, 1978).



$$\operatorname{tg} \alpha_{cf} = \operatorname{tg} \alpha_{mo} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_o}{\cos \beta} \quad (1.5)$$

Figura 1.1: (Golubev, 1978)

En muchas ramas de la construcción de maquinaria especial, dígame construcción de automóviles, tractores, aviones y barcos se utilizan otros valores de ángulo de perfil (α_o) como 22.5° , 25° y 28° , esto aumenta la resistencia mecánica de la transmisión pero se debe disminuir la altura de la cabeza del diente $h' = (0.9 \div 0.8)$ (Dobrovolski, 1980).

Las dimensiones geométricas principales del par engranado dependen del número de dientes (Z) y del módulo (m), En el cálculo geométrico se determinan los radios de las ruedas, las dimensiones de cada uno de los elementos y se determinan por las fórmulas que se representan a continuación (ecuaciones 1.6 – 1.16). Es importante especificar que estos parámetros están descritos para la sección normal de la rueda.

$$r_p = \frac{m_f Z}{2} \quad (1.6)$$

$$r_o = r_p \cos \alpha_{cf} \quad (1.7)$$

$$h = h' + h'' = m_n + 1.25 m_n \quad (1.8)$$

$$r_i = r_p - h'' \quad (1.9)$$

$$r_e = r_p + h' \quad (1.10)$$

$$A_w = m_f \frac{Z_1 + Z_2}{2} \quad (1.11)$$

$$S_p = \frac{t_f}{2} = \frac{\pi m_f}{2} \quad (1.12)$$

$$S_e = 2r_e \left[\frac{S_p}{2r_p} + \text{inv } \alpha_{cf} - \text{inv} \left(\cos^{-1} \frac{r_o}{r_e} \right) \right] \geq 0.3m_f \quad (1.13)$$

$$Z_{\min} = \frac{2f \cos \beta}{\text{sen}^2 \alpha_{cf}} \quad (1.14)$$

$$Z_{\text{red}} = \frac{Z}{\cos^3 \beta} \quad (1.15)$$

$$\xi_{\text{obl}} = \frac{\sqrt{r_{e2}^2 - r_{o2}^2} + \sqrt{r_{e1}^2 - r_{o1}^2} - a_w \text{sen} \alpha_o}{\pi m_f \cos \alpha_{cf}} + \frac{b}{\pi m_f} \text{tg} \beta \quad (1.16)$$

El esfuerzo de un diente hacia el otro del par dentado se transmite mediante el engrane consecutivo de los dientes. La rueda menor del par que engrana lleva el nombre de piñón y se designa con el subíndice 1, la mayor es la rueda o también se le puede llamar corona y se designa con el subíndice 2.

La posición inclinada de los dientes provoca que el contacto de cada pareja de dientes se produzca de forma desfasada. Esta forma gradual de producirse el engrane es la causa que origina que estas transmisiones sean más silenciosas que las de dientes rectos. (Mirabet y Martínez, 2008; Dobrovolski, 1980).

Para transmitir el movimiento entre árboles paralelos ambas ruedas dentadas deben de tener el mismo ángulo β de inclinación de los dientes en el cilindro primitivo, pero en direcciones de inclinación distintas a la derecha y a la izquierda (Baranov, 1979). Este ángulo debe encontrarse entre los límites de 25° y 40° (Golubev, 1978; Alfonso, 2004) en el caso de los engranajes

bihelicoidales, para los engranajes helicoidales el mismo se encuentra entre 8° y 20° (Alfonso, 2004).

Si se hace una comparación de los rangos en los que se encuentra el ángulo de inclinación de los dientes, para los engranajes bihelicoidales es generalmente mayor porque no hay empuje axial. Los rangos de valores de este ángulo no se encuentran normalizados y para el caso de los engranajes helicoidales de gran anchura el mismo debe ser menor a 15° .

En otros estudios¹ se plantea que el ángulo de inclinación de los dientes está relacionado con el tipo de marcha al que esté sometido el par engranado y se encuentra dividido en tres grupos:

Velocidad lenta: $\beta = (5^\circ - 10^\circ)$

Velocidad normal: $\beta = (15^\circ - 25^\circ)$

Velocidad elevada: $\beta = 30^\circ$

En muchas ramas de la construcción de maquinaria especial, dígame construcción de automóviles, tractores, aviones y barcos se utilizan otros valores de ángulo de perfil (α_o) como 22.5° , 25° y 28° , esto aumenta la resistencia mecánica de la transmisión pero se debe disminuir la altura de la cabeza del diente $h' = (0.9 \div 0.8)$ (Dobrovolski, 1980).

Otra dimensión fundamental es el módulo de los dientes, cada par de ruedas engranadas debe tener el mismo módulo. Esta dimensión se encuentra normalizada en el sistema métrico por ISO 54-77 y por normas editadas en países cuyos Comités Técnicos de Normalización han optado por el sistema "módulo", pero que tiene su similar en el sistema "diametral pitch" normado por AGMA 120.01 acorde a estándares internacionales (González y García, 2000; Alfonso, 2004), garantizándose así la intercambiabilidad de las ruedas dentadas y la unificación de las herramientas talladoras.

1.2: Fuerzas en los engranajes cilíndricos normales de dientes helicoidales.

Los parámetros geométricos influyen en el cálculo de resistencia y en el tratamiento térmico de los dientes pero la influencia decisiva en su capacidad de trabajo la ejercen las tensiones de contacto (σ_H) y las tensiones de flexión (σ_F). (Rodríguez, 2011)

¹Intercambiabilidad y mediciones técnicas, disciplina Procesos tecnológicos, Universidad de Holguín, 2007

Según lo conocido, el engranaje cilíndrico con dientes helicoidales aventaja al engranaje con dientes rectos en varios aspectos: su rotación es más continua, trabaja con menos ruido y tiene mayor grado de recubrimiento, sin embargo la fuerza de presión normal (F_n) entre los dientes helicoidales se descompone en tres componentes como se ilustra en la figura 1.2, mientras que en los engranajes de dientes rectos solamente hay dos.

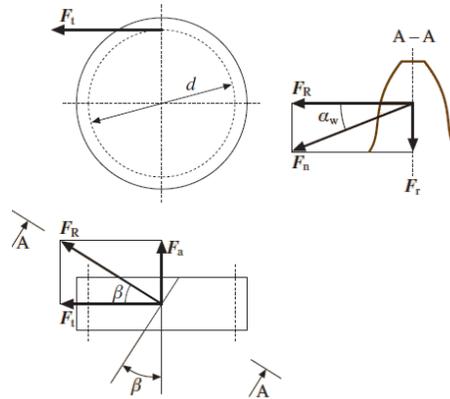


Figura1.2: Fuerzas de engranaje. (Lelikov, 2009)

La descomposición de F_n en sus componentes F_r , F_t y F_a es conveniente para el cálculo de los árboles y rodamientos.

$$F_n = \frac{2M_t}{d_{rueda} \cos \alpha \cos \beta} \quad (1.17)$$

La fuerza circunferencial ó tangencial es:

$$F_T = \frac{2Mt}{d_{oruada}} \quad (1.18)$$

En la rueda conducida la dirección de la fuerza tangencial (F_T) coincide con la dirección de rotación mientras que en la conductora es lo contrario. La fuerza axial (F_a) es paralela al eje de la rueda y su dirección depende de la dirección de la rotación y de la línea de contacto.

La fuerza axial, como se expresa en la ecuación 1.19, tiende a desplazar la rueda a lo largo del eje, por eso es necesario el empleo de cojinetes de apoyo axial, inconveniente que es eliminado con la utilización de engranajes bihelicoidales. Además es sabido que estas cargas axiales que

aparecen en estos engranajes (bihelicoidales) son opuestas, se equilibran, no se transmiten al árbol y se anulan. (Dobrovolski, 1980; Coy et. al., 1985)

$$F_a = F_T \tan \beta \quad (1.19)$$

Según la figura 1.2, la fuerza radial (F_r) es

$$F_r = F_R \tan \alpha_c \quad (1.20)$$

siendo F_R :

$$F_R = \frac{F_t}{\cos \beta} \quad (1.21)$$

de donde:

$$F_r = \frac{F_t \tan \alpha_c}{\cos \beta} \quad (1.22)$$

La fuerza radial está dirigida hacia el centro de rotación en las ruedas con dientes exteriores.

1.3: Línea de contacto.

En bibliografías consultadas se plantea que el contacto entre los dientes helicoidales y bihelicoidales tiene lugar solamente en el punto del diente que más avanzado se encuentra, siguiendo la hélice y extendiéndose gradualmente sobre una línea diagonal (no paralela al eje) que sigue el diente al girar el engranaje. Dicha línea se extiende a lo largo de toda la cara del diente pero en este caso no va de la base al extremo de los dientes, teniendo como consecuencia que el momento flector en la base del diente es aproximadamente la mitad del que corresponde a la punta de los dientes.

En las transmisiones helicoidales la línea de contacto aumenta alcanzando cierta longitud limitada, la cual se desplaza por la superficie lateral de los dientes y su longitud no cambia, posteriormente se reduce hasta el punto que se encuentra en el borde del diente impulsor y en la base del diente impulsado. La carga se transmite por más de una línea de contacto, si el ángulo de inclinación de los dientes (β) y el ancho de las ruedas (bw) es grande el contacto de

los dientes ocurrirá con un considerable ángulo de giro, esto justifica el contacto entre varios pares de dientes al mismo tiempo y la carga será transmitida por varias líneas de contacto. (Lelikov, 2009)

El proceso de casamiento de las parejas de dientes varía en función de la posición de contacto de cada pareja de diente. La carga por las líneas de contacto se distribuye irregularmente, las mismas están ubicadas en los dientes en una posición inclinada y matemáticamente se expresa según la ecuación 1.23.

$$q = \frac{F_n}{L_{min}} \quad (1.23)$$

La longitud de la línea sumaria de contacto (L) según Dobrovolski (1980) depende de la proporción entre el ancho de la rueda (bw), del ángulo β , del coeficiente de oscilación de la línea (λ) y del coeficiente de recubrimiento (ξ) como se observa en la ecuación 1.24. Mirabet y Martínez, (2008) plantean que dicha longitud oscila entre valores máximos y mínimos y su valor promedio se expresa según ecuación 1.25.

$$L = \frac{b\xi\lambda}{\cos \beta} \quad (1.24)$$

$$L = \frac{\varepsilon_\alpha b}{\cos \beta_b} \quad (1.25)$$

Autores como Estrems et al, (2001) plantean que en los engranajes la carga se reparte sobre una línea. En estos casos existen y predominan las deformaciones estructurales frente a las deformaciones superficiales en los puntos en contacto, por lo que a la hora de estimar la energía del sistema se pueden despreciar las deformaciones locales frente a las estructurales.

La línea de contacto se puede discretizar a su vez en cargas puntuales equidistantes, quedando el problema reducido a calcular la distribución de fuerzas entre los distintos puntos de contacto entre dos cuerpos. Habitualmente se conoce la fuerza total que dos cuerpos están ejerciendo entre sí. Esta fuerza se distribuirá entre los distintos puntos de la línea de contacto de forma que la energía total de deformación elástica sea mínima.

En otra bibliografía referida a la huella de contacto Rivero, (2002) plantea que en los engranajes de tornillo sinfín el contacto físico entre las superficies ocurre a lo largo de la línea formada por puntos de contacto teóricos, estos puntos localizados en una zona de la superficie del diente son originados por la traslación y rotación de los filetes del tornillo además de la rotación de la rueda, aquí se presentan las mayores presiones superficiales en presencia del deslizamiento lo que da lugar a un área de contacto teórica.

En la actualidad son innumerables los estudios que se realizan para perfeccionar las transmisiones por engranajes, con el fin de mejorar su funcionamiento y prolongar su vida útil. Dichos estudios están orientados a la influencia de algunos parámetros geométricos en el comportamiento de los mismos con el objetivo de reducir las posibles fallas y mejorar su costo.

1.4: Posibles deterioros en las transmisiones por engranajes.

Desgaste: esta falla es frecuente en transmisiones no lubricadas (Laureano y Goytosolo, 2000), se caracteriza por la disminución del espesor del diente en la zona de la cabeza y del pie, que es donde existe mayor velocidad de deslizamiento. Este desgaste es proporcional al deslizamiento específico entre los dientes y a la tensión de contacto entre las superficies. Induce desfiguración en el perfil del diente provocando un aumento de las cargas dinámicas y la zona del pie del diente se debilita. (González, 2001)

El desgaste puede reducirse disminuyendo la magnitud del deslizamiento específico y de las tensiones de contacto, aumentando la resistencia al desgaste de las superficies y eligiendo correctamente el lubricante (González, 2001).

Deformación plástica de la superficie de los dientes: este deterioro es común en ruedas sometidas a elevadas cargas y se caracteriza por el arrastre de las capas superficiales del metal. Sobre las superficies de los dientes impulsores se forman surcos a lo largo de la línea polar y en los impulsados se producen crestas.

Estas deformaciones son comunes en engranajes de acero con poca dureza en los dientes y muy cargados, en presencia de una lubricación deficiente y en transmisiones de baja velocidad. (González, 2001)

Picadura o careado: esta falla se forma el desprendimiento de partículas de la superficie del diente producto de la acción del lubricante. Estos desprendimientos aparecen en la zona anterior y posterior al polo de engrane. El desarrollo de estas grietas está condicionado por la

presencia de lubricante en la zona de contacto y este penetra en las grietas. En este proceso el número y tamaño de hoyuelos aumenta provocando una alteración en el perfil del diente todo esto contribuye a que el proceso de la picadura superficial se intensifique. (González, 2001)

Fractura del diente: esta falla se forma en el pie del diente, tanto en transmisiones lubricadas como no lubricadas (Laureano y Goytosolo 2000). Generalmente tiene un carácter de fatiga, como consecuencia de la acción periódica de la carga variable. A cada entrada sucesiva del diente en el engrane, surgen en su base (pie) tensiones variables de flexión. Debido al cambio brusco en la forma del diente, en la zona de transición tienen lugar una gran concentración de tensiones, donde a un determinado número de ciclos de carga, es posible el surgimiento de una grieta, que al propagarse provoca la fractura del diente. (González, 2001)

1.5: Método de Elementos Finitos (FEM).

El Método de Elementos Finitos (Finite Element Method, FEM) es un método numérico que se utiliza para dar solución a diferentes problemas de ingeniería. Primeramente el método fue desarrollado para el análisis de problemas estructurales en la industria aeronáutica, quedando demostrada las potencialidades del método, por lo que su campo de aplicación se extendió a otras ramas de la ingeniería.

El concepto básico del FEM es encontrar una solución a un problema complicado reemplazándola por una más simple (Singiresu, 2005). El método de elementos finitos consiste en dividir un objeto real en un número finito de elementos, a través de elementos de figura regular y geometría conocida. El comportamiento de cada elemento es pronosticado por medio de un conjunto de ecuaciones matemáticas y teniendo en cuenta esto la computadora suma todos los comportamientos individuales para poder predecir el comportamiento del objeto real.

El desarrollo de este método lo ha convertido en una tecnología de uso indispensable dentro de la simulación, análisis, diseño y finalmente fabricación en las diferentes áreas ingenieriles. (Liu, 2003)

1.6: Implementación del FEM.

El Método de Elementos Finitos, es una técnica numérica en la cual las ecuaciones rectoras son representadas de forma matricial y son adecuadas para una solución computarizada. En la búsqueda bibliográfica realizada se observa que La ingeniería de engranajes no está exenta a la actual difusión del Método (FEM).

La forma en que es aplicado el método en nuestros días fue divulgado por Turner et. al. (1956) introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y placas triangulares con cargas en su plano) para el análisis de estructuras aeronáuticas, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.

La aplicación del FEM es abordada de manera profunda por Rao (2005), en el libro aparece una descripción completa del método, se expone sus posibles aplicaciones en las diferentes áreas de la ingeniería; además realiza una comparación entre el método de elemento finito con otros métodos de análisis exponiendo las ventajas de su aplicación.

Por su parte Liu (2003) en sus notas de clase (en forma electrónica) aplica los conceptos básicos del método de elementos finitos para la solución de problemas mecánicos en 1D, 2D y 3D. Reddy (2005) publicó un manual de solución empleando el método de elementos finitos para problemas en 1D y 2D.

Millán et. al. (2007) publicaron una herramienta para reducir la necesidad de ensayos requeridos para la certificación de una Aeronave, y la estimación de los periodos de inspección, basada en el criterio de fractura, simulan utilizando el método de Elementos Finitos la propagación de grietas y se obtiene la curva de resistencia residual de estructuras metálicas de pequeño espesor y con efectos de plasticidad importantes

Cotaquispe (2006) expone un análisis utilizando la modelación por elementos finitos, utilizando el software COSMOS\M. v.2.7 para determinar el punto de mayor esfuerzo normal en el pie de diente, de un engranaje de dientes rectos exteriores.

El artículo publicado por Faydor et. al. (2001) muestra un análisis de contacto entre los dientes de engranajes cilíndricos helicoidales de ejes paralelos y engranajes helicoidales con ejes cruzados para determinar la influencia de errores de alineación en la transmisión. Otro artículo similar es el publicado por Litvin et. al. (2001) pero en este caso orientado a los engranajes asimétricos.

El auge de los modelos tridimensionales abrió el camino para usar el método en análisis térmicos y estructurales de contacto. Como se puede constatar en publicaciones realizadas por Handschuh y Kicher (1995) relacionadas con el análisis de los engranajes helicoidales cónicos usando dicho método, en el cual se realizó un estudio experimental y analítico sobre el comportamiento térmico de engranajes cónicos helicoidales.

Otro artículo relacionado con el tema es el correspondiente a Bibel (2002) en el se describe un proceso para hacer análisis de contacto tridimensional usando el método de elementos finitos para engranajes cilíndricos.

Machado et. al. (2001) dirige su artículo a la modificación del perfil del diente mediante el desplazamiento en el diseño de engranajes como una forma de atenuar la falla por rotura en la base del diente.

González et. al. (2002) explica el empleo de dos de los más potentes sistemas CAD dirigidos a la aplicación del método de los elementos finitos, como son el *Solid Edge* y el *Cosmo Edge*, con los procedimientos de cálculo derivados de las vigentes normas ISO para evaluar la capacidad de carga de los engranajes cilíndricos. En el trabajo se exponen las bases del método de generación del perfil de los dientes de un engranaje cilíndrico de dientes rectos, un algoritmo de cálculo de los esfuerzos en la base del diente y la comparación de los resultados obtenidos por uno y otro método.

En publicación realizada por González et al, (2006) brinda un modelo matemático que permite el perfeccionamiento del cálculo de la capacidad de carga de los engranajes cilíndricos con empleo del método de los elementos finitos. Dirigido a perfeccionar el modelo de los engranajes cilíndricos con empleo del método de los elementos finitos y el desarrollo matemático de una geometría precisa de los flancos de los dientes, asociadas con el perfeccionamiento de la evaluación de los esfuerzos en los dientes de los engranajes cilíndricos.

En estudio realizado por González y Alfonso, (2008) expone la utilización del método de los Elementos Finitos para modelar los desplazamientos normales y tangenciales al perfil del diente como funciones de la carga aplicada y luego removida y la localización con respecto al punto de contacto inicial, mostrando cómo la deformación cambia de elástica a elastoplástica en la medida que el material empieza a sobresalir hacia afuera en lugar de comprimirse.

1.7: Problemas de contacto.

El problema de contacto es altamente no lineal y usualmente necesita de computadoras de mucha potencia para obtener la solución. Las no linealidades del contacto ocurren cuando dos componentes entran o salen del contacto uno con otro o cuando dos componentes tienen un deslizamiento relativo entre ellos. El contacto no lineal puede ser simulado mediante el método

de Análisis por Elementos Finitos, usando el problema lineal iterado muchas veces en lugar de solucionar el problema no lineal. (González, 2008; Santiago y Orrego, 2010)

Los problemas en los que aparece contacto son los más desafiantes de resolver. En la mayoría de los casos dicha región de contacto es desconocida, además en su gran mayoría este tipo de problemas incluyen fricción lo cual hace la convergencia de la solución más difícil.

Generalmente la región real de contacto entre cuerpos deformables no es conocida hasta que se obtiene la solución. A merced de las cargas, los materiales, y las condiciones límites, junto con otros factores, las superficies pueden entrar y salir del contacto de manera imprevisible. Según Wei (2004) el Método de Elementos Finitos puede considerarse el método favorito para tratar este tipo de problemas.

Cuando los cuerpos entran en contacto, surgen fuerzas de contacto que impiden la penetración mutua de los cuerpos y provocan deformaciones en las áreas de contacto. Para el cálculo de estos problemas (problemas numéricos no lineales), el FEM usa el Método multiplicador de Lagrange pero cuando el análisis de contacto que se realiza es en 3D entonces el método que se utiliza el Método aumentado de Lagrange (combinación entre el Método de Penalización y el Método multiplicador de Lagrange).

1.8: Método aumentado de Lagrange.

Este algoritmo se puede definir como el Método de Penalización con control de la penetración. Las iteraciones de Newton-Raphson empiezan igual que en el Método de Penalización y, al igual que en el Método multiplicador de Lagrange, la constante real $FTOLN$ determina la máxima penetración. Si la penetración en una iteración, excede la máxima permitida, la rigidez de contacto para cada elemento será aumentada con los multiplicadores de Lagrange. Por ello este método es igual que el Método de Penalización salvo en la rigidez de contacto, que se va actualizando para cada elemento de contacto. Este hecho se repite hasta que la penetración sea menor que la máxima permitida. (Contact Technology Guide, 2009)

La tolerancia admisible de penetración $FTOLN$ es un factor para ser aplicado sobre las superficies. El rango para este factor es inferior 1.0 (usualmente menos de 0.2) con un defecto de 0.1, y se basa en la profundidad del sólido subyacente, lámina, o elemento de la viga. Este factor se usa para determinar si la compatibilidad de penetración es satisfactoria. La compatibilidad de contacto es satisfactoria si la penetración está dentro de una tolerancia

admisibles (FTOLN por la profundidad de elementos subyacentes). La profundidad está definida por la profundidad común de cada elemento individual de contacto en el par. Si ANSYS detecta cualquier penetración mayor que esta tolerancia, entonces la solución global no se admite. (Contact Technology Guide, 2009)

1.9: Tipos de contacto.

El FEM se puede utilizar para modificar un producto o estructura existente, además puede ser usado para determinar un diseño que se ajuste a nuevas condiciones. Existen diferentes software de simulación ingenieril desarrollados para funcionar bajo este método, tales como: ABAQUS, NASTRAN, MATLAB y ANSYS. (Singiresu, 2005)

El programa ANSYS tiene implementados cinco formas para tratar el contacto: Nodo – nodo, Nodo – superficie, Línea – línea., Línea – superficie, superficie – superficie. Cada una de ellas se utiliza para un tipo de problema determinado y tiene elementos de contacto particulares.

Contacto Nodo – Nodo: es útil para el modelado puntos fijados, ya sea un contacto flexible-flexible o rígido – flexible. Esto implica que la localización final del contacto es conocida de antemano. El elemento ANSYS recomendado es el CONTA178 (utilizado para 2D y 3D), este ofrece mayor resolución que los elementos CONTA12 y CONTA52 también utilizados para resolver este tipo de problemas pero solamente en 2D.

Contacto Nodo – Superficie: Las áreas de contacto son desconocidas y se permite el deslizamiento. El elemento típico usado es el CONTA175, también se puede utilizar este elemento para el contacto superficie – superficie cuando la superficie de contacto está definida por un grupo de nodos, esta superficie puede ser rígida o deformable.

Contacto Línea – línea: el elemento típico es el CONTA176, se utiliza para modelar superficies en 3D, este soporta elementos de mayor y menor orden, es utilizado para definir superficies tipo viga o tipo tubería, es te elemento soporta grandes deslizamientos y desplazamientos.

Contacto Línea – superficie: para este tipo de contacto el elemento ANSYS recomendado es el CONTA177, es recomendado para el modelado de superficies tipo viga y bóveda, este elemento soporta elementos de mayor y menor orden. Este elemento está asociado al elemento TARGE170.

Contacto Superficie – superficie: puede ser explicado por dos cuerpos que entran en contacto debido a la acción de las fuerzas externas (González, 2008). Donde esas superficies se definen a través de los elementos TARGET y CONTA. En los casos en que el contacto está definido como *Rígido – Flexible*, el modo de selección es sencillo la superficie rígida es siempre la definida por el elemento TARGET y la superficie que se deforma por el elemento CONTA, pero cuando el contacto está definido como *Flexible - Flexible* se requiere un amplio conocimiento sobre las características de las superficies. Este tipo de contacto puede ser utilizado para superficies en 2D para las que se recomienda los elementos ANSYS CONTA171, CONTA172 y para las superficies en 3D CONTA173 o CONTA174. (Contact Technology Guide, 2009)

1.10: Formulación matemática del método.

De acuerdo con Lewis et. al. (2004) la ecuación general de elementos finitos para los problemas de elasticidad lineal, se representa según la ecuación 1.26:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Donde:

K: Matriz de rigidez.

u: Vector de desplazamiento.

f: Vector de las componentes de fuerza.

La matriz de rigidez K se determina en este tipo de problemas por la siguiente expresión:

$$[K_C] = \iiint_V [B]^T [E][B] dV = tA[B]^T [E][B] \quad (1.27)$$

Donde [B] es la matriz de variaciones de forma y [E] la matriz de elasticidad.

Una vez determinada la matriz de rigidez de cada elemento es necesario realizar el ensamblaje de la matriz de rigidez global:

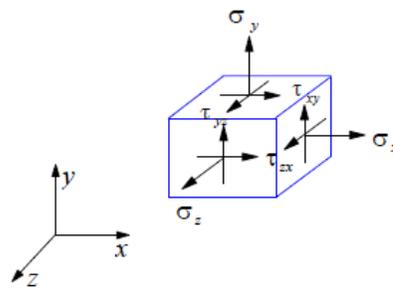
$$[K] = \sum_{i=1}^n [ke] \quad (1.28)$$

Durante la etapa de solución se instrumentan las ecuaciones algebraicas de forma matricial y se determinan los valores desconocidos de la variable primaria (desplazamientos) y luego se sustituyen estos para determinar las variables adicionales (Hutton, 2004).

Finalmente, durante el post proceso se determinan las tensiones internas que actúan sobre cada elemento.

1.11: Estados tensionales.

Los elementos tridimensionales pueden tener cualquier forma arbitraria, propiedades del material y condiciones de fronteras en el espacio. Estos elementos tienen seis componentes de tensiones, 3 normales y 3 tangenciales que se necesitan tomar en consideración (Liu, 2003).



Tensiones: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

Deformaciones: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$.

Figura 1.3: Estados tensionales en elementos 3D. (Liu, 2003)

1.12: Relación tensión-deformación-temperatura en elementos 3D (Ecuación constitutiva).

La relación constitutiva para materiales linealmente elásticos se define de la siguiente manera:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (1.29)$$

Donde:

D: Matriz de elasticidad.

ε : Vector deformación.

σ_0 : Tensiones iniciales.

Para un material isotrópico tridimensional, esta relación se puede expresar matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\nu)c & \nu c & \nu c & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu)c & \nu c & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu)c & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & \text{symmetric} & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha \Delta T}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

$$c = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.31)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.32)$$

Donde:

E: Módulo de elasticidad.

ν : Coeficiente de Poisson.

G: Módulo tangencial del material.

α : Coeficiente de expansión térmica.

ΔT : Diferencia de temperaturas.

El vector de deformaciones puede ser determinado en función del tipo de elemento por la expresión 33.

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{u\} \quad (1.33)$$

La matriz de rigidez para elementos sólidos 3D puede ser obtenida mediante la ecuación (1.34):

$$[k_e] = \int_V [B]^T [D][B] dV = V [B]^T [D][B] \quad (1.34)$$

Donde:

[B]: Matriz de relación tensión deformación.

[D]: Matriz de propiedades del material.

V: Volumen.

El volumen se determina a través de las coordenadas de los nodos que componen el elemento:

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

La determinación de los desplazamientos en cada uno de los nodos que componen la geometría de un cuerpo se debe realizar un análisis del tipo de elemento a emplear.

1.13: Tipos de elementos usados para el modelado en 3D.

Liu (2003) y Felippa (2004) plantean que los elementos más empleados durante el análisis de geometrías tridimensionales son los tetraédricos y hexaédricos. Figura 1.4

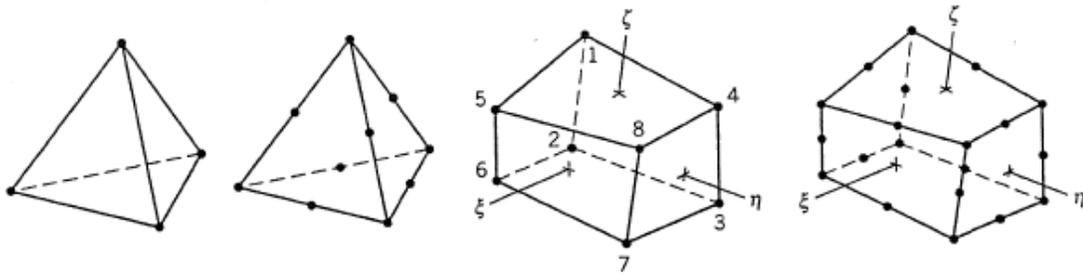


Figura 1.4: Geometría de los elementos 3D.

Elementos Tetraédricos.

Los elementos tetraédricos (lineales) están compuestos por 4 nodos y tres grados de libertad por nodos: desplazamientos en X, Y, Z, para un total de 12 desplazamientos como se muestra en la figura 1.5

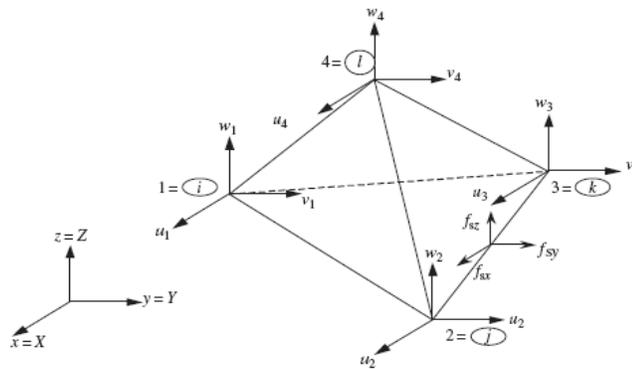


Figura 1.5: Elemento tetraédrico lineal.

En el caso de elementos tetraédricos cuadráticos, están compuestos por 10 nodos e igual número de grados de libertad. Ejemplo de este tipo de elementos son el SOLID92 y SOLID187.

En un elemento, el vector desplazamiento en un punto arbitrario u_x está en función de las coordenadas X, Y, Z, y se obtiene interpolando las funciones de formas, de la siguiente manera:

$$u_x = N \cdot u \quad (1.36)$$

Donde u representa el vector de desplazamientos nodales es dado por:

$$u = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{z3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ u_{z4} \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

Igual que en los elementos bidimensionales N es la matriz de funciones de forma que se determina por:

$$N = \begin{bmatrix} \overbrace{N_1}^{\text{node 1}} & 0 & 0 & \overbrace{N_2}^{\text{node 2}} & 0 & 0 & \overbrace{N_3}^{\text{node 3}} & 0 & 0 & \overbrace{N_4}^{\text{node 4}} & 0 & 0 \\ 0 & \overbrace{N_1}^{\text{node 1}} & 0 & 0 & \overbrace{N_2}^{\text{node 2}} & 0 & 0 & \overbrace{N_3}^{\text{node 3}} & 0 & 0 & \overbrace{N_4}^{\text{node 4}} & 0 \\ 0 & 0 & \overbrace{N_1}^{\text{node 1}} & 0 & 0 & \overbrace{N_2}^{\text{node 2}} & 0 & 0 & \overbrace{N_3}^{\text{node 3}} & 0 & 0 & \overbrace{N_4}^{\text{node 4}} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

El desarrollo de las funciones de forma, se realiza mediante las coordenadas volumétricas, estas son las más convenientes para la construcción e integración de las matrices de los elementos.

Elementos hexaédricos.

Los elementos hexaédricos (lineales) están compuestos por 8 nodos con 3 grados de libertad en cada nodo para un total 24. Ejemplo de ellos son el Solid45 y Solid185. Por su parte, los elementos hexaédricos cuadráticos, están compuesto por 20 nodos e igual número de grados de libertad, teniendo como ejemplo el Solid95 y Solid186. Figura 1.6

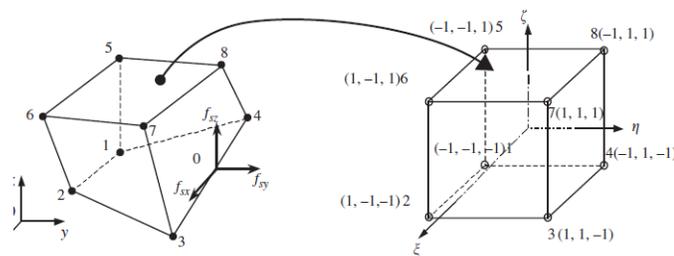


Figura 1.6: Elemento hexaédrico lineal.

Para explicar este elemento usaremos el sistema de coordenadas locales, con su origen en el centro del cubo, lo cual hace más fácil la construcción de las funciones de forma y la evaluación de las matrices:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\
 N_4 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\
 N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\
 N_6 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\
 N_7 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\
 N_8 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

En los elementos hexaédricos el vector de desplazamiento u queda compuesto por 24 elementos, correspondiente a los desplazamientos en X, Y, Z de los 8 nodos que componen el elemento.

$$\mathbf{d}_e = \begin{cases} \mathbf{d}_{e1} \\ \mathbf{d}_{e2} \\ \mathbf{d}_{e3} \\ \mathbf{d}_{e4} \\ \mathbf{d}_{e5} \\ \mathbf{d}_{e6} \\ \mathbf{d}_{e7} \\ \mathbf{d}_{e8} \end{cases} \begin{cases} \text{displacement components at node 1} \\ \text{displacement components at node 2} \\ \text{displacement components at node 3} \\ \text{displacement components at node 4} \\ \text{displacement components at node 5} \\ \text{displacement components at node 6} \\ \text{displacement components at node 7} \\ \text{displacement components at node 8} \end{cases} \tag{1.40}$$

Donde:

$$\mathbf{u}_i = \begin{cases} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x3} \end{cases} \tag{1.41}$$

Son los desplazamientos en el nodo i .

1.14: Matriz de rigidez

La matriz de rigidez K_e para elementos 3D se obtiene después de computada la matriz de relación desplazamiento deformación B .

$$k_e = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D][B] \det[J] \partial\xi \partial\eta \partial\zeta \quad (1.42)$$

Donde $[D]$ es la matriz de constantes del material, la cual depende de propiedades fundamentales del material (como el Módulo de Young, el coeficiente de Poisson y el Módulo tangencia).

Donde J es la matriz Jacobiana definida por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \zeta & \partial y / \partial \zeta & \partial z / \partial \zeta \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Al igual que en elementos 2D, las integrales son desarrolladas siguiendo el esquema de integración de Gauss, el cual para casos 3D es resuelto en tres direcciones.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \xi} & \frac{\partial N_7}{\partial \xi} & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} & \frac{\partial N_7}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_5}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_7}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

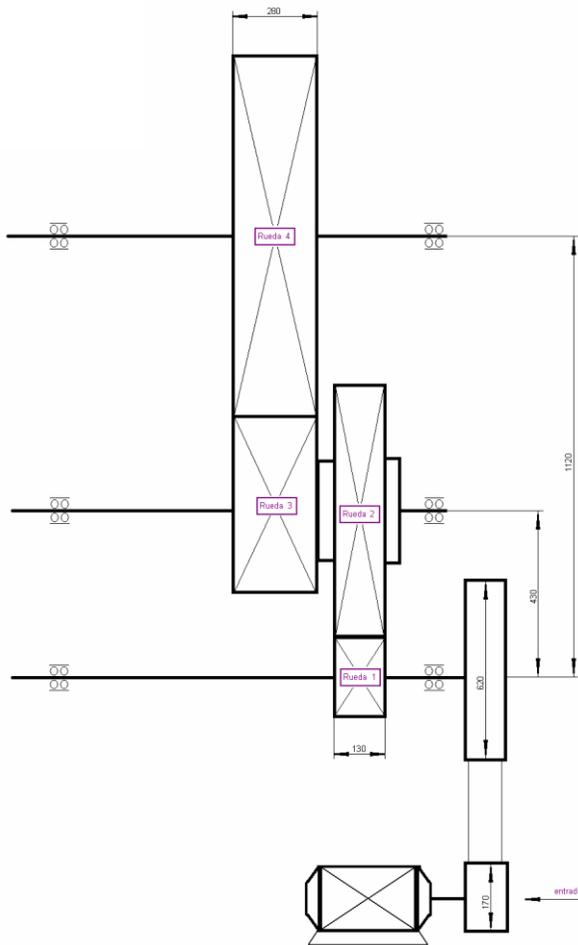
1.15: Conclusiones parciales del capítulo.

- ❖ El Método de Elementos Finitos se adapta a una gran variedad de situaciones y se emplea satisfactoriamente para obtener la solución.
- ❖ Se dispone de la información necesaria para modelar el contacto entre engranajes cilíndricos normales de dientes helicoidales.

CAPÍTULO II: MATERIALES Y MÉTODOS.

2.1: Par dentado seleccionado.

El par dentado seleccionado se corresponde con las ruedas cilíndricas normales de dientes bihelicoidales entre ejes paralelos, ellas forman parte de un reductor de una unidad de bombeo AMPSCOT SK-8, utilizado para la extracción de petróleo en nuestro país. La figura 2.1 representa el esquema cinemático y la figura 2.2 muestra los datos de chapa del motor, a partir de estos datos se comenzaron los cálculos del conjunto. Los dientes forman parte de la rueda1 y la rueda2. El material del par dentado es **40X**.



Datos	Diámetro (mm)
Rueda 1	125
Rueda 2	735
Rueda 3	188
Rueda 4	1200

n(motor)	(rpm)	1200
dpolea motor	(mm)	170
dpolea2	(mm)	620
α_0		20
Nmotor	(kW)	45
criterio de carga		0.136764706
f		1
aw rueda 1 - rueda 2	(mm)	430
aw rueda 3 - rueda 4	(mm)	690
tipo de material de las ruedas		5XGM
material alternativo		40X

Figura 2.2: Datos del conjunto.

Figura 2.1: Esquema cinemático del conjunto.

En los anexos se muestra la secuencia de cálculo empleada. Con la cual se propone una solución computarizada de los cálculos necesarios para el diseño de ruedas dentadas

cilíndricas normales con dientes helicoidales y bihelicoidales, cuando son conocidos: el número de dientes del par dentado, el módulo y la distancia interaxial, a través del Sistema de aplicación “Microsoft Office Excel”. Este programa incluye hojas que realizan el cálculo geométrico, (ver ANEXO II), de comprobación a la flexión (ver ANEXO IV), comprobación de resistencia a esfuerzos de contacto (ver ANEXO V) y el cálculo de las fuerzas que intervienen en el engranaje, (ver ANEXO III).

2.2: Identificación de la idoneidad del análisis por el FEM.

El método de elementos finitos presenta un amplio campo de utilización y se emplea para dar solución a diferentes problemas de ingeniería. Su aplicación está en análisis estáticos, dinámicos, y comportamiento térmico de sistemas físicos y sus componentes. En la actualidad el método de elementos finitos aparece en la industria, encuentra además gran aplicación en la deformación plástica (no lineal) y en la deformación elástica (lineal).

Este método permite realizar el modelo matemático del sistema real, más fácil y económico de modificar que un prototipo. Es conocido además que constituye un método de cálculo aproximado. Esto indica que los prototipos siguen siendo necesarios, pero en menor cantidad, ya que el FEM puede acercarse bastante a un buen diseño (Hearn, 1997). La validación del FEM está probada con la utilización del mismo a escala mundial. (González y Alfonso, 2008)

Lo anteriormente expuesto fundamenta la aplicación del mismo para el cálculo de las tensiones en los engranajes helicoidales y bihelicoidales.

2.3: Acerca de la obtención del modelo geométrico del par dentado.

El programa ANSYS permite tres formas para construir el modelo:

- ❖ Construir la geometría básica y realizar el mallado con ANSYS.
- ❖ Construir la geometría básica en un programa CAD, exportarla y mallarla utilizando ANSYS.

- ❖ Construir la geometría y realizar el mallado en un programa CAD e importarlo todo a ANSYS.

Cuando la geometría del sólido a modelar es compleja para su generación directa en ANSYS es factible utilizar un programa CAD. En el caso que nos ocupa la geometría básica se construyó en AutoCAD 2010.

2.4: Creación de un sólido 3D (diente helicoidal) por solevación en AutoCAD.

Con el comando LOFT (solevar) se puede crear un nuevo sólido o superficie especificando una serie de secciones transversales. El perfil de la sección transversal define la forma del objeto sólido o superficie resultante. Las secciones transversales, generalmente son curvas o líneas, pueden ser abiertas para la creación de superficies o cerradas para la creación de sólidos. El comando LOFT dibuja un sólido o una superficie en el espacio entre las secciones transversales. Se debe especificar al menos dos secciones transversales para usar este comando.

Una vez calculados los parámetros que definen el perfil del diente de la rueda dentada, se pasa a su representación en AutoCAD, bastando para su trazado 2D, los radios calculados y el ángulo β que forma cada punto notable con la vertical, figura 2.3. Durante el trazado del diente debe prestarse atención a que la altura del diente está comprendida entre las circunferencias que pasan por la cabeza y por el pie del diente. La parte baja del pie del diente tiene un radio de redondeo (ρ) con la circunferencia interior.

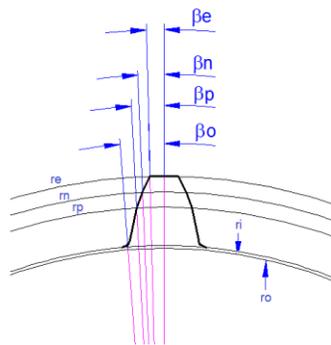
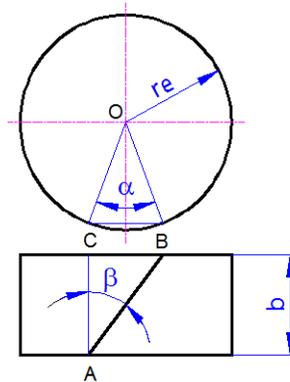


Figura 2.3: Modelación del perfil del diente

Trazado el perfil del diente en un contorno cerrado, usando el comando PEDIT se convierte en polilínea. Para la solevación del diente helicoidal, en este trabajo, se dividieron la altura del diente y el ángulo de giro del diente helicoidal (α BOC), ver Figura 2.4 y ecuaciones 2.1 y 2.2, en cinco partes, usando por consiguiente seis secciones transversales en esta operación.

Figura 2.4: Ángulo de giro del diente helicoidal , $\alpha = \text{BOC}$.

$$BC = b(\tan \beta) \quad (2.1)$$

$$\alpha = 2 \left[\text{sen}^{-1} (0.5 BC/re) \right] \quad (2.2)$$

El contorno cerrado del perfil del diente se reprodujo entonces como se muestra en la figura 2.5, luego los perfiles desde el 2 hasta el 6 fueron rotados (en sentido positivo) en la proporción calculada, 1/5 del ángulo de giro α entre secciones transversales, de manera que se garantice el ángulo de inclinación del diente β , como es ilustrado en la figura 2.6

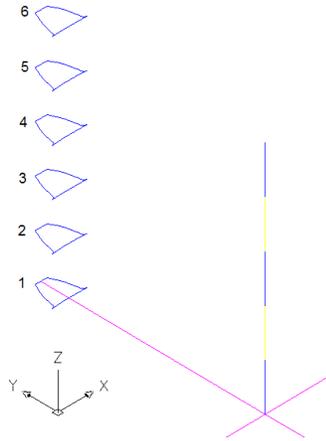


Figura 2.5 Reproducción del perfil del diente (sección transversal del diente).

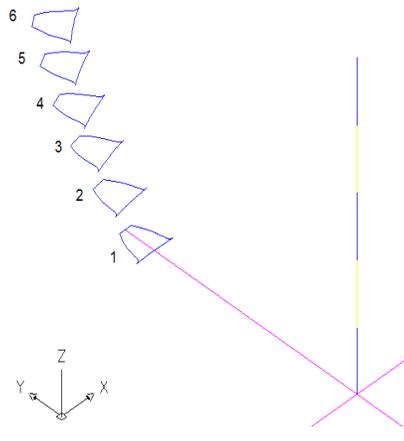


Figura 2.6 Rotación de las secciones transversales.

Rotadas las secciones transversales se ejecuta el comando *LOFT*, ver figura 2.7.

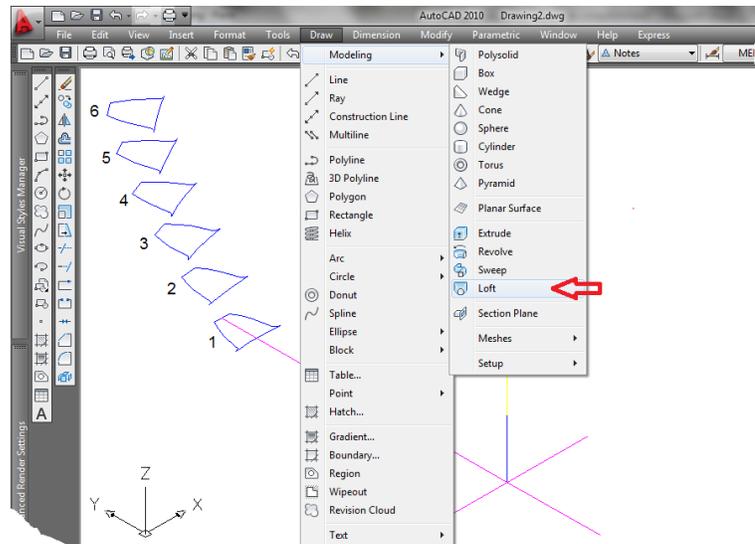


Figura 2.7: Ubicación del comando *LOFT*

Luego de seleccionar las secciones transversales que conformaran el sólido, el software pide que se entre una opción para ejecutar el comando como se presenta en la figura 8, por defecto tiene marcada la opción: solamente secciones transversales “*Cross sections only*” que es la recomendada en este caso; seguidamente pide que se seleccione el tipo de ajuste o calibración del comando solevar “*Loft Settings*”. Ver figura 2.8

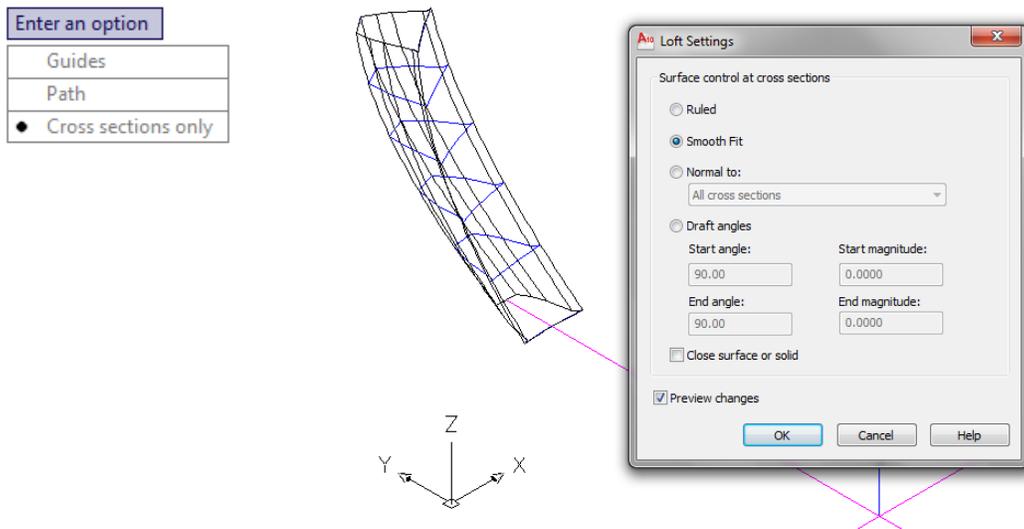


Figura 2.8: Selección de la opción y tipo de ajuste del comando solevar.

En la figura 2.9 se observa como el diente va envolviendo el cilindro formando un helicoides, con estos pasos es posible realizar el modelado completo de la rueda, figura 2.10.

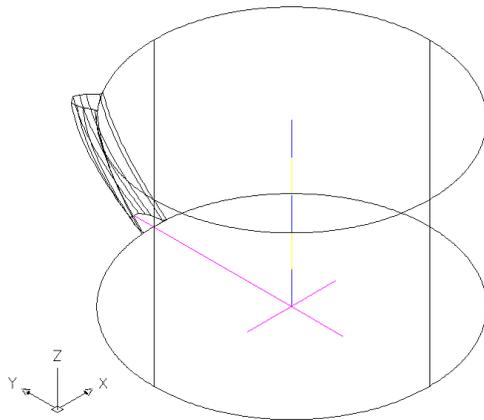


Figura 2.9: Hélice del diente alrededor del cilindro.

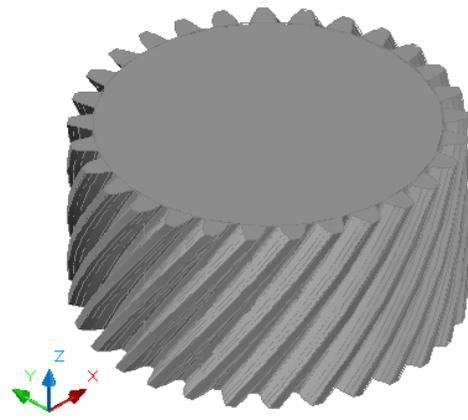


Figura 2.10: Rueda cilíndrica helicoidal

2.5: Análisis de contacto en 3D.

Con el modelo geométrico creado en AutoCAD es necesario importar la geometría a ANSYS haciendo uso de los formatos aceptados (IGES, SAT, Pro/E, ParaSolid, UniGraphics), en este caso en particular se utiliza la extensión SAT con la opción: “leer entrada desde” (read input from).

Figura 2.11

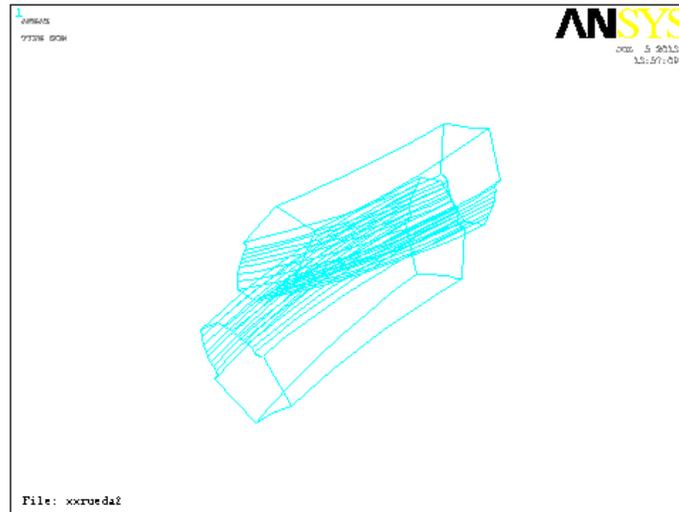


Figura 2.11: Modelo geométrico del par dentado.

En esta investigación es utilizado un sistema de ecuaciones no lineales y el método de solución iterativo seleccionado es el Método aumentado de Lagrange.

2.6: Idealización.

En la corrida del software es simulado el contacto en la zona del polo de engrane entre un par de dientes helicoidales para los cuales la superficies de contacto es continua y el contacto está definido como Rígido- Flexible.

Las superficies denominadas para el análisis de contacto en 3D son la TARGET y la CONTA. El denominado contacto ocurre cuando la superficie del elemento CONTA penetra sobre la superficie determinada como TARGET. Los elementos tipo CONTA se representan sobre las superficies potencialmente en contacto.

2.7: Elementos ANSYS utilizados.

Los elementos ANSYS utilizados para el análisis fueron: SOLID186, TARGE170, CONTA174.

El elemento SOLID186 es de orden superior, cuadrático y está definido por 20 nodos, con uno en cada punto medio de las aristas, cada uno de ellos con tres grados de libertad. Este elemento puede utilizarse también como prisma, tetraedro o pirámides y esto no disminuye la precisión de los resultados. La geometría para este elemento es mostrada en la figura 2.12.

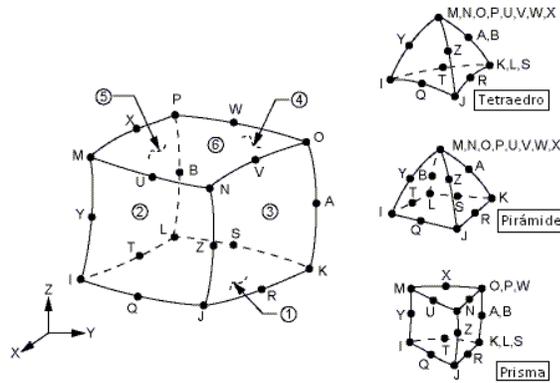


Figura 2.12: Geometría del elemento SOLID186.

Este elemento es adecuado para el mallado de superficies irregulares derivadas de los sistemas CAD/CAM (Contact Technology Guide, 2009). Además permite la superposición de hasta 250 capas diferentes.

Los elementos TARGE170 y CONTA174 se utilizan para representar superficies de contacto en 3D, el elemento TARGE fue definido para la superficie rígida, para este caso la rueda y el elemento tipo CONTA para el piñón. El elemento TARGE170 está asociado a los elementos: CONTA173, CONTA174, CONTA175, y CONTA176, indistintamente del análisis que se realice (*Rígido – Flexible o Flexible - Flexible*). Este elemento puede descomponerse en triángulos de 3 nodos y de 6 nodos y cuadriláteros de 4 nodos y de 8 nodos, figura 2.13. El elemento CONTA174, por su parte está definido por 8 nodos y su geometría se representa en la figura 2.14.

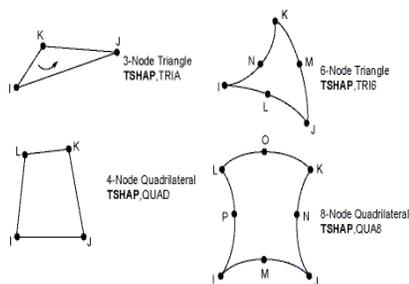


Figura 2.13: Geometría del elemento TARGE170

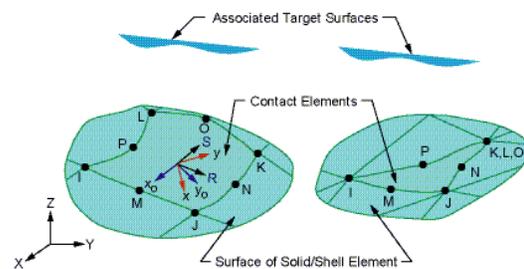


Figura 2.14 Geometría del elemento CONTA174

Estos elementos presentan ciertas ventajas con respecto a otros, pues el hecho de soportar elementos de mayor y menor orden en ambas superficies y la no presencia de restricciones en la forma de modelar la superficie TARGET, hacen posible la obtención de mejores resultados ingenieriles.

2.8: Características del material.

Se seleccionó para el material un modelo del tipo estructural, lineal, elástico e isotrópico. Las propiedades del material que permiten una modelación efectiva se muestran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Propiedades mecánicas del material.

Módulo de elasticidad	207000MPa
Límite de Fluencia.	655MPa
Coefficiente de Poisson	0.30
Módulo Tangente	1.73e5Mpa

2.9: Discretización del modelo.

El FEM se basa en transformar un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado, esta transformación se denomina discretización del modelo. El conocimiento de lo que sucede en el interior del modelo se obtiene mediante la interpolación de los valores de la función a partir de un número determinado y finito de puntos.

La discretización del modelo está basada en el tipo de elemento finito y la selección del mallado necesario. En este estudio el modelo fue mallado de forma volumétrica, mallado libre, con la opción del mallado refinado para las superficies en contacto, ver figura 2.15.

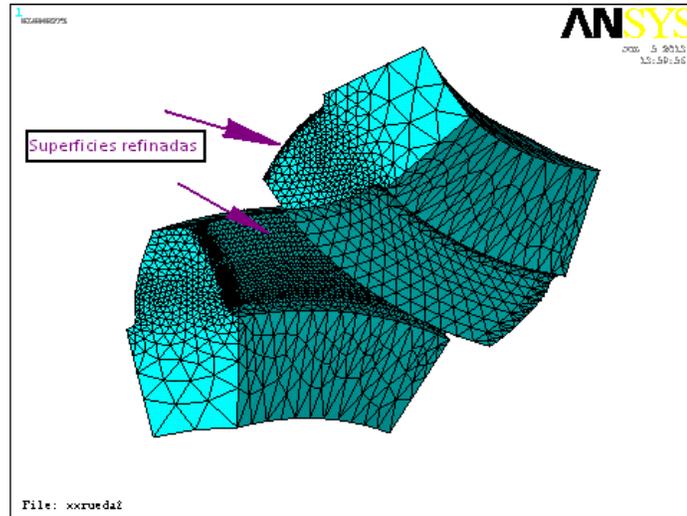


Figura 2.15: Mallado de las superficies.

Este modelo determinó un total 49144 nodos asociados a 31784 elementos.

Los problemas de contacto requieren recursos significativos de computadora, por lo que cuando se espera grandes desplazamientos o cuando no se conoce la región donde ocurrirá el contacto es posible seleccionar los nodos cercanos a la región de contacto para reducir el tiempo de obtención de la solución y lograr un modelo más eficiente.

El mallado de las superficies de contacto se realizó después de definir la posible región de las superficies que entrarían en contacto en la posición del polo de engrane, después de haber seleccionado los nodos pertenecientes a esas áreas utilizando la opción “*by location*”, otorgando un valor máximo y otro mínimo. Para facilitar la entrada de las coordenadas el modelo debe ser previamente construido en el origen x,y,z (0,0,0).

La figura 2.16 muestra dos imágenes, la primera (izquierda) representa todos los nodos de las dos áreas que entrarán en contacto, en la segunda (izquierda) los nodos cercanos a la región de contacto con una localización en el eje de coordenadas “ z ” desde 0 y hasta 30 para ambas superficies.

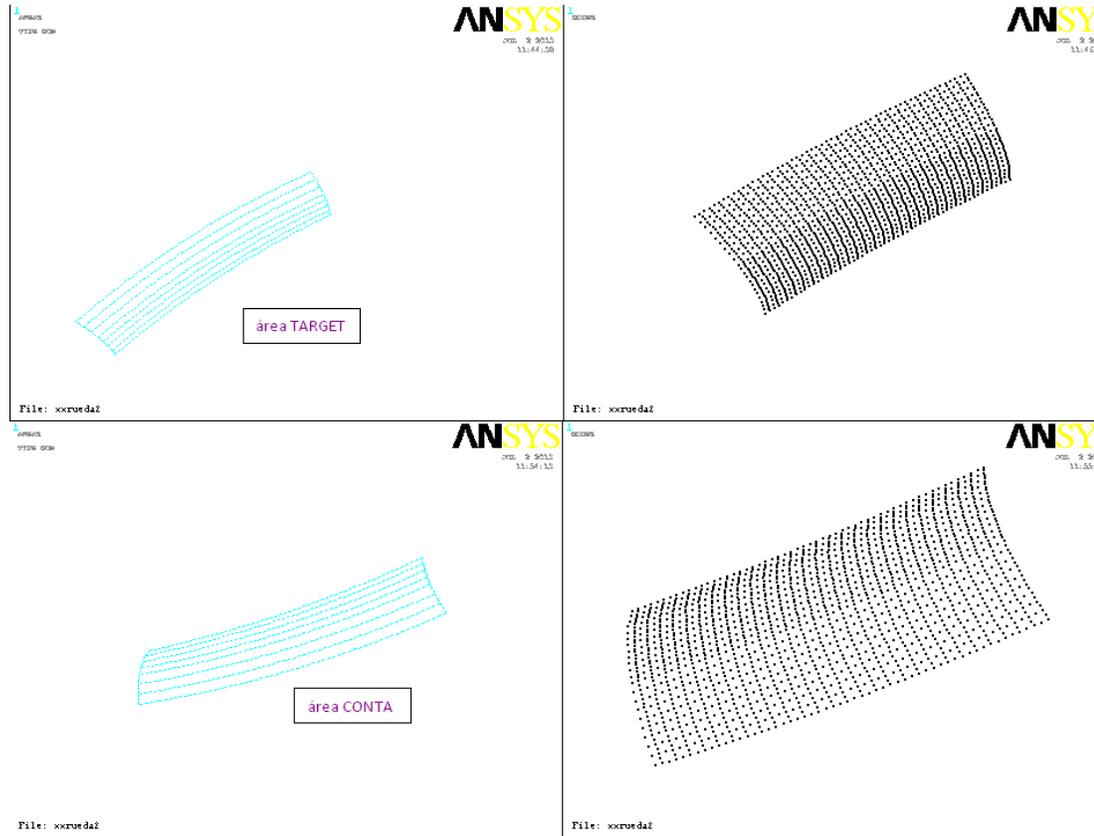


Figura 2.16: Nodos cercanos a la región de contacto.

Esto permite que el análisis se realice solamente para los nodos seleccionados, la figura 2.17 explica ilustrativamente lo anteriormente planteado.

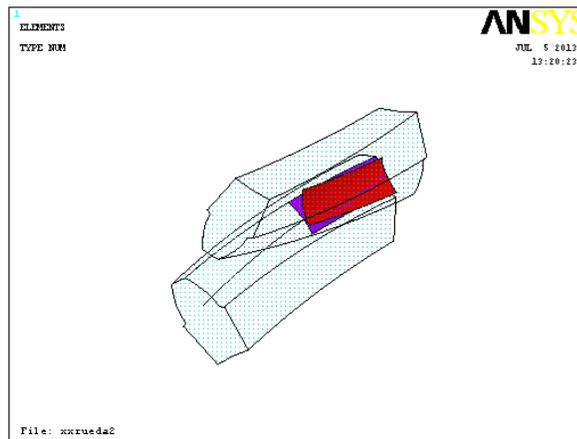


Figura 2.17: Acercamiento de las áreas para el contacto.

Las áreas de las superficies en contacto tienen un total de 9998 nodos y después de aplicada esta opción solamente existen 1272, esto significa que disminuye en un 87,27% la cantidad de nodos a resolver y por tanto el tiempo de obtención de la solución es menor.

2.10: Condiciones de frontera.

Las condiciones de fronteras están definidas como las limitaciones de los desplazamientos de los nodos del modelo. Para el modelo que corresponde a la rueda se fijaron la superficies mostradas en la figura 2.18, limitando así todos los desplazamientos de la misma, sin embargo para el piñón solamente se limitó los nodos que presentan vínculo con el eje. Estas condiciones son válidas para la medición de la rigidez del contacto pues las zonas restringidas están realmente conectadas a un volumen de material mayor. (González, 2008)

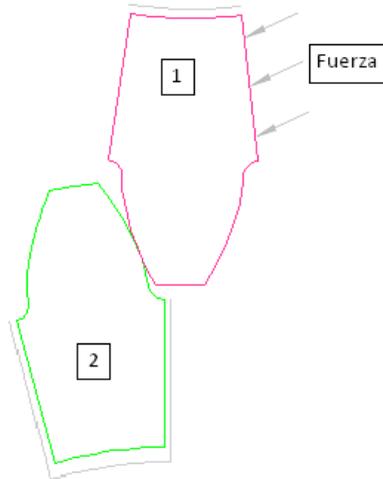


Figura 2.18: Condiciones de fronteras aplicadas al modelo.

2.11: Determinación de la fuerza aplicada.

El cálculo de la fuerza aplicada en el par engranado se realizó a partir del mayor Momento Torsor del conjunto (620074,08 N), en el ANEXO VII se ilustra un esquema del cálculo de la fuerza aplicada en el piñón, la fuerza se aplicó sobre todos los nodos que pertenecen a la superficie, en la figura 2.18 se observa lo explicado.

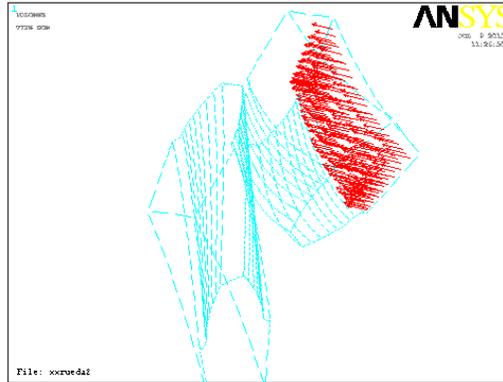


Figura 2.18: Fuerza aplicada sobre los nodos de la superficie.

La superficie predeterminada consta con un total de 251 nodos, la fuerza fue repartida en cada uno de ellos de forma equitativa. El valor de la fuerza aplicada es de 305,36646N. En el ANEXO VII se muestra el código creado para resolver el problema.

2.12: Conclusiones parciales del capítulo.

A través del desarrollo de este capítulo, se ha podido arribar a las siguientes conclusiones parciales:

- ❖ La solevación de objetos sólidos inclinados se debe construir con ángulos positivos para evitar que se deforme el objeto.
- ❖ El análisis de contacto de superficie que no están completamente en contacto es factible seleccionar los nodos cercanos a la posible región de contacto para disminuir el tiempo de obtención de la solución.

CAPÍTULO III: ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

Como fue explicado en el Capítulo I el Método de los Elementos Finitos (FEM) es usado en esta investigación para modelar el contacto en 3D entre dientes helicoidales. En este capítulo se presentan y argumentan los resultados proporcionados por ANSYS sobre el estado del contacto entre las dos ruedas descritas anteriormente.

A partir de los resultados obtenidos en la materialización del experimento simulado, este análisis revisa aspectos del comportamiento del contacto como cantidad de nodos en contacto, valores de presión, penetración y tensión total.

3.1: Cantidad de nodos en contacto.

Las superficies seleccionadas para analizar el contacto cuentan con un total de 4544 nodos asociados a 1136 elementos. De la lista de resultados ANSYS se obtiene que existe un total de 8 nodo con GAP=0 representados en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Estado del contacto en zona de análisis.

Nodo	STAT	PENETRACIÓN	PRES	STOT	GAP
25565	2	0.12732E-01	555.49	555.49	0
47821	2	0.87487E-02	381.70	381.70	0
47931	2	0.10393E-01	453.43	453.43	0
48599	2	0.38366E-02	167.39	167.39	0
48611	2	0.47371E-02	206.67	206.67	0
48906	2	0.12212E-01	532.81	532.81	0
49029	2	0.94353E-02	411.66	411.66	0
49123	2	0.12040E-01	525.29	525.29	0

En la tabla 3.2 se encuentra tabulada la ubicación de los nodos según sus coordenadas x,y,z lo que facilita su comprensión en el espacio tridimensional.

Tabla 3.2: Coordenadas para los nodos GAP=0

Nodo	x	y	z
25565	-0.12391E-04	-71.670	0.14211E-13
47821	-11.903	-76.752	23.110
47931	-10.958	-76.893	21.666
48599	-1.1513	-71.993	2.1294
48611	-0.46433	-71.945	0.97010
48906	-8.1535	-75.229	15.890
49029	-4.4853	-73.533	8.6644
49123	-0.88418	-71.664	1.4431

En la figura 3.1 representa el estado de contacto en la zona de análisis, donde puede observarse claramente la formación de 4 elipses a lo largo de una línea imaginaria de forma descendente hacia la base del diente.

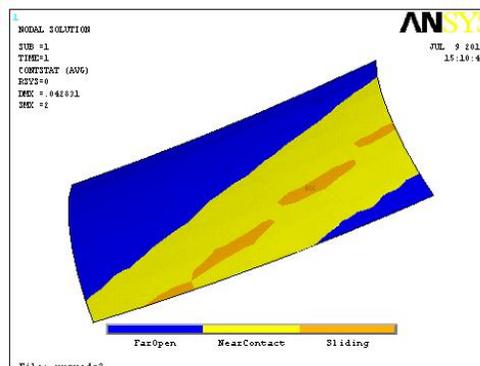


Figura 3.1: Estado del contacto en zona de análisis.

Existe otra zona donde el GAP es diferente de cero, lo que significa que estos nodos se encuentran fuera de contacto. La figura 3.1 representa el estado de contacto con un rango de colores que se despliega desde los nodos que se encuentran abiertos ($GAP \neq 0$), nodos cercanos al contacto (GAP cercano a cero) y nodos en deslizamiento con $GAP=0$, estos últimos son los que se encuentran en posición de contacto.

3.2: Presión de contacto.

La zona de mayor presión de contacto se encuentra localizada según los resultados obtenidos en el nodo 25565, las coordenadas para su ubicación se pueden observar en la tabla 3.2, estas coordenadas aseguran que se encuentra ubicado en la circunferencia primitiva del diente, pero cercano al flanco del diente, en otras palabras se encuentra en la primera elipse que se observa en la figura 3.2. El valor de presión para este nodo es de 555,491MPa, siendo este el mayor valor obtenido para el modelo.

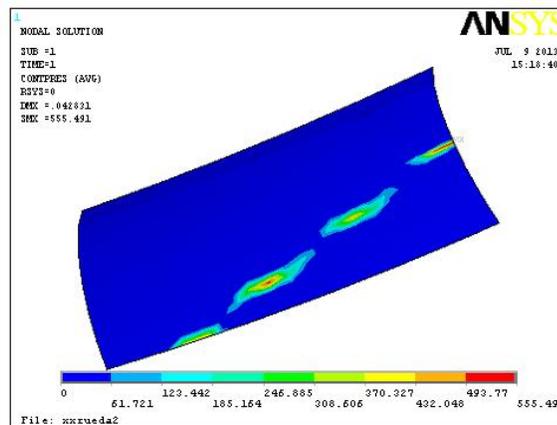


Figura 3.2: Presión de contacto en zona de análisis.

Existen otros nodos con valores de presión cercanos al máximo como son los nodos número 48906 y 49123. La ubicación espacial del nodo 49123 es cercana a la del nodo 25565 (nodo de mayor presión), el otro nodo se encuentra ubicado en la región central del área analizada.

Si se analiza la distribución de la presión con respecto a al ubicación de los nodos en el espacio podemos entender que ella se distribuye a lo largo de la línea imaginaria pero de manera irregular, tal es el caso de los nodos 47821 y 47931, los que se encuentran localizados en la

región cercana a la base del diente y poseen valores de presión en el orden de los 453.43MPa y 381.70MPa.

3.3: Penetración de contacto.

La figura 3.3 representa la penetración de contacto con valores que oscilan desde 0 y hasta 0,012732mm. Para los nodos seleccionados los valores de penetración se distribuyen desde 0.38366E-02mm y hasta el valor máximo. Las zonas de máxima penetración se corresponden con las zonas de mayor presión de contacto. En otras palabras el nodo 25565 es el de mayor penetración y al igual que en la presión de contacto la penetración se distribuye a lo largo de la línea diagonal imaginaria de forma irregular. Figura 3.3

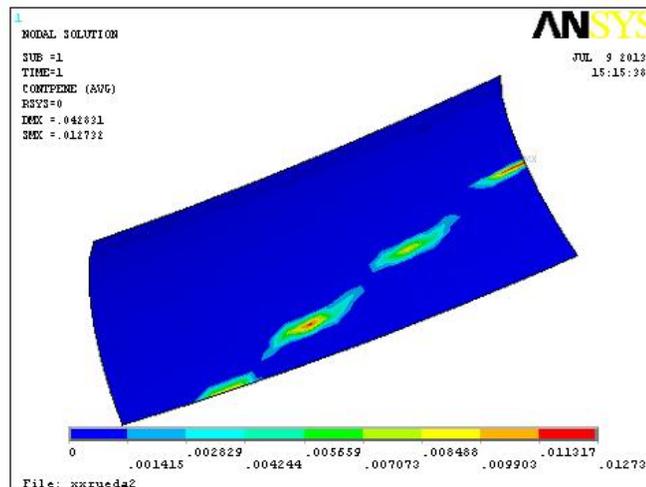


Figura 3.3: Penetración del contacto en zona de análisis.

3.4: Tensiones totales de contacto.

La figura 3.4 muestra las tensiones totales obtenidas tras correr el modelo, los valores para los nodos seleccionados oscilan desde 167,39MPa hasta un valor de 555,491MPa. Estos valores se distribuyen siguiendo el mismo comportamiento de la presión de contacto y la penetración. El nodo 25565 es donde se encuentran concentrados las mayores tensiones, y se corresponde a 555,491MPa.

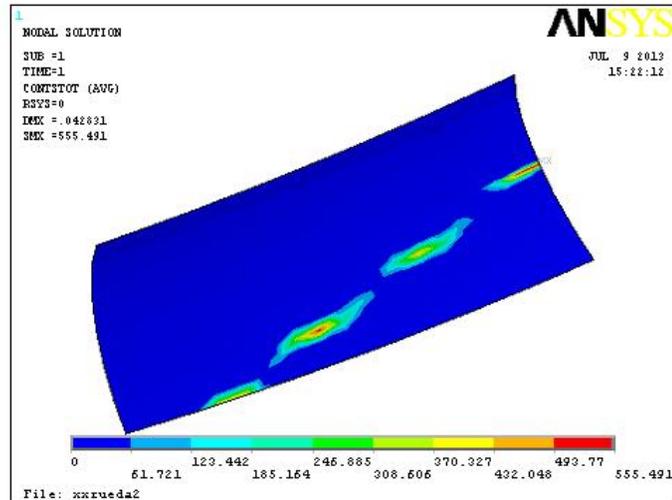


Figura 3.4: Tensiones totales en zona de análisis.

La tensión máxima obtenida por el modelo es de 555,491MPa, este valor es menor que el de la tensión admisible para el contacto, tiene un valor de 920MPa (ver anexo V). El valor obtenido por el modelo es menor en un 39,62% respecto a la tensión admisible. Si además se compara el valor de tensión obtenida por el modelo con el límite de fluencia del material 655MPa, previamente establecido el Capítulo II, se puede observar que es menor en un 15%.

3.5: Conclusiones parciales del capítulo.

- ❖ Los nodos en contacto (GAP=0) se distribuyen a lo largo de una línea diagonal a partir de la región del polo de engrane y hasta la base del diente.
- ❖ Los valores de presión, penetración y tensiones totales se distribuyen a lo largo de la línea diagonal de manera irregular.

CONCLUSIONES.

Como resultado de lo expuesto en el presente trabajo, se enuncian las siguientes conclusiones:

- ❖ Se puede realizar un análisis de contacto en 3D empleando el método de elementos finitos en engranajes cilíndricos normales de dientes helicoidales.
- ❖ Los valores mayores de presión de contacto se encuentran ubicados en la región del polo de engrane.
- ❖ La presión de contacto, la penetración y las tensiones totales se distribuyen irregularmente a lo largo de la línea imaginaria desde el punto inicial de contacto hasta la base del diente.

❖ **RECOMENDACIONES.**

-
- ❖ Siempre que se trabaje en la solución de problemas de contacto es recomendable simplificar la posible área de contacto para disminuir el tiempo de obtención de la solución.
 - ❖ Extender este estudio a las futuras fabricaciones de mecanismos que presenten engranajes cilíndricos normales de dientes helicoidales.

BIBLIOGRAFÍA

- 1 Alfonso Brindis, E. 2004. *Transmisiones por engranajes. Metodología de cálculo, Universidad de Matanzas. Matanzas (Cuba).*
- 2 Baranov, G. G. 1979. *Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas. . Moscú.*
- 3 Cotaquispe Cevallos, L. O. 2006. *Determinación del punto de mayor esfuerzo normal en el pie de diente de un engranaje de dientes rectos exteriores mediante el método de los elementos finitos. Facultad de Ciencias e Ingeniería Pontificia Universidad Catól.*
- 4 Coy, Townsend y Zaretsky. Gearing. 1985. *Nasa 1152, AVSCOM Technical Report 84-C15.*
- 5 Dobrovolski V., 1980. *Elementos de Máquinas. Moscú.*
- 6 Estrems, M., Faura, F., Pedrero, J.I. 2001. *Modelo de distribución de carga entre dos cuerpo con varios puntos en contacto. Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería Vol17, No.1, pp 387-401.*
- 7 Faydor L. Litvin and Alfonso Fuentes, J. Matthew Hawkins, Robert F. Handschuh. 2001. *NASA, Design, Generation and Tooth Contact Analysis (TCA) of Asymmetric Face Gear Drive With Modified Geometry.*
- 8 Faydor S. L. Litvin, Qi Fan, Vecchiato, D. Demenego, Alberto. 2001. *Computerized Generation and Simulation of Meshing of Modified Spur and Helical Gears Manufactured, ARL-CR-468.*
- 9 Felippa, C.A. 2004. *Introduction to finite element methods [on-line], disponible en Internet en: <<http://www.colorado.edu>>. Colorado.*
- 10 González Rey G., García Martín R. J., Frechilla Fernández P..2006. 35-46, *Ediciones MECANICA, Modelo matemático y procedimiento para la generación gráfica de los contornos de dientes de engranajes cilíndricos.*
- 11 García Santiago, M. J. 2010. *No linealidades por contacto.*
- 12 Golubev Y., 1978. *Teoría de máquinas y mecanismos. La Habana.*
- 13 González Quintero, O. 2008. *Endurecimiento Subestructural en Engranajes Cilíndricos de Dientes Rectos. Tesis Presentada para Optar por el Grado Científico de Doctor en Ciencias Técnicas. UMCC.*
- 14 González Quintero, O., Alfonso Brindis, E. 2008. *Análisis del estado tensional en el*

- contacto de dientes de engranajes cilíndricos mediante el Método de Elementos Finitos. Ingeniería Mecánica 3, pp 63 – 6963.*
- 15 González Rey, G y García Toll, A. 2000. *Procedimiento de descifrado geométrico de engranajes cilíndricos. Ingeniería Mecánica. Vol 1.*
 - 16 González Rey, G., Frechilla Fernández, P., García Martín, R. J. 2002. *El método de elementos finitos como alternativa en el cálculo de engranajes. Ingeniería Mecánica, 1, pp 55-67, Ediciones MECANICA.*
 - 17 González Rey, G., García Martín, R. J., Frechilla Fernández, P. 2006. *Modelo matemático y procedimiento para la generación gráfica de los contornos de dientes de engranajes cilíndricos. Ingeniería Mecánica, Vol.1,pp.35-46, – Ediciones MECANICA.*
 - 18 Handschuh, F. R. *Recent Advances in the Analysis of Spiral Bevel Gears. NASA Army Research Laboratory, Technical Memorandum 107391 Technical Report ARL-TR-1316.*
 - 19 Laureano R., J. y Goytisoló. 2000. *Correcciones en las Transmisiones por Engranajes Cilíndricos de Dientes Rectos. Universidad Central de Las Villas . Cuba.*
 - 20 Lelikov, Oleg P. 2009. *Design of Machine Elements. En: Grote, Antonsson (Eds.). Springer Handbook of Mechanical Engineering., Cap. 6. LLC New York (USA).*
 - 21 Liu, G. R, Quek, S. S. 2003. *The Finite Element Method: A Practical Course. ISBN 07506 58665.*
 - 22 Machado Rodríguez, A.S., Moya Rodríguez, J.L., Negrín Hernández, L.I., Fernández Rico, J.E., Sierra, José M. 2001. *Análisis mediante el Método de los Elementos Finitos de la influencia de los desplazamientos en la capacidad portante de los engranajes cilindricos la flexión. Centro Azúcar. Vol. 1.*
 - 23 Macías Dieguez, Reynier. 2012. *Trabajo de Diploma.*
 - 24 Mirabet, L. E. y Martínez D. 2008. *Coeficiente de oscilación de la línea sumaria de contacto en los engranajes cilíndricos helicoidales. Ingeniería Mecánica, Vol. 12, No.1, pp. 21-26 ISSN 1815-5944.*
 - 25 Rao, Singiresu S. 2005. *The Finite Element Method in Engineering, FOURTH EDITION ISBN: 0-7506-7828-3.*
 - 26 Rivero Llerena, G. 2002. *Determinación del factor de contacto entre los flancos del engranaje por tornillo sinfín con perfil derivado de cono. Tesis presentada en opción al grado científico de doctor en ciencias técnicas. C. de La Habana.*

- 27 Rodríguez, G.I. 2011. *Elementos de diseño electromecánico. Tesis de Maestría*. Moa (Cuba).
- 28 Varadi, K. y Poller, R. *Analysis of gear teeth contact by the finite element method, Acta Tech.*
- 29 Wei Saskatchewan, Z. 2004. *Stresses and deformations in involute spur gears by finite element method. Department of Mechanical Engineering University of Saskatchewan Saskatoon.*

ANEXOS

ANEXO I: Leyenda

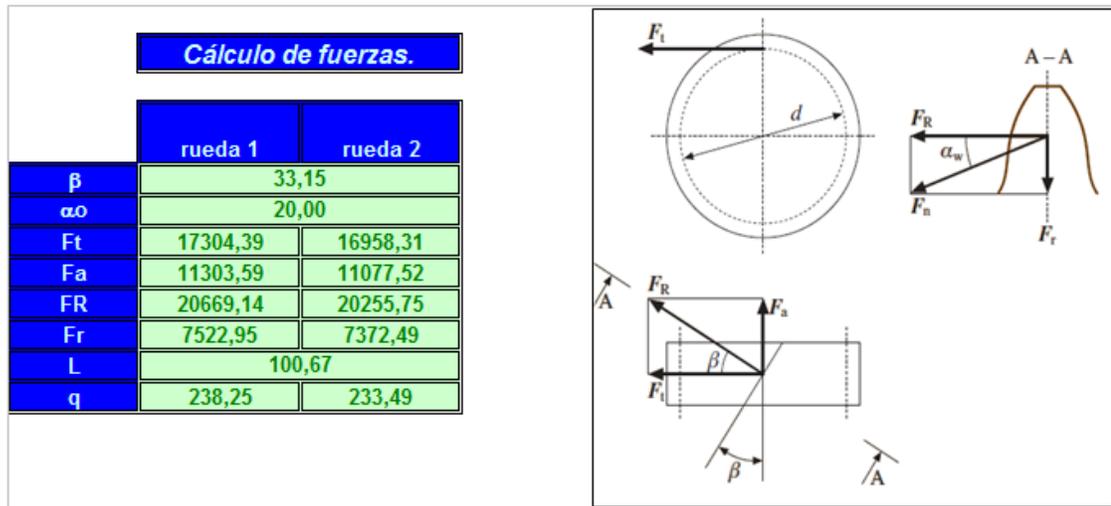
<i>Leyenda</i>	
tn	paso normal.
tf	paso frontal.
mf	módulo frontal.
rp	radio de la circunferencia de paso.
Z	número de dientes.
ro	radio de la circunferencia básica.
h	altura del diente.
ri	radio de la circunferencia interior.
re	radio de la circunferencia exterior.
do	diámetro de la circunferencia básica.
de	diámetro de la circunferencia exterior.
b	ancho de la rueda
aw	distancia interaxial.
Sp	grueso del diente por la circunferencia de paso.
Se	grueso del diente por la circunferencia exterior.
f	coeficiente de altura = 1
ρ	radio de curvatura de la rueda reducida.
Zred	número de dientes de la rueda reducida.
Zmin	número de dientes mínimos de una rueda oblicua normal.
αcf	ángulo de la cremallera en la sección frontal de la rueda.
αmo	ángulo de montaje.
εmin(f)	desplazamiento relativo mínimo en el plano frontal.
ξobl	grado de recubrimiento o suavidad de la marcha.
inv	involuta de un ángulo.
ZE	factor de elasticidad (MPa).
ZH	factor de forma.
bw	ancho del engranaje.
KA	coeficiente de aplicación de la carga.
kβ	coeficiente de concentración de la carga.
Kv	coeficiente de carga dinámica.
KHα	coeficiente de distribución de la carga.
KHβ	coeficiente de irregularidad de la carga a lo largo del diente.
Yβ	factor de inclinación del diente.
bw	ancho del engranaje.
dw1	diámetro primitivo del piñón.
ESQ	factor evaluado según el esquema de montaje de las ruedas.
Yf	factor de forma.
Xi	coeficiente de corrción del diente.
Zv	número virtual de dientes.
Kfl	coeficiente de longevidad de la fractura.
Nfb	número de ciclos básicos.
NFE	número de ciclos reales.
Kfc	coeficiente de carga bilateral.
Sf	coeficiente de seguridad a la fractura.
Fn	Fuerza de presión normal
Ft	fuerza circunferencial.
Fa	fuerza axial.
Fr	fuerza radial.
q	carga específica sobre las líneas de contacto.
Lmin	longitud sumaria de las líneas de contacto.
εα	razón de contacto transversal
βb	ángulo de la hélice en el cilindro base
KHI	coeficiente de longevidad del piñón y la rueda
SH	coeficiente de seguridad a esfuerzos de contacto.
σHlimb	esfuerzo límite de fatiga para contacto intermitente del piñón.

ANEXO II: Cálculo geométrico.

	Resultados por ruedas	
	rueda 1	rueda 2
η transmisiones engranajes	0,98	
η transmisiones correa	0,95	
Nmotor (kW)	45	
n(motor) (rpm)	1200	
d polea m (mm)	170	
d polea 1 (mm)	620	
α_o	20	
m normalizado	6	
Z	20	100
aw	430	
bw	65	65
n	329,03	65,81
ω	34,46	6,89
u	5,00	
N	42,75	41,90
Mt	1240148,16	6076725,99
mf	7,17	
β	33,15	
α_{cf}	23,50	
Zmin	10,53373873	
Z1>Zmín	rueda normal	
rp	71,67	358,33
ro	65,72	328,62
h	13,50	13,50
ri	64,17	350,83
re	77,67	364,33
Sp	11,26	11,26
Se	5,51	5,92
Se \geq 0.3*mf	correcto	correcto
ξ_{obl}	4,39	
Aumento del grado de recubrimiento comparado con el engranaje recto	1,885846515	
b \geq 1.25 tf	funciona como engranaje helicoidal	

Pares de dientes que se encuentran en contacto.

ANEXO III: Cálculo de fuerzas.



ANEXO IV: Cálculo de resistencia a la Flexión.

Cálculo de comprobación de resistencia a esfuerzos de fractura en el pie del diente.		
V	10,68	utilizar ACERO ALEADO
criterio de carga	0,14	CARGA MEDIA
KA	2,25	
Kv	1,20	
ESQ	6,00	
k β	1,10959302325581	
x i	0,00	
Kh	1,00	
Yfi	2,22	
Y β	0,786	
σ_{fi}	116,06	
$\sigma_{f \text{ lim}}$ (N/mm ²)	800,00	
Nfb	4000000,00	
NFE	394838709,68	
Kfl	0,60	
Kfc	0,80	
Sf	2,00	
[σ_{fi}] (N/mm ²)	192,11	
$\sigma_{fi} \leq [\sigma_{fi}]$		RESISTE

ANEXO V: Cálculo de resistencia a contacto.

<i>Cálculo de comprobación de resistencia a esfuerzos de contacto superficial.</i>	
ZE (MPa)	275,00
Kv	1,20
KA	2,25
kβ	1,10959302325581
ZH	1,51
SH	1,50
σH	760,35
[σH]	920,00
KHL	1,00
σHlimb (Mpa)	1380,00
σH ≤ [σH]	RESISTE

ANEXO VI: Resumen para AutoCAD.

Resultados para AutoCAD		
	rueda 1	rueda 2
Z	20,00	100,00
β	33,15	
α_{cf}	23,50	
rp	71,67	358,33
ro	65,72	328,62
ri	64,17	350,83
re	77,67	364,33
rn	74,67	361,33
ρ	1,80	1,80
β_p grados	4,50	0,90
β_o grados	5,91	2,31
β_n grados	3,35	0,69
β_e grados	2,03	0,47
α giro del diente	31,73	6,68
Sp	11,26	11,26
Se	5,51	5,92
So	13,56	26,52
Sn	8,74	8,66

ANEXO VII: Fuerza aplicada al modelo.

Mt, Nmm	620074,08
F, N	76646,9815
F/nodo	305,36646
F/nodoX	298,836754
F/nodoY	62,8113802

