

**Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”**

**Facultad de Ingenierías**

**Departamento de Matemática**



**MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA**

**Título: Aplicación de las ecuaciones diferenciales en la modelación y resolución de problemas típicos de la carrera Ingeniería Industrial.**

**Autora:** Ing. Yanely Gil Martínez

**Tutor:** Dr.C. Reinaldo Hernández Camacho

**2011**

## **Dedicatoria**

Quiero dedicar esta tesis de maestría:

- A mi hija que es el tesoro máspreciado que poseo y al nuevo bebé que viene en camino.
- A mis padres por su ayuda incondicional.
- A mi esposo que es mi apoyo y mi vida misma.
- A mis mejores amigas por estar siempre compartiendo momentos conmigo.
- Y a toda mi familia.

## **Agradecimientos**

Son muchas las personas a quien quiero agradecer:

- A mi familia por apoyarme en todo.
- A mi tutor, no solo por enseñarme tantas cosas y guiarme en la realización de esta tesis, sino también por ser la extraordinaria persona que es.
- A todos mis compañeros de trabajo a quienes aprecio infinitamente y de los que aprendo cada día algo nuevo.
- A todos los que de una manera u otra me ayudaron en el desarrollo de esta investigación.

***Solo lo difícil es estimulante***

**Resumen**

Las características de la sociedad contemporánea exigen cada vez más la eficiencia en la formación de los nuevos profesionales, que apliquen los conocimientos recibidos en la solución de complejos problemas y que la didáctica y todo el proceso de enseñanza se adapte y opere de manera constante, de forma tal que el estudiante juegue el papel fundamental en la obtención del conocimiento y el desarrollo de las habilidades necesarias para su desempeño como ser humano y profesional.

La enseñanza de las matemáticas juega un papel decisivo en la formación ingenieril de un estudiante, motivo por el cual los docentes debemos considerar todas las alternativas posibles para enriquecer y mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma. Es por eso que la presente investigación se trazó como objetivo; a partir de la desmotivación que manifiestan los estudiantes de Ingeniería Industrial por el tema de las Ecuaciones diferenciales que se imparten en el segundo año de la carrera dentro de la asignatura Matemática III y la escasa vinculación del tema con situaciones problemáticas que se correspondan con sus intereses; la elaboración de una colección de problemas típicos de su perfil profesional en los que sea necesario aplicar las ecuaciones diferenciales para obtener su solución, basándose en las cuatro etapas propuestas por Polya para la resolución de problemas, en conjunto con una Sucesión de Indicaciones con Carácter Cuasialgorítmico y de una estructura de preguntas y respuestas para identificar la ecuación diferencial que se obtuvo de la formulación matemática del problema a resolver, las cuales contribuirán al desarrollo de habilidades en la modelación y resolución de problemas con características muy relacionadas con el entorno laboral de un Ingeniero Industrial.

## Índice

Introducción .....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
Capítulo 1. Fundamentos teóricos y metodológicos. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.1-Ideas, tendencias y creencias sobre la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática .....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.1.2-Diferentes enfoques de la definición de problemas. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.1.3 –Enfoques metodológicos sobre la teoría de la resolución de problemas. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.1.4. La heurística en la resolución de problemas. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.2-La resolución de problemas en la Educación Superior. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.2.1-La aplicación de las ecuaciones diferenciales en la resolución de problemas. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.2.2 ¿Cuáles son algunas barreras que han limitado el proceso de resolución de problemas en la comunidad estudiantil? .....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.3. Elementos sobre el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.4. Los ingenieros, la modelación y la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
Conclusiones .....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
Capítulo 2. Elaboración de una colección de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial que se modelan y resuelven a través de las ecuaciones diferenciales. ...	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
2.1-Las ecuaciones diferenciales a través de la resolución de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
2.2-Problemas resueltos mediante la ejemplificación y utilización de la SICA para modelar y resolver problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
2.3-Valoración del proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones en cursos anteriores....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
2.4 Criterio de Expertos. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
Conclusiones Parciales.....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
Conclusiones de la investigación.....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>

Recomendaciones.....**¡Error! Marcador no definido.**  
Bibliografía.....**¡Error! Marcador no definido.**  
Anexos.....**¡Error! Marcador no definido.**

## **Introducción**

Durante las últimas cuatro décadas Cuba ha realizado un esfuerzo significativo en el desarrollo de la educación, la ciencia y la tecnología. Sus indicadores en estos campos, sobre todo en la educación, de acuerdo al volumen de su población y monto de recursos disponibles, son de los más altos en América Latina. Esto evidencia que en nuestro país se incrementan continuamente las perspectivas y desarrollo de los nuevos profesionales egresados de la Educación Superior, dentro de los cuales los ingenieros Industriales son un eslabón importante en la cadena de desarrollo en la cual nos encontramos inmersos.

Los cambios y transformaciones de los nuevos escenarios nacionales e internacionales que se van produciendo, exigirán que los nuevos profesionales que se van formando en el ámbito industrial y económico, respondan a estas expectativas; y a partir del análisis de las condiciones actuales y futuras en el país y una profunda investigación sobre las tendencias en los planes de estudio de Ingeniería Industrial a nivel internacional, se introduce el Plan D como una alternativa para cubrir dichos requerimientos, por lo que estamos en presencia de la formación de profesionales, cuya función es la de analizar, diseñar, operar, mejorar y dirigir procesos de producción y servicios con el objetivo de lograr eficiencia, eficacia y competitividad; mediante el análisis de las relaciones que se presentan entre los recursos humanos, financieros, materiales, energéticos, equipamiento, información y ambiente con un enfoque integrador y humanista, donde prevalecen criterios que sustentan los altos intereses del país. Para ello se valen de las ciencias matemáticas entre otras; de conjunto con los conocimientos especializados, los principios y métodos de diseño y análisis donde se desarrollan los fundamentos de la formación de un especialista en Ingeniería Industrial, dado que todo ingeniero debe desarrollar representaciones técnicas y científicas, en términos matemáticos, con los cuales reflejan los rasgos cuantitativos de los fenómenos que estudia (Plan D, carrera de Ingeniería Industrial, 2009). De tal modo, que se logre que el ingeniero industrial domine el aparato matemático, capacitándolos de la habilidad de modelar y analizar los procesos técnicos, económicos, productivos y científicos, utilizando para ello, tanto métodos analíticos como aproximados, comprensión de las relaciones entre los

modelos matemáticos, los conceptos y resultados de la ciencia matemática y la realidad material existente objetivamente.

La educación superior debe, pues, favorecer el aprendizaje que contribuya a que el estudiante esté entrenado en función de buscar respuestas a los nuevos problemas que se plantean constante y rápidamente, lo cual está determinado por el ritmo en que recibimos la información y que un problema sea reemplazado inmediatamente por otro. Además, la educación sería un esfuerzo inútil de no ser por el hecho, de que el hombre pueda aplicar, para resolver numerosas situaciones, lo asimilado concretamente.

Aplicación y resolución de problemas son dos términos a tener muy en cuenta para el desarrollo y la labor preferencial de un estudiante universitario cubano.

Hasta el presente curso (2011-2012), en el segundo año de la carrera de Ingeniería Industrial en la Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”, en el cual se imparte la asignatura Matemática III, que entre sus temas aborda el estudio de las ecuaciones diferenciales; no cuentan con la bibliografía adecuada para enfocar el proceso de enseñanza de las ecuaciones diferenciales a través de la modelación y resolución de problemas típicos de su perfil, porque los textos básicos y complementarios de la asignatura abordan esta temática de forma general, es decir, no cuenta con problemas específicos donde se muestre claramente la utilidad e importancia de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en la resolución de problemas, que contribuyan a elevar su desarrollo profesional desde una perspectiva más a fin a su ámbito laboral y que se relacione con los objetivos propuestos para la carrera, entre los cuales cabe destacar la formación de un sistema de conocimientos y habilidades de carácter profesional y científico-técnico, así como la habilidad de aplicar los mismos de manera independiente y creadora, mediante la utilización de modelos y herramientas matemáticas.

Es un hecho que no se debe aceptar como lógico e inevitable que un considerable número de estudiantes universitarios presenten dificultades en la modelación y resolución de problemas que requieren de la aplicación de ecuaciones diferenciales y que la falta de motivación y las dificultades conceptuales sea un obstáculo para ellos. Por este motivo debemos preguntarnos si es suficiente el tiempo y la información que se maneja y transmite cuando se abordan problemas de este tipo, pues ante esta situación resulta interesante reflexionar en la búsqueda de una solución.

En este contexto se ubica el presente trabajo investigativo, en interés de proporcionar a los estudiantes de la carrera de Ingeniería Industrial, a través de la modelación y resolución de problemas aplicando las ecuaciones diferenciales desde su ámbito profesional, un mayor desarrollo de sus habilidades, para lograr un desempeño social y profesional más eficiente.

**Situación Problemática:** Dentro de las asignaturas que se imparten en la carrera de Ingeniería Industrial se encuentra la Matemática III, que contiene entre sus temas de estudio las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, sin embargo los estudiantes no tienen habilidades en la modelación y resolución de problemas típicos de su perfil, donde sea necesario, para obtener sus soluciones, la aplicación de las ecuaciones diferenciales.

**Problema Científico:** ¿Cómo contribuir a desarrollar las habilidades de los estudiantes de la carrera Ingeniería Industrial de la Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos, para modelar y resolver problemas típicos de su perfil, que requieren la aplicación de ecuaciones diferenciales?

**Objetivo General:** Incrementar el desarrollo de habilidades de los estudiantes de la carrera de Ingeniería Industrial de la Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos, para modelar y resolver problemas típicos de su perfil profesional, en los que sea necesario aplicar las ecuaciones diferenciales.

**Objeto de estudio:** Proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en la carrera Ingeniería Industrial.

El **campo de acción** de esta investigación se enmarca en el desarrollo de habilidades para modelar y resolver problemas aplicando las ecuaciones diferenciales, desde el ámbito profesional del Ingeniero Industrial.

**Preguntas Científicas:**

1. ¿Qué referentes teóricos y metodológicos se deben considerar en el proceso de enseñanza-aprendizaje para contribuir a la aplicación de las ecuaciones

diferenciales en la modelación y resolución de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial de la Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”?

2. ¿Qué opinan, los estudiantes de Ingeniería Industrial de la Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”, de la importancia y aplicación de las ecuaciones diferenciales para su formación profesional?
3. ¿Qué relación se establece entre las ecuaciones diferenciales y los modos de actuación del Ingeniero Industrial?
4. ¿Qué aspectos teóricos y prácticos se deben contemplar, para contribuir a desarrollar habilidades en la modelación y resolución de problemas que requieran la aplicación de las ecuaciones diferenciales, a partir de la conformación de una colección de problemas que se correspondan con el ámbito profesional del Ingeniero Industrial?
5. ¿Cuál sería la valoración por parte de los expertos, sobre la colección de problemas típicos vinculados con el perfil del Ingeniero Industrial, para desarrollar habilidades en la resolución y modelación de problemas que requieran la aplicación de las ecuaciones diferenciales?

Para lograr el objetivo general y dar respuesta a las preguntas científicas se derivan las siguientes tareas de investigación:

- Determinación de los fundamentos teóricos y metodológicos, que sustentan el proceso de enseñanza-aprendizaje para contribuir a la aplicación de las ecuaciones diferenciales en la modelación y resolución de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial en la Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”.
- Valoración de la opinión de los estudiantes de Ingeniería Industrial de la Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”, de la importancia y aplicación de las ecuaciones diferenciales para su formación profesional.
- Determinación de las relaciones que se establecen entre las ecuaciones diferenciales y los modos de actuación del Ingeniero Industrial.
- Conformación de una colección de problemas que se correspondan con situaciones reales de la esfera profesional del Ingeniero Industrial y que sean resueltos con el apoyo de una SICA (Sucesión de Indicaciones con Carácter Cuasi-Algorítmico), a través de la aplicación de las ecuaciones diferenciales.

- Valoración de los expertos sobre la colección de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial, para contribuir a desarrollar habilidades en la modelación y resolución de problemas aplicando las ecuaciones diferenciales.

La significación práctica de este trabajo se manifiesta a través de la elaboración, de una colección de problemas para contribuir al desarrollo de habilidades, en los estudiantes de segundo año de la carrera Ingeniería Industrial, para modelar y resolver problemas típicos de su perfil, donde sea necesario la aplicación de las ecuaciones diferenciales para obtener su solución.

Con la realización de este trabajo investigativo se logra:

- Potenciar el desarrollo de habilidades en la modelación y resolución de problemas que requieren la aplicación de las ecuaciones diferenciales, a partir del estudio de su base teórica y práctica.
- Favorecer la motivación por el estudio de las matemáticas y evidenciar la aplicación de las ecuaciones diferenciales en resolución de problemas vinculados con el perfil profesional del Ingeniero Industrial.
- Enriquecer la bibliografía de la asignatura Matemática III para favorecer la ejecución de las acciones que estructuran la habilidad de modelar y resolver problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial aplicando las ecuaciones diferenciales.
- Demostrar la importancia del estudio de las ecuaciones diferenciales para resolver situaciones problemáticas relacionadas con los modos de actuación del Ingeniero Industrial.

Se declara como **población** a los 164 estudiantes que han recibido, dentro de la asignatura Matemática III, el tema de las ecuaciones diferenciales en la carrera de Ingeniería Industrial de la Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos” o sea del tercero al quinto año (Curso 2011-2012). La selección de la **muestra** se hace a partir de un muestreo estratificado, siendo de 62 estudiantes.

Con el fin de verificar el cumplimiento del objetivo propuesto y en correspondencia con las tareas de investigación se utilizaron en la investigación como métodos teóricos fundamentales: el análisis y la síntesis; que propiciaron la sistematización de la información sobre el tema y de los diferentes criterios al respecto; la inducción y

deducción; que permitieron el estudio de elementos particulares para lograr la elaboración de conclusiones generales y viceversa, durante el proceso de estructuración de un conjunto de problemas; el histórico-lógico para conocer las tendencias nacionales e internacionales relacionadas con el tema de investigación. Además algunos métodos empíricos como: entrevistas y encuestas que son de gran utilidad en el estudio de la información, el análisis documental para realizar un estudio profundo de la literatura especializada en el tema que nos ocupa, el criterio de los expertos para conocer la opinión de profesores experimentados sobre la conformación de la colección de problemas típicos de la carrera de Ingeniería Industrial para contribuir a desarrollar habilidades en la modelación y resolución de problemas que requieran la aplicación de las ecuaciones diferenciales.

Además de esta introducción, la tesis consta de dos capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y un conjunto de anexos que ilustran y complementan el trabajo investigativo. En el capítulo 1, se aborda la fundamentación teórico-metodológica del problema de investigación, en el capítulo 2 se propone una ejemplificación de la utilización de la SICA (Sucesión de Indicaciones con Carácter Cuasi-Algorítmico) para la modelación y resolución de problemas relacionados con los modos de actuación del Ingeniero Industrial y que requieran la aplicación de las ecuaciones diferenciales, además de la valoración por parte de los expertos del Departamento de Matemática e Industrial sobre la colección de problemas que se propone.

## **Capítulo 1. Fundamentos teóricos y metodológicos.**

Este capítulo tiene como objetivo exponer y valorar el marco teórico conceptual en la temática de las habilidades en la modelación y resolución de problemas que requieran de la aplicación de las ecuaciones diferenciales con características especiales para los estudiantes que cursan la carrera de Ingeniería Industrial. Los temas que se consideran fundamentalmente son:

- Las principales creencias y tendencias sobre la resolución de problemas y su importancia dentro de la enseñanza de las Matemática en el nivel superior, para elevar la eficiencia en la formación de un estudiante de ciencias técnicas.
- La resolución de problemas dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, el concepto de problema, habilidades en su resolución y principales dificultades que se presentan en los estudiantes, conjuntamente con los métodos heurísticos y los procedimientos metodológicos para obtener su solución.
- Las principales características de las ecuaciones diferenciales dentro del proceso de modelación y resolución de problemas en correspondencia con las funciones elementales que deben integrarse en un Ingeniero Industrial.

### **1.1-Ideas, tendencias y creencias sobre la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática.**

La formación matemática del hombre contemporáneo es parte integrante de su personalidad y este es el propósito fundamental de la enseñanza de la Matemática y en especial en Cuba, al concebir el aprendizaje de la Matemática a partir de la concepción vigotskiana de la personalidad, en su unidad de lo histórico y lo social (Tarifa, L. 2005).

La enseñanza en el nivel superior debe concebir el aprendizaje de las matemáticas a partir de la resolución de problemas, enfocada en la formación de los estudiantes como ingenieros, que cursan específicamente carreras de ciencias técnicas, sobre los cuales está dirigida esta investigación, porque es a partir de la resolución de problemas que los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que los rodea.

Pero hay que ser cuidadosos para no convertir la resolución de problemas en un ejercicio rutinario que no estimule la iniciativa o que le impida al estudiante desarrollar

su creatividad y fortalecer su independencia para utilizar los conocimientos adquiridos en el momento de representar y discutir situaciones de la vida real.

Estas razones justifican la utilidad y aplicación de la resolución de problemas, mediante la cual los estudiantes aprenden a razonar a partir de datos numéricos, gráficos y situaciones que incluyan la formulación de suposiciones, la motivación por el nuevo conocimiento a adquirir y la interrelación con otras áreas del saber; por lo que sería justo decir que la resolución de problemas es el corazón de las Matemáticas, esta frase mencionada por Polya y con la cual la autora se encuentra completamente identificada desde su enfoque pedagógico, resalta y enaltece la importancia del estudio de las matemáticas para la formación de un futuro profesional, porque la resolución de problemas es el eje central, no solo de las matemáticas, sino también de otras asignaturas que se imparten en carreras de ciencias técnicas, como la Ingeniería Industrial.

La resolución de problemas favorece las capacidades básicas de la inteligencia y del enfrentamiento con problemas adecuados pueden resultar motivaciones, actitudes, e ideas para el desarrollo de herramientas, en pocas palabras, la vida propia de las Matemáticas, siempre y cuando estos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el estudiante estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones; porque de lo contrario cual sería el sentido de hacer un espacio en la mente de los estudiantes para unos cuantos teoremas y propiedades, que posteriormente no tendrían ninguna utilidad. (Nieto, S, José H., 2007).

Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas y estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas. (Santaló (1985)). La resolución de problemas les proporciona a los estudiantes la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para resolver problemas matemáticos y no matemáticos. Lo antes planteado por Santaló está en total correspondencia con lo que expresó Polya sobre los textos de matemáticas y las múltiples y bien justificadas razones para que los mismos contengan en su estructura, problemas matemáticos que constituyen un elemento esencial en la educación matemática y en la formación profesional de los estudiantes.

La resolución de problemas no solo contribuye a mostrar la objetividad y posibilidad práctica de las matemáticas porque además prepara a los estudiantes para enfrentarse a la vida con decisión, firmeza y perseverancia, para lo cual se requiere lograr efectividad en su enseñanza y aprendizaje a partir de un proceso dirigido al pensamiento de la población estudiantil que conduzca y favorezca la resolución de problemas. Por tanto el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel de enseñanza no debería ser otro que el de la resolución de problemas. La autora considera que, aceptar la resolución de problemas como un elemento vital en el aprendizaje de la Matemática, implica la necesidad de que se tenga una idea clara de lo que se entiende por problemas. Pero, como la palabra "problema" se usa en contextos diferentes y con matices diversos, haremos un esfuerzo por clarificar a qué nos referimos.

### **1.1.2-Diferentes enfoques de la definición de problemas.**

Del término problema han surgido diferentes enfoques y apreciaciones por la importancia tan valiosa que tienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, pues los mismos demuestran la utilidad de las reglas y conceptos matemáticos y contribuyen al desarrollo de habilidades de los estudiantes.

Definir el término "problema" es muy complejo sobre todo por la diversidad de ángulos empleados para abordarlo y por las disímiles concepciones expuestas por científicos que han profundizado en el tema, las mismas se analizarán a continuación con el objetivo de sintetizar algunos aspectos que deben caracterizar a un verdadero problema.

El pionero en la investigación sobre el tema fue el reconocido científico matemático G. Polya que en 1962 definió problema como: *la búsqueda consciente, con alguna acción propia, para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar.* (Santos Trigo, 1994, p.29)

En la década de los 80 se plantearon otras definiciones dentro de las que resalta la mencionada por Luria en 1981, que plantea que problema *es una pregunta a la que es imposible dar respuesta. Esta pregunta determina toda la actividad posterior del sujeto dándole un carácter selectivo,* (Santos Trigo, 1994, p.29) más tarde en 1985 Schoenfeld planteó *que es una tarea difícil para el individuo que está tratando de resolverla*

(Schoenfeld, 1985, Pág.17) y en 1987 Barrios lo propone como *una tarea cuyo método de realización y resultado son desconocidos, pero poseyendo los conocimientos y habilidades necesarios, se está en condiciones de acometer la búsqueda de los resultados o del método que se ha de aplicar.*(Santos Trigo, 1994, p.29)

Esta última en opinión de la autora tiene un significado particular, muy vinculado a la aplicación de los métodos heurísticos y al desarrollo de un grupo de habilidades, porque para resolver un problema se aplican conocimientos previos a situaciones nuevas o poco conocidas donde es importante saber, para facilitar la resolución del problema, los procedimientos y métodos que se pueden emplear según sus características.

Con el transcurso de los años fueron apareciendo otras definiciones, que incluyeron elementos importantes para mejorar y esclarecer en alguna medida el concepto de problema, como por ejemplo cuando Ballester en 1992 planteó que se trataba de *“un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de la ciencia o la práctica, en lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución. Se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos.”* (Ballester, 1992, p.407) y Campistrous en 1996 lo define como *“toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo, (Campistrous, 1996, p.20)*, en ambos casos se tiene muy en cuenta la actividad transformadora que se debe realizar para llegar a la solución del problema.

En la definición dada por Alonso en 2001, la estructura del problema y el tipo de información que brinda, que son elementos muy útiles a los efectos de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas, están explícitos en la composición del mismo, lo que facilita su comprensión desde el procesamiento de la información que este brinda, así como su representación y la solución por parte de los estudiantes.

El análisis de estas definiciones permitió precisar varios elementos que son importantes a juicio de la autora para establecer una nueva definición de problema, dentro de las que se destacan, la existencia de una dificultad que no tiene solución inmediata, la ausencia de un camino, que en ocasiones pueden ser varios, los cuales no están enseñados o codificados previamente, la presencia del interés por resolver la dificultad

que nos provoque las ganas de resolverlo y que estemos dispuestos a dedicarle tiempo y esfuerzo para que una vez resuelto nos haga sentir una sensación de placer, incluso sin haber llegado a la solución.

Por tanto pudiéramos decir que un problema es una situación que requiere transformación, donde se apliquen todo tipo de conocimiento matemático o no matemático y que despierte el interés de la persona que está resolviéndolo.

Sin embargo en muchas ocasiones se emplea el término problema para designar cualquier tipo de tarea que se plantea al estudiante sin tener en cuenta que no toda tarea constituye un problema, porque no cumple con los requisitos que desde el punto de vista del estudiante, y sobre todo de la actividad cognoscitiva que requiera ante ellos, reúne un verdadero problema.

Los problemas deben responder en lo posible a las necesidades de los estudiantes, y los elementos contenidos en los mismos deben estar en estrecha relación con el círculo de ideas, experiencias y conocimientos de esos estudiantes, aún cuando muchas veces esos elementos están dispersos y no siempre son de matemáticas.(Mazarío Triana, Israel, 2005).

### **1.1.3 –Diferentes enfoques metodológicos sobre la teoría de la resolución de problemas.**

Es importante conocer los métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. El conocimiento y la práctica de los mismos es justamente el objeto de la resolución de problemas y hace que sea una facultad entrenable, un apartado en el que se puede mejorar con la práctica. Pero para ello hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada. (González González, M. (2006).

En este aspecto y con mucho éxito se encuentran las investigaciones realizadas por Polya sobre la resolución de problemas, que estuvo basada fundamentalmente en entender el proceso para hallar la solución del mismo, en particular las operaciones mentales que son útiles para el mismo, tomando tanto aspectos de índole lógico como de orden psicológico a partir de la experiencia de resolver problemas y en ver como otros lo hacían, es decir, a través de la observación particular, comentarios sobre estrategias heurísticas y múltiples ejemplos. A pesar de que sus estudios no fueron

sistemáticos ni teóricos, propuso reglas lógicas y generalizadas que guían la solución del problema y que constituyeron el punto de arranque de todos los estudios posteriores. Por su significación en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la resolución de problemas enunciaremos el método de solución general que propuso y que cuenta de cuatro pasos:

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA.** Parece, a veces, innecesaria, sobre todo en contextos escolares; pero es de una importancia capital, sobre todo cuando los problemas a resolver no son de formulación estrictamente matemática; es más, es la tarea más difícil.

- Se debe leer el enunciado despacio.
- ¿Cuáles son los datos? (lo que conocemos)
- ¿Cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos)
- Hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.
- Si se puede, se debe hacer un esquema o dibujo de la situación.

2. **TRAZAR UN PLAN PARA RESOLVERLO.** Hay que plantearlo de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo.

- ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?
- ¿Se puede plantear el problema de otra forma?
- Imaginar un problema parecido pero más sencillo.
- Suponer que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?
- ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?

3. **PONER EN PRÁCTICA EL PLAN.** También hay que plantearlo de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo. Y tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica.

- Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.
- ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?
- Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto?
- Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.

- Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

4. COMPROBAR LOS RESULTADOS. Es el más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con el contexto del resultado obtenido, por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.

- Debemos fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible?

- ¿Se puede comprobar la solución?

- ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?

- ¿Se puede hallar alguna otra solución?

- Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.

- Se debe utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas (Breña, Luis y Timana, 2003, Pág. 56).

Hay que pensar que no basta con conocer técnicas de resolución de problemas: se pueden conocer muchos métodos pero no cuál aplicar en un caso concreto. Por tanto hay que enseñar también a los estudiantes a utilizar los instrumentos que conozca, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo, que es donde se sitúa la diferencia entre quienes resuelven bien problemas y los demás, porque es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación.

Dentro de las líneas de desarrollo de las ideas de Polya, Schoenfeld, A. 1985, planteó una lista de técnicas heurísticas de uso frecuente, que se agrupan en tres fases, y que se extractan de la siguiente forma:

#### ANÁLISIS.

1. Trazar un diagrama.
2. Examinar casos particulares.
3. Probar a simplificar el problema.

#### EXPLORACIÓN.

1. Examinar problemas esencialmente equivalentes.

2. Examinar problemas ligeramente modificados.
3. Examinar problemas ampliamente modificados.

#### COMPROBACIÓN DE LA SOLUCIÓN OBTENIDA.

1. ¿Verifica la solución de los criterios específicos siguientes?:

- a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
- b) ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
- c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?

2. ¿Verifica la solución de los criterios generales siguientes?:

- a) ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
- b) ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
- c) ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
- d) ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

A continuación se proponen un conjunto de estrategias que según S. Fernández en 1992 se suelen utilizar en la resolución de problemas.

- Ensayo-error.
- Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo.
- Manipular y experimentar manualmente.
- Descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar).
- Experimentar y extraer pautas (inducir).
- Resolver problemas análogos (analogía).
- Seguir un método (organización).
- Hacer esquemas, tablas, dibujos (representación).
- Hacer recuento (conteo).
- Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico (codificar, expresión, comunicación).
- Cambio de estados.
- Sacar partido de la simetría.
- Deducir y sacar conclusiones.
- Conjeturar.
- Principio del palomar.
- Analizar los casos límite.

- Reformular el problema.
- Suponer que no (reducción al absurdo).
- Empezar por el final (dar el problema por resuelto).

Existen dos aspectos que se deben considerar en el momento de resolver un problema. El primero es; analizar el contexto en el que se sitúa el problema, que por parte de los profesores se tienden a considerar como irrelevante o al menos como poco significativo, pero tiene una gran importancia, tanto para determinar el éxito o fracaso en la resolución de los mismos, como para incidir en el futuro de la relación entre las matemáticas y los estudiantes. El segundo es, que la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas; es muy bueno conocer técnicas y procedimientos, pero vistos en acción, no sólo a nivel teórico, porque si no, es un conocimiento vacío, que más que reconocer y brindar métodos y estrategias en la resolución de problemas, debemos desarrollar el pensamiento de los estudiantes, tanto lógico como algorítmico y la modelación matemática, aunque cada una de estas variantes de enfocar el proceso de resolución de problemas facilita el estudio de los mismos y la forma de concebir y organizar el aprendizaje de los estudiantes. (Echeverría García, Luiska , 2009).

#### **1.1.4. La heurística en la resolución de problemas.**

La teoría matemática de la resolución de problemas tiene situado en un lugar principal el papel de la heurística, un concepto que desde finales de los años setenta ha estado presente en la enseñanza de las Matemáticas y el cual se utiliza para referirse al estudio de los medios, principios, reglas y estrategias que pueden ser utilizadas en la resolución de problemas, es decir, la heurística trata de métodos o algoritmos exploratorios durante la resolución de problemas, en los cuales las soluciones se descubren por la evaluación del progreso logrado en la búsqueda de un resultado final. Los estudios han concluido que a pesar de que la heurística se usa para capacitar a los estudiantes sobre la forma de planificar la solución de problemas, el pensar en voz alta, la interacción entre compañeros jugando el papel del profesor y la interacción directa para desarrollar en los estudiantes la habilidad para resolver problemas a partir de una extensa base de conocimientos de información, de dominio específico y de una cantidad

suficiente de algoritmo y repertorio de heurísticas, no es suficiente durante el proceso de resolución de problemas.

Para resolver un problema matemático es importante tener un buen dominio del contenido específico, tanto matemático como extramatemático, que esté relacionado con el problema a resolver. Esto facilita la selección adecuada del contenido matemático a emplear. (Hernández, R. 2001). Esta contradicción es manifestada a través de las palabras de Polya cuando plantea que, si tomas una solución heurística como certeza, podrás equivocarte y sentirte engañado, pero si rechazas totalmente las conclusiones heurísticas, no habrá ningún progreso. (Breña, y Timana, 2003, Pág. 26).

La heurística es de gran utilidad para resolver problemas matemáticos pues sirven de guía y representan orientaciones y sugerencias generales para la búsqueda de soluciones de los mismos. Su importancia es mayor en la medida en que el problema a resolver sea más novedoso para la persona que intenta resolverlo y mientras menos ideas preliminares ésta tenga del contenido matemático específico que requiere utilizar en la modelación del problema, sin embargo no se puede considerar como un elemento determinante para la resolución de problemas, sino como una herramienta de apoyo indispensable.

Todo este proceso se organiza a través de una serie de instrucciones generales, que permiten guiar a las personas que están tratando de resolver un problema, y las cuales se denominan elementos heurísticos. Estos se clasifican en medios auxiliares, procedimientos, reglas y estrategias heurísticas. (J. J. Merel., 2002)

Los medios auxiliares lo componen las figuras auxiliares ilustrativas o de análisis, las tablas para reflejar relaciones entre datos y los gráficos de solución, resúmenes de definiciones, teoremas, propiedades etc.; los procedimientos heurísticos están determinados por los principios, entre los que se destacan la analogía, la inducción, la generalización y la reducción en sus diferentes variantes y las reglas y estrategias heurísticas, que representan los impulsos que provoca el profesor en los estudiantes mediante observaciones, preguntas y recomendaciones, que ayudan a éstos a orientarse en la búsqueda de la solución del problema. (Hernández Camacho, Reinaldo, 2010).

El entrenamiento adecuado en el uso de estos elementos, permite incrementar las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas pero es indispensable que la persona que intenta resolverlo esté preparada para hacerlo, que conozca las operaciones o procedimientos necesarios para resolver el problema, y más aún, que esté interesada en obtener la solución porque el componente emocional es de vital importancia por lo que la autora coincide con Polya cuando dice: debe concentrarse en el problema y desear ansiosamente su solución. Si no puede hacer nacer el deseo real de resolverlo, más vale abandonarlo. El secreto del éxito real radica en entregarse al problema en cuerpo y alma.” (G. Polya, 1986, p.57).

Ahora bien, por mucho conocimiento que se tenga acerca de los elementos heurísticos, si no se conocen los contenidos matemáticos específicos relacionados con el contexto del problema, en particular con los conceptos que deben ser aplicados y las relaciones entre ellos, son prácticamente inexistentes las posibilidades de resolver un problema porque el éxito de utilizar los elementos heurísticos está dado precisamente en el hecho de aplicarlo a problemas que estén vinculados con los contenidos específicos que el estudiante conozca.

De forma general la heurística ha logrado muchas acepciones tales como el autodescubrimiento dado en el proceso de solución de problemas; la capacidad para plantear (producir, generar) problemas (científicos, tecnológicos, sociales...) y/o la capacidad para orientar la resolución de problemas; el arte de inventar; y las clases de información disponible para los estudiantes en la toma de decisiones durante la resolución de problemas. Es por eso que la teoría matemática de solución de problemas tiene situado en un lugar principal el papel de la heurística.

## **1.2-La resolución de problemas en la Educación Superior.**

La enseñanza a través de la resolución de problemas nos brinda la posibilidad de proporcionar a nuestros estudiantes la capacidad autóctona para resolver sus propios problemas de forma tal que el aprendizaje se haga atractivo, autorrealizado y creativo para que mucho de los hábitos que así se consolidan tengan un valor universal y no limitado al mundo de las matemáticas. (Horruitiner Silva P, 2006)

En la Educación Superior, cada disciplina aborda las cuestiones sobre el tema de la resolución de problemas desde su propia perspectiva pero siguiendo un mismo

objetivo, dotar a los estudiantes con forma de pensamiento eficaces. Es por eso que los profesores deben estructurar los contenidos de forma que se logre una enseñanza más efectiva, así como descubrir los obstáculos que impidan nuestro objetivo en el contexto escolar.

La enseñanza y aprendizaje mediante la resolución de problemas, pone el énfasis en los procesos del pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas del pensamiento eficaces. (Martín Juan A; Gómez Ángel; Gómez Carlos, 2003)

Para aprender eficazmente el estudiante debe descubrir de manera personal gran parte del material que se enseña y dado que aprenderá con su propio esfuerzo, debemos familiarizarlo con la forma de su entorno concreto, luego con lo abstracto y después con la experiencia acumulada, este proceso se manifiesta en el contexto de las Matemáticas. Se desarrolla primeramente con la solución de problemas cotidianos que conducen a problemas matemáticos simples, para luego pasar a la abstracción entre los problemas cotidianos y los matemáticos, esto lo puede conseguir el estudiante de manera factible y natural con la dirección del personal docente. Así como los problemas de todos los días son el centro del pensamiento diario, debe lograrse que los problemas matemáticos sean el centro de la enseñanza matemática, que es vital para los estudiantes que cursan carreras de ciencias técnicas como Ingeniería Industrial.

Con el espíritu de la resolución de problemas se deben presentar cada tema matemático organizado de la siguiente forma:

- Proponer una situación problémica de donde surja el tema de estudio (basada en la historia, aplicaciones, modelos etc.).
- La manipulación autónoma de los estudiantes.
- Familiarización con la situación y sus dificultades.
- Elaboración de estrategias posibles.
- Ensayos diversos por los estudiantes.
- Herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados).
- Elección de estrategias.

- Ataque y resolución del problema.
- Recorrido crítico (reflexión sobre el proceso).
- Generalización.
- Nuevos problemas.
- Posible transformación de resultados, de métodos, de ideas etc.

Este procedimiento debe ser seguido en todas las clases de matemática porque estimula el estudio del tema que se aborda, hace que la actividad sea más novedosa, creativa y dinámica para los estudiantes de forma tal que el profesor coloque al estudiante en situación de participar y alimente el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos lograron con tanto esfuerzo, porque como bien dijo Polya en 1945, solo los grandes descubrimientos permiten resolver los grandes problemas, y hay en la solución de cada problema, un poco de descubrimiento.(Polya, 1945, Pág. 63 )

Además la resolución de problemas es un contenido matemático que contribuye a la formación intelectual y científica de los estudiantes porque la ciencia es esencia una actividad de resolución de problemas (Delgado, Adriana ,2010)

### **1.2.1-Características de la aplicación de las ecuaciones diferenciales en la resolución de problemas.**

El estudio de las ecuaciones diferenciales es un tema fundamental para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Superior, específicamente para las carreras de ciencias técnicas, debido a que muchos problemas se representan a través de leyes y relaciones físicas por este tipo de ecuaciones que constituyen los modelos apropiados para muchos experimentos de la vida y fenómenos de la naturaleza. (Zill, Dennis ,2006) Su objetivo principal está basado precisamente en su definición que plantea que si tenemos una función, su derivada representa la variación o ritmo de cambio de la variable dependiente respecto a la independiente. De esta manera puede intuirse que en muchos fenómenos de la naturaleza se ven relacionadas las diversas variables involucradas en el proceso con su ritmo de variación lo cual nos lleva a relacionar las funciones con sus derivadas lo que permite el estudio de los cambios en multitud de aspectos de la ciencia y de la técnica.

Las ecuaciones diferenciales son consideradas una herramienta matemática básica para resolver problemas por la infinidad de aplicaciones que poseen y para utilizarla con éxito el estudiante debe ser capaz de reconocer, clasificar, aplicar y analizar a un nivel básico, ecuaciones diferenciales ordinarias, así como proponer estrategias y los métodos para su solución, debe tener una idea acerca del lugar especial que tienen las ecuaciones diferenciales, y de problemas que se plantean en términos de aquellas, tener los conocimientos necesarios para ubicarlos en su contexto teórico, estimar su grado de complejidad y dominar algunos métodos para su tratamiento.

Los estudiantes deben adquirir las habilidades necesarias para relacionar las ecuaciones diferenciales con problemas reales y de esta forma fortalecer las bases matemáticas para comprender la conexión de los conocimientos teóricos adquiridos, con problemas que requieran una aplicación práctica.

Cuando el estudiante se enfrenta a un problema de aplicación en el que tenga que utilizar las ecuaciones diferenciales, un problema en el cual las matemáticas se aplican en otros campos, debe procesar la información hasta obtener el modelo matemático, a la deducción de las Ecuaciones Diferenciales a partir de situaciones físicas que se presentan en determinados problemas de carácter físico y/o técnico, a esta transición del problema, al Modelo Matemático correspondiente se llama Modelado (Sonia B. Concari, 2010).

La modelación matemática es una etapa compleja dentro de la resolución de un problema, debido a la variedad ilimitada de problemas de aplicación, particularmente aquellos cuyo modelado resulte en una ecuación diferencial, y la carencia de un grupo de reglas específicas que ayuden a obtener su solución.

Los problemas con estas características suelen ser muy difíciles para los estudiantes, pues requieren de un mayor esfuerzo, creatividad y habilidad para ordenar y transformar la información que brinda cada problema y consecuentemente con el modelo obtenido, el estudiante debe ser capaz de generar su propia estrategia de trabajo, transitando del conocimiento general al de casos particulares.

Para la resolución de problemas de aplicación que tienen estrecha relación con la ingeniería, hay que tener en cuenta tres fases básicas para su desarrollo:

-El modelo: traslación de la información dada a una forma matemática. De esta manera se obtiene un modelo matemático de la situación planteada, que puede resultar dependiendo del problema en una ecuación diferencial.

-Resolución: Tratamiento del modelo.

-Interpretación: Interpretación del resultado. (Concari, Sonia B. 2010).

El procedimiento anterior describe de forma general, los elementos que intervienen en la resolución de un problema de aplicación y que apoyan a este proceso aunque no de manera profunda.

Por tanto la autora opina que se debe considerar la resolución de problemas donde se apliquen las ecuaciones diferenciales, como algo más que una herramienta matemática que se ilustra mediante ejemplos típicos; es decir, plantearlo como un tipo de problema matemático que consiste en buscar la función que cumpla una determinada ecuación diferencial.

### **1.2.2 ¿Cuáles son algunas barreras que han limitado el proceso de resolución de problemas en la comunidad estudiantil?**

Las dificultades que tienen los estudiantes en el abordaje y resolución de problemas es una de las problemáticas principales que confronta la enseñanza de las matemáticas en nuestros días, por lo que resulta interesante analizar y describir algunos aspectos que frecuentemente han limitado el proceso dentro de la comunidad estudiantil, los cuales constituyen una cadena de obstáculos, entre los que se encuentran como fuerte eslabón, la falta de motivación, por el hecho de que en el aula no se plantean problemas vinculados con situaciones prácticas relacionadas con el entorno individual y colectivo de los estudiantes, por lo regular se proponen solamente los ejercicios del libro de texto, con lo cual no se crea un clima favorable para motivarlos a partir de sus propias vivencias y experiencias.

La resolución de problemas debe estimularse a través de la vinculación de los estudiantes con la realidad objetiva, con la vida práctica y cotidiana, logrando la motivación en la clase para los problemas que se van a resolver y de esta forma favorecer el aprovechamiento de los conocimientos previos y lograr la activa participación de los estudiantes en el proceso de solución. (Echeverría García, Luiska, 2009).

Otro eslabón de esta cadena que contribuye a elevar el fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas, ha sido la falta de valoración y atención adecuada de los niveles de dificultad, lo cual ha limitado el uso de la analogía y el establecimiento de relaciones entre problemas ya resueltos, así como importantes reglas heurísticas en la resolución de problemas que contribuyen a la apropiación del modo de actuación de los estudiantes y brinda la posibilidad de reconocer las estrategias utilizadas y el proceder ante problemas similares.

Además, no se aseguran adecuadamente los saberes previos porque se violan en múltiples ocasiones el diagnóstico por elementos del conocimiento que es la vía principal para asegurar las condiciones y los saberes necesarios para la solución de diversos problemas según el dominio matemático correspondiente, pues si el estudiantado presenta dificultades en determinado contenido que sean necesarios para dar respuesta a la situación planteada, no podrá hacerlo, perdiendo el interés por la tarea propuesta. (Osorio, A. y Hernández, A., 2006)

También se agrega que en múltiples ocasiones al proponer un problema al estudiantado, el personal docente le ofrece el modelo o la vía de solución y posteriormente se le pide que «resuelvan el problema», cuando en realidad lo que hacen es repetir el proceso de cálculo; esto trae como consecuencia que se limite en los estudiantes la capacidad de comprensión, interpretación y reflexión del problema, así como la creatividad en la búsqueda de la vía de solución. Es por eso que los problemas se utilizan más en función del desarrollo de habilidades de cálculo y no como objeto de enseñanza en sí misma.

Al realizar el análisis de estas dificultades y teniendo en cuenta que pueden ser relativas porque dependen del conocimiento y habilidades de los estudiantes, concluimos que estas no solo limitan el proceso de resolución de problemas, sino que además obstaculizan el desarrollo de las potencialidades de los estudiantes.

### **1.3. Algunos elementos sobre el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas.**

Aprender a resolver problemas es una de las destrezas más importante que un estudiante universitario debe lograr, la formación y desarrollo de esta habilidad para resolver problemas de diferentes índoles se promovió con el objetivo precisamente de

facilitar su solución, garantizando un mayor éxito en la formación ingenieril de los estudiantes, respecto a la atención que esto requiere, Rita Averdaño señala que, las habilidades se corresponden con las destrezas que se requieren para poder aplicar los conocimientos en situaciones concretas y se orientan hacia la capacitación, hacia el poder hacer (Averdaño, Rita, 1993, p.37).

La resolución de problemas matemáticos es considerada también una habilidad, en base a determinadas acciones que son las que permiten acceder a las vías para resolver los problemas, y que se identifican con el nivel de dominio de la acción, pues el verdadero conocimiento se diferencia de la información, en que el estudiante sea capaz de operar con un concepto, una ley o una teoría, por tanto se puede hablar de conocimiento si hay dominio de la acción. (Delgado, J. R., 1999).

A partir de estas valoraciones se llega a la definición de la habilidad resolver problemas de Matemática que se entiende como: “proceso que implica la realización de una secuencia o serie de acciones para la obtención de una respuesta adecuada a una dificultad con intención de resolverla, es decir, la satisfacción de las exigencias (meta, objetivo) que conducen a la solución del problema matemático”. (Triana, Mazarío, Israel (2005).

A consideración de la autora, esta definición enfatiza el carácter de proceso con que se identifica a dicha habilidad en esta investigación, lo que responde al hecho de descomponerse en diferentes acciones progresivas que se deben desarrollar integralmente, sucediéndose unas a otras hasta obtener un resultado (la solución del problema matemático).

Aunque es imposible conocer o prever todas las operaciones que serán necesarias para resolver un problema porque la cuestión no es simplemente la de aplicar ciertos conocimientos y medios de acción a una situación concreta, más bien se trata de aprender lo que aún no se ha aprendido y de descubrir lo desconocido.

La autora además concuerda con L. N. Landa (1978), cuando expresa que enseñar a actuar con base en el conocimiento de las acciones facilita y acelera considerablemente el desarrollo de habilidades, y a un tiempo mejora su calidad. El conocimiento de las acciones permite controlarlas conscientemente y a voluntad, lo que propicia una generalización más amplia y rápida de las operaciones. De esta manera,

el desarrollo de una habilidad se manifiesta a través del ajuste de las acciones que el estudiante debe hacer a las condiciones del objeto. (Landa, 1978, Pág. 5)

Estas acciones constituyen un sistema que se formula para estructurar la habilidad resolver problemas de Matemática y que sean lo suficientemente generales aunque no universales, como para que una vez aplicado a la resolución de cualquier problema matemático de los que se abordan en el aula, se puedan transferir, mediante la enseñanza adecuada, a cualquier situación nueva que se presente a los estudiantes.

Teniendo en cuenta todas estas características uno de los sistemas de habilidades para resolver problemas de matemáticas más completos, en cuanto a esos requerimientos es el planteado por Israel Mazarío en el 2001 y que está estructurado de la siguiente manera:

- 1) Analizar el problema.
- 2) Generar estrategias de trabajo.
- 3) Valorar las consecuencias de la aplicación de la estrategia que se considere más adecuada.
- 4) Ejecutar o desarrollar la estrategia seleccionada.
- 5) Evaluar los logros y dificultades durante la ejecución. (Mazarío, Triana, Israel, 2001)

Con la descripción de estas acciones se puede concluir que el análisis del problema, no solo posibilita la comprensión del mismo o determina si la resolución será fácil o difícil, sino que además los estudiantes deben ser capaces de traducirlo matemáticamente a partir de los principios y conceptos que se deben incorporar para resolverlo, es decir fusionar todos estos elementos para lograr con éxito el modelado del problema, a partir del cual el estudiante debe generar su propia estrategia de trabajo y con razonamiento ser capaz de transitar del conocimiento general al de casos particulares.

En cuanto a la acción “valorar las consecuencias de la aplicación de la estrategia que se considere más adecuada”, la autora coincide con que la ejecución de la misma permite valorar especialmente el grado en que el proceso de resolución del problema implica una planificación previa, una reflexión sobre la vía que conduce a la solución del problema y los medios requeridos para acceder a dicha solución, así como del posible resultado a lograr.

Cuando ejecutamos o desarrollamos la estrategia que se considera, según el caso, la

más apropiada para resolver con éxito el problema planteado, estamos en presencia de una acción mental que conduce al estudiante del modo más ventajoso a la solución de un problema.

Con la aplicación sistemática de las operaciones y los medios de trabajo previstos para solucionar el problema el estudiante ejecuta la estrategia seleccionada que supone el dominio eficiente de modelos, estrategias y procedimientos de resolución de problemas, que permiten realizar acciones progresivas que conducen a un resultado, la solución del problema. Por último aunque no menos importante se deben realizar los ajustes necesarios que posibiliten la correcta solución del problema.

Este sistema de acciones que estructuran la habilidad resolver problemas de matemática contribuyen en el cumplimiento de dos objetivos fundamentales de la enseñanza en las ramas de la ciencia, la adquisición de un cuerpo de conocimiento organizado en un dominio particular y la habilidad para resolver problemas en ese dominio.

#### **1.4. Los ingenieros, la modelación y la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.**

Los ingenieros son los profesionales capacitados para desarrollar modos de utilizar económicamente, elementos de la naturaleza en su beneficio a partir de su especial preparación en términos de conocimiento, uso de ciencias matemáticas, físicas, disciplinas específicas como: química, biología, geología, etc. y de los métodos de análisis y diseño.

Las funciones más frecuentes de los ingenieros son (sin orden de importancia): el desarrollo, el diseño, la producción, la evaluación y el control, la construcción y la operación. Cada una de estas funciones requiere de procesos de identificación, búsqueda, establecimiento de criterios, consideración de alternativas, análisis y resolución de problemas, toma de decisiones, comunicación y otras (Plan D, 2008). Independientemente de la especialidad y orientación, una característica de un buen ingeniero es la habilidad para resolver problemas. Para ello se requiere, no sólo de conocimientos de matemáticas, física, química y ciencias específicas de la ingeniería, sino el juicio apropiado, el sentido común y ético y el saber cómo éstos deben ser usados para reducir el problema real, en general complejo, a uno de tal forma que el

conocimiento científico pueda ser aplicado para solucionarlo, es decir, aplicar el “ingenio”. Saber cuándo y cómo el conocimiento debe ser aplicado y si la respuesta resultante satisface razonablemente el problema original, es el objetivo profesional buscado. (Escalona, Moreno, Iván ,2003)

En el ciclo básico de la ingeniería, las matemáticas han sido consideradas una herramienta fundamental en toda la diversa gama de procesos de análisis y de cálculo que debe llevar a cabo un ingeniero, a través de las cuales modelan y dan respuesta a problemas reales.

Las matemáticas además, cumplen funciones esenciales en dos aspectos, cognitivo y formativo: promueve el aprendizaje de conocimientos básicos fundamentales para el estudio de las ciencias de la ingeniería y promueve en el estudiante el desarrollo de capacidades esenciales y actitudes deseables para su futuro desempeño profesional. Particularmente a través de la resolución de problemas como actividad de aprendizaje en la matemática, se puede promover no sólo la comprensión de los modelos conceptuales y su aprendizaje, sino también el aprendizaje del modelado y su aplicación para resolver problemas nuevos. (Berenguer, I, A y Sánchez, N, M, 2004).

Un aspecto de singular importancia en la resolución de problemas, es el nivel de comprensión que tenga la persona, del significado de los conceptos y operaciones matemáticas que sean necesario aplicar en la modelación de un problema (Hernández, R.2001) y como bien expresaba L. Campistrous y C. Rizo, 1996) “el poder modelar, es decir, reproducir las relaciones fundamentales que se establecen en el enunciado de un problema, despejadas de elementos innecesarios o términos no matemáticos que hacen difícil la comprensión, es una capacidad muy importante en la resolución de problemas.” , por tanto es esencial tener presente que, cuando se está modelando un problema, no se puede aspirar a que los objetos reales sean idénticos a los objetos matemáticos.

Estos elementos destacan al modelado como una cuestión fundamental en la matemática y en la ingeniería, el modelado de sistemas y de procesos, entendido como el establecimiento de relaciones semánticas entre la teoría y los objetos, es una herramienta básica en la explicación científica y es un proceso substancial en la resolución de problemas. La matemática, por la propia estructura del cuerpo de

conocimientos que abarca, así como por la lógica de tratamiento de esos conocimientos, requiere para su comprensión y aprendizaje, trabajar con modelos y aplicar, como planteábamos anteriormente, el razonamiento deductivo.

### **Conclusiones parciales.**

- La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas, constituye una vía eficaz para formar a los estudiantes con pensamientos lógicos a disposición de aplicarlos en su desempeño profesional y en su propia vida.
- Los ingenieros deben ser profesionales capaces de integrar los diversos conocimientos, habilidades, actitudes y técnicas estudiadas para modelar y resolver cualquier situación problémica.
- El análisis crítico y exhaustivo de las diferentes definiciones de problema, nos reveló la necesidad de agregar algunos elementos a la definición de dicho término, que se basó fundamentalmente en el interés, la motivación y la necesidad del estudiante para resolver el problema.
- La función elemental que tiene, el uso de las metodologías y estrategias en la resolución de problemas, es orientar a los estudiantes en la búsqueda de la solución del mismo.
- Las ecuaciones diferenciales es un tema de estudio de vital importancia para las carreras de ciencias técnicas, por las diversas aplicaciones que tiene en el mundo de la ingeniería, pues a través de ellas se modelan disímiles procesos físicos y técnicos.
- La Enseñanza Problémica es una necesidad de la enseñanza de la Matemática, y el claustro docente debe garantizar un espacio para el tratamiento problémico de las asignaturas y de esta forma dar cumplimiento a la mayor parte de los objetivos generales de la enseñanza de la Matemática en nivel superior.

## **Capítulo 2. Elaboración de una colección de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial que se modelan y resuelven a través de las ecuaciones diferenciales.**

En este capítulo se realiza un análisis de las relaciones que existen entre los modos de actuación del Ingeniero Industrial y la aplicación de las ecuaciones diferenciales y basada en las mismas se fundamentan las características principales de la colección de problemas que se propone, además de una ejemplificación de la utilización de una SICA (Sucesión de Indicaciones con Carácter Cuasi-Algorítmico), para resolver y modelar problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial. El resultado de la investigación será valorada por un grupo de expertos del Departamento de Matemática e Ingeniería Industrial.

### **2.1-El proceso de enseñanza de las ecuaciones diferenciales a través de la resolución de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial.**

El Ingeniero Industrial tiene un grupo de funciones muy abarcadoras que se materializan fundamentalmente en el sector de la producción y los servicios. La producción incluye, generalmente, aspectos tales como el análisis, planeación y control de la producción, control de la calidad, diseño de recursos y otros aspectos de la manufactura de clase mundial. Los procesos y sistema de manufacturas se ocupan directamente de la formación de materiales, cortado, modelado, planeación, etc. Los sistemas de manufacturas se centran en la integración del proceso de manufactura, generalmente por medio del control por computadoras y comunicaciones y además trata con la ecuación humana, es decir, la ergonomía. La ergonomía física ve al ser humano como un dispositivo biomecánico mientras que la ergonomía informativa examina los aspectos cognoscitivos de seres humanos.

De esta forma, el Ingeniero Industrial no es mecánico, electrónico ni químico, sino la persona encargada del control y la optimización de los procesos productivos, tareas que normalmente no realiza las otras especialidades. Día tras día, el campo de actividad del ingeniero industrial está más definido, y por la versatilidad que debe tener en su profesión, en el sentido de poder entender el lenguaje de todas las demás especialidades, es que su formación es interdisciplinaria. Esto no representa una

ventaja ni una desventaja, sino simplemente una característica de esta rama de la ingeniería y sus tareas dentro de la empresa, las que están claramente definidas respecto a las diferentes tareas que desempeñan las otras especialidades de la ingeniería.

Por tanto, podemos concluir que, todas las actividades relacionadas con una industria sea cual fuere, son ingerencias de la Ingeniería Industrial, con excepción de las tecnologías que se emplean en los procesos productivos, así, el ingeniero industrial puede encargarse desde la determinación de la localización óptima de la industria, la optimización de los procesos, la utilización de la maquinaria, y de la mano de obra, el diseño de la planta, la toma de decisiones para la automatización de procesos, hasta la planeación de la producción, lo cual implica controlar los inventarios tanto de materia prima como de producto terminado, también planea el mantenimiento de todos los equipos.

Para entender los elementos tradicionales de la producción, como análisis económico, planeación de la producción, diseño de recursos, manejo de materiales, procesos y sistema de fabricación y análisis de puestos de trabajo los ingenieros cuentan con las ciencias matemáticas de conjunto con otras ciencias. Este énfasis llega a ser evidente en la optimización de los sistemas de producción en los que se estructuran las órdenes, la programación de tratamientos por lotes, determinando el número de unidades materiales manejables, adaptando las disposiciones de la fábrica, encontrando secuencias de movimientos, etc. Los ingenieros industriales se ocupan casi exclusivamente de los sistemas de componentes discretos, de ahí que los ingenieros industriales tienen una amplia cultura matemática.

El entorno laboral en el que se proyecta la formación profesional del Ingeniero Industrial y los objetivos trazados por la carrera, giran precisamente alrededor de los elementos antes mencionados y de ahí proviene la importancia de mantener el vínculo de las diferentes asignaturas que se imparten y sus aplicaciones prácticas dentro de su perfil.

Cuando se trata del área de los procesos productivos, donde se incluyen fundamentalmente el control de la producción, la calidad y la gestión de los recursos humanos dentro de una empresa, que puede abarcar desde la planeación hasta la toma de decisiones en los procesos productivos, resulta relevante el estudio de las

ecuaciones diferenciales de primer orden que se encuentran en el programa de la asignatura Matemática III que se imparte en el segundo año de la carrera de Ingeniería Industrial, pues sus aplicaciones están más relacionadas con estos modos de actuación.

La asignatura Matemática III se encuentra dentro de la Disciplina Matemática que está compuesta además por la Matemática I, II y IV que se imparten en los dos primeros años de la carrera.

En cuanto al desglose por temas se tiene que la Matemática III presenta la siguiente distribución de acuerdo con las horas asignadas en el Plan de Estudio.

Tema I. Series Numéricas.....	30horas
Tema II. Ecuaciones diferenciales.....	34horas
Total.....	64horas

Para el estudio del tema de las ecuaciones diferenciales la asignatura cuenta con, el texto básico Cálculo con Trascendentes Tempranas y el texto complementario Ecuaciones Diferenciales y sus aplicaciones, sin embargo, en ambos libros los problemas de aplicaciones que se presentan, tanto los de ejemplos como los propuestos no tiene relación directa con el perfil del Ingeniero Industrial.

Analizando esta problemática, resultaría de gran utilidad para la formación de un Ingeniero Industrial contar dentro de la asignatura con un conjunto de problemas, ordenados por el tipo de ecuación diferencial con la cual se correspondan y que presenten características que los vinculen directamente con su carrera; es decir, una colección de problemas típicos de su perfil profesional y que a su vez contribuya a desarrollar habilidades en la modelación y resolución de problemas que requieran la aplicación de las ecuaciones diferenciales.

**Características de la colección de problemas.**

- ❖ La colección está formada por un grupo de problemas que relacionan las formas de actuación del Ingeniero Industrial con la aplicación de las ecuaciones diferenciales (problemas típicos).
- ❖ Los problemas estarán organizados según el tipo de ecuación diferencial de primer orden con que se corresponda, de variables separables y lineales.

- ❖ Su nivel de complejidad irá creciendo en dependencia de las características de cada problema.

Los problemas donde se aplican las ecuaciones diferenciales son muy diversos, sin embargo presentan un conjunto de regularidades que pueden guiar al estudiante a través de un conjunto de pasos organizados y bien estructurados hacia búsqueda más rápida y eficiente de su solución.

A partir de todos estos elementos se ha podido constatar que para lograr que los estudiantes de Ingeniería Industrial modelen y resuelvan los problemas que se plantean en la colección que se propone en esta investigación, será necesario el apoyo de una SICA (Sucesión de Indicaciones con carácter Cuasi-Algorítmico), basada en la definición que aparece en Colectivo de Autores, Metodología de la enseñanza de la Matemática I, 1993 p.246, que plantea que *se caracteriza como una sucesión de órdenes o indicaciones para realizar un cierto sistema de operaciones en un orden determinado, que inducen a operaciones unívocas rigurosamente determinadas y del mismo tipo en aquellos individuos hacia los cuales está dirigida.*

La SICA, se basó además en las cuatro etapas propuestas por Polya para la resolución de problemas. En la primera etapa, Polya propone comprender el problema, que es la tarea más difícil, la cual exigirá determinar que la situación problémica se debe resolver mediante una ecuación diferencial y posteriormente realizar la modelación.

En la segunda etapa Polya propone trazar un plan para resolver el problema, lo que aquí incluirá la identificación del tipo de ecuación diferencial de primer orden y primer grado que se corresponda con la modelación matemática del problema, la cual se materializará en la tercera etapa donde se pone en práctica el plan, en este momento se aplica el método de solución según el tipo ecuación diferencial que se identificó y por último se pasa a la cuarta etapa que se refiere a la comprobación del resultado a través del planteamiento de la función que determina la solución general y según las condiciones del problema se procederá a determinar la solución particular, además se analizará otra vía de solución que estará basada en la forma en que se plantee la ecuación diferencial que correspondan al modelo del problema.

**SICA (Sucesión de Indicaciones con carácter Cuasi-Algorítmico) para la solución de problemas donde se apliquen las ecuaciones diferenciales de primer orden:**

- 1-Determinar que la situación problémica se debe resolver mediante una ecuación diferencial
- 2-Modelar la situación planteada en el problema.
- 3-Identificar el tipo de ecuación diferencial.
- 4-Obtener la solución de la ecuación diferencial.
- 5-Determinar la solución general y particular según las condiciones dadas en el problema.
- 6- Analizar la solución hallada y la posibilidad de otra vía de solución.

Características de la SICA que se planteó anteriormente:

- Organiza el proceso de modelación y resolución de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial.
- Tiene carácter Cuasi-Algorítmico porque no siempre la secuencia de pasos para resolver los problemas son finitos.
- Dotará a los estudiantes de una herramienta matemática que contribuya a desarrollar sus habilidades en la modelación y resolución de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial.
- Contribuye a desarrollar el pensamiento lógico y algorítmico de los estudiantes.

Conocimientos previos que los estudiantes deben dominar para garantizar cada uno de los pasos que se proponen en la SICA:

1-

1.1-Identificar que la solución del problema está relacionada con una función.

1.2-Identificar un proceso donde queremos definir el comportamiento futuro del objeto sobre la base de cómo cambian los valores actuales.

1.3-Definir las variables que intervienen en el problema.

1.4-Interpretar el concepto de derivada.

2-

2.1-Identificar leyes, propiedades y conceptos fundamentales de asignaturas como Física, Química, Contabilidad y Finanzas y elementos de Estadísticas.

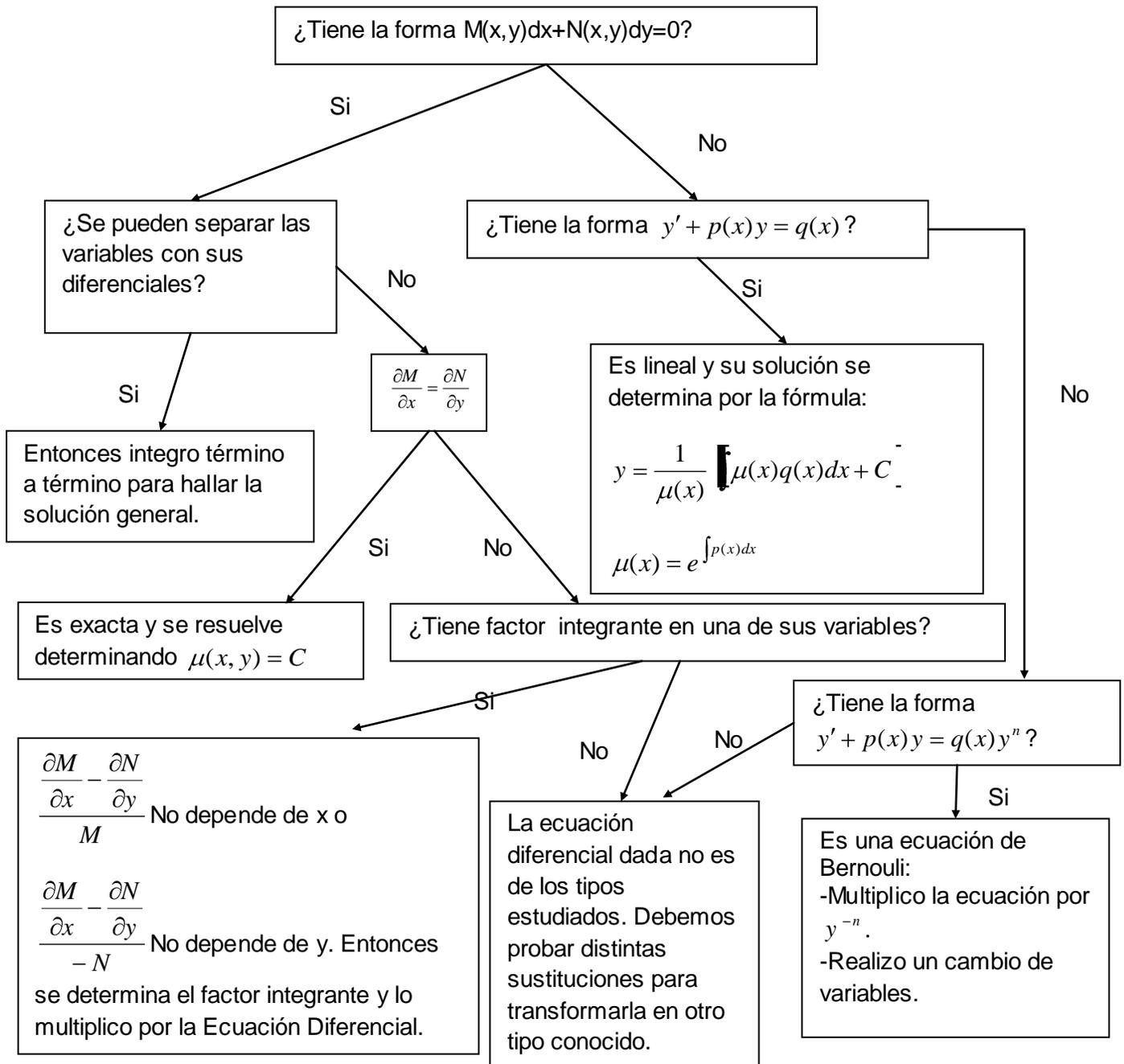
2.2-Realizar la formulación matemática del problema.

2.3-Transformar el modelo obtenido en una ecuación diferencial.

3-

3.1-Determinar el orden y el grado de una ecuación diferencial.

3.2-Identificar la ecuación diferencial según la forma característica de la ecuación diferencial:



4-

- 4.1- Aplicar los métodos de solución según el tipo de ecuación diferencial.
  - 4.1.1-Determinar el factor de integración.
  - 4.1.2-Aplicar los métodos de integración.
  - 4.1.3-Aplicar las propiedades de la derivada.
  - 4.1.4-Aplicar la definición y propiedades de los logaritmos y las potencias.
- 4.2-Plantear la solución de la ecuación diferencial.

5-

- 5.1-Identificar las condiciones iniciales.
- 5.2-Determinar el valor de la constante arbitraria.
- 5.3-Plantear la solución general.
- 5.4-Determinar la solución particular.

6-

6.1-Realizar otra transformación del modelo obtenido a través de la formulación matemática que se obtuvo y aplicar la SICA a partir del paso tres.

A partir de las características del entorno laboral al que se enfrentará un estudiante de la especialidad de Ingeniería Industrial y del cual se realizó un análisis profundo, se pudo enmarcar un grupo de situaciones problemáticas que modeladas matemáticamente conducen a una ecuación diferencial.

Cuando el estudiante de Ingeniería Industrial realiza sus prácticas laborales en cualquier momento de su carrera, se puede enfrentar a este tipo de situaciones, las cuales al no ser abordadas en clase en algún momento, impedirán que el estudiante sea capaz de relacionar o encontrar semejanzas del problema con la aplicación de las ecuaciones diferenciales.

Es por eso que en las clases es necesario enfrentar al estudiante con un problema real e interesante, y llevarlo; a través de un razonamiento intuitivo o a partir de leyes físicas basadas en la evidencia que proviene de la investigación, a formular el modelo matemático que resulta en una ecuación diferencial, es decir, cuando se manifiestan cambios y queremos predecir el comportamiento futuro sobre la base de cómo cambian los valores actuales.

Un Ingeniero Industrial debe estar capacitado para analizar el papel que juega la empresa dentro del mercado, ya sea nacional o internacional, y como varía su situación dentro del mismo a partir de los cambios sistemáticos que se producen.

## **2.2-Problemas resueltos mediante la ejemplificación y utilización de la SICA para modelar y resolver problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial.**

La autora sugiere los siguientes problemas resueltos como muestra para la utilización de la SICA (Sucesión de Indicaciones con carácter Cuasi-Algorítmico) y como guía para la modelación y la resolución de problemas con características que se corresponden con los procesos de la producción y el control de la calidad, que son áreas del perfil profesional de un Ingeniero Industrial. Además se pone de manifiesto la importancia de la aplicación de ecuaciones diferenciales de variables separables y lineales respectivamente.

El siguiente problema es una muestra de la aplicación de la ecuación diferencial lineal o de variables separables para resolver una situación problémica basada en el control de la calidad, que manifiesta un producto determinado teniendo en cuenta un parámetro requerido.

1-Para llevar a cabo el control de la calidad del llamado producto pan frío que se elabora en la unidad especializada de una empresa alimenticia, se le realizan pruebas de cocción y entre los parámetros de la prueba se necesita conocer la temperatura que adquiere el pan a los  $t$  minutos en que se saca del horno, si se sabe que es sacado del mismo cuando su temperatura es de  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$  y que se coloca en un cuarto donde la temperatura es de  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

a) Determine una función que exprese la temperatura adquiere el pan a los  $t$  minutos de sacado del horno.

b) ¿Cuál es la temperatura del pan cuando  $t$  tiende a infinito?

1- Determinar que la situación problémica se debe resolver mediante una ecuación diferencial.

1.1-La solución del problema está relacionada con una función, porque es necesario determinar para diferentes instantes de tiempo, diferentes valores temperatura del pan al ser sacado del horno y porque además está explícita en la interrogante del problema.

1.2-Se puede identificar un proceso donde a partir de la temperatura actual del pan cuando es sacado del horno, se requiere determinar la variación de la temperatura que manifiesta el mismo en un tiempo t.

1.3-Definir “y” como la temperatura del producto.

1.4-Definir  $\frac{dy}{dt}$  como la variación de la temperatura del producto con respecto al tiempo.

2-Obtener el modelo matemático del problema.

2.1-Relacionar el proceso en cuestión con elementos de la asignatura de Física.

-Reconocer la según la ley de Newton del enfriamiento, que afirma que la rapidez del enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y sus alrededores.

2.2-Realizar la formulación matemática teniendo en cuenta que la temperatura va disminuyendo después que el producto es sacado del horno y que existe una diferencia entre la temperatura del producto y la temperatura del cuarto donde se coloca el mismo .

R/  $\frac{dy}{dt} = -k(y - 30)$ , esta expresión matemática es precisamente la ecuación diferencial que representa la variación de temperatura que manifiesta el producto respecto al tiempo después de ser sacado del horno.

2.3-

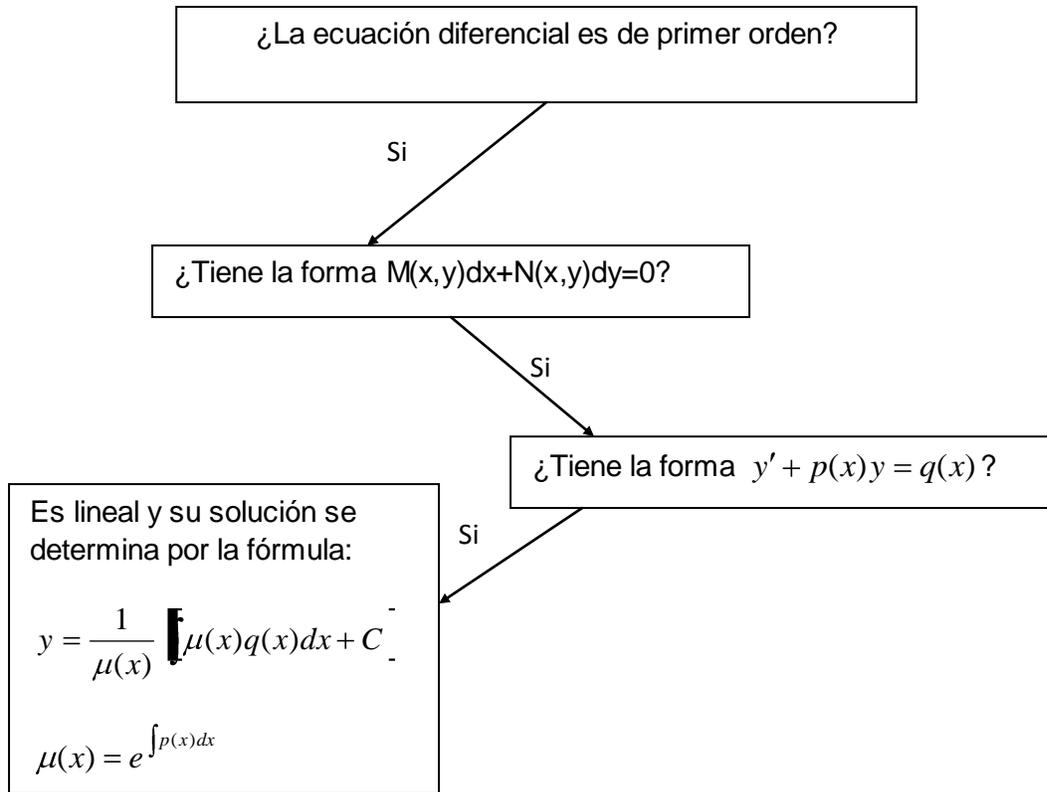
$$R/ y' = -ky + 30k$$

$$y' + ky = 30k$$

3. Identificar el tipo de ecuación diferencial.

3.1- La ecuación diferencial es de primer grado y primer orden.

3.2-Identificar el tipo de ecuación diferencial.



4- Obtener la solución de la ecuación diferencial

4.1-Aplicar el método de solución según el tipo de ecuación diferencial.

- Plantear la fórmula  $y = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)q(t)dt + C$  (1)

- Identificar a q(t) y p(t).

$$q(t)=30k, p(t)=k$$

- Determinar  $\mu(t)$ .

$$\mu(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$$

- Sustituir en la fórmula (1).

$$y = \frac{1}{e^{kt}} \int e^{kt} 30k dt + C$$
 (2)

4.1.1-Resolver la integral indicada en (1).

$$\int (e^{kt} 30k dt + C) = \int 30k e^{kt} dt + C = 30 \int k e^{kt} dt + C = 30 e^{kt} + C$$

- Sustituir el resultado de la integral en (2).

$$y = \frac{1}{e^{kt}} \int 0e^{kt} + C = 30 + Ce^{-kt}$$

4.2- R/  $y = 30 + Ce^{-kt}$

5- Determinar la solución general y particular según las condiciones dadas en el problema.

5.1-Según las condiciones iniciales que plantea el problema:  $y(0) = 90$ .

- Sustituyo en (1).

$$90 = 30 + ce^{-0k}$$

5.2-Determinar el valor de la constante C.

$$90 = 30 + C, C = 90 - 30, C = 60$$

5.3- La función solución que representa el cambio de temperatura en cualquier instante de tiempo después de haber sacado el producto del horno está dada por:

$$y(t) = 30 + 60e^{-kt}$$

5.4-

b)

- Aplicar el límite a la función obtenida para un valor infinito de t.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (30 + 60e^{-kt}) = 30$$

R/ El límite cuando t tiende a infinito es de 30.

6- Analizar la solución hallada y la posibilidad de otra vía de solución.

6.1-Transformar el modelo matemático de la siguiente forma.

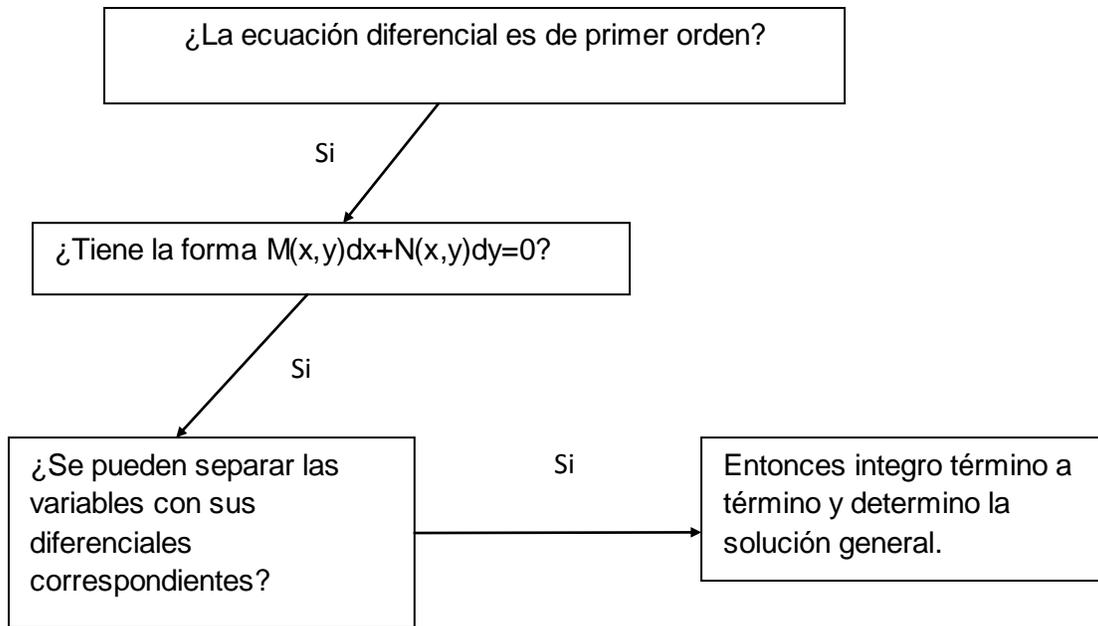
$$dy = -k(y - 30)dt$$

$$\frac{dy}{(y - 30)} = -k dt$$

3. Identificar el tipo de ecuación diferencial.

3.1- La ecuación diferencial es de primer grado y primer orden.

3.2-Identificar el tipo de ecuación diferencial.



4- Obtener la solución de la ecuación diferencial

4.1-Aplicar el método de solución según el tipo de ecuación diferencial.

4.1.2-Integro término a término la ecuación diferencial.

$$\int \frac{dy}{y-30} = \int -k dt$$

$$\ln|y-30| = -kt + C$$

4.1.4-Aplicar la propiedad de los logaritmos donde  $\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$  o

$$y - 30 = e^{-kt+c}$$

-Aplicar propiedades de las potencias:

$$y - 30 = ce^{-kt}$$

-Despejo la variable y.

$$y = ce^{-kt} + 30$$

4.2- R/  $y = ce^{-kt} + 30$  (1)

5-

5.1-Según las condiciones iniciales que plantea el problema:  $y(0) = 90$ .

• Sustituyo en (1).

$$90 = 30 + ce^{-0k}$$

5.2-Determinar el valor de la constante C.

$$90=30+C, C=90-30, C=60$$

R/ La función solución que representa el cambio de temperatura en cualquier instante de tiempo después de haber sacado el pan del horno esta dada por:

$$5.3- y(t) = 30 + 60e^{-kt}$$

5.4-

b)

- Aplicar el límite a la función obtenida para un valor infinito de t.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (30 + 60e^{-kt}) = 30$$

R/ La temperatura del pan al ser sacado del horno, que se tuvo en cuenta como parámetro, para medir la calidad del ese producto, arrojó que en un tiempo infinito la temperatura es de  $30 C^0$ .

6- Analizar la solución hallada y la posibilidad de otra vía de solución.

En el caso del siguiente problema se muestra la aplicación de la ecuación diferencial de variables separables como única vía de solución para resolver una situación problemática basada en la planificación y efectividad en la toma de decisiones que involucra el proceso de producción de un producto utilizando los recursos de los que dispone la empresa en ese momento.

**2-** Suchel Lever es una empresa especializada en productos de aseo personal. En el mes de agosto se les presentó la siguiente situación, una cadena de tiendas realizó un pedido urgente de jabón por encima de lo que se produce normalmente y se tuvo que recurrir a la utilización de un depósito que contiene 1000 litros de salmuera con 15 kg de sal disuelta que se utiliza generalmente como materia prima en la mezcla para la elaboración del detergente, y esa misma mezcla se necesitaba para la elaboración del pedido extra del jabón pero con menos concentración de sal. Si se le suministra a dicho depósito agua pura a razón de 10 litros por minutos, se conoce que la solución se mantiene completamente mezclada y se drena con la misma rapidez de tal forma que, en un período de tiempo determinado se le daría solución al problema.

a) ¿Cuánta sal hay en el depósito al transcurrir t minutos?

b) ¿Cuánta sal hay en el depósito a los 20 minutos?

1-Determinar que la situación problemática se debe resolver mediante una ecuación diferencial

1.1-La solución del problema está relacionada con una función, porque se necesitan para diferentes instantes de tiempo, determinar la cantidad de gramos de sal que hay disuelta en el tanque.

1.2-Se puede identificar un proceso en el cual se necesita determinar la cantidad de gramos de sal que hay en un tanque en un tiempo t, si a este se le suministra agua pura y se expulsa la misma cantidad completamente mezclada, conociendo que inicialmente en el tanque había 15kg de sal disuelta.

1.3-Declarar P como la cantidad de kg de sal.

2- Modelar la situación planteada en el problema.

$$2.2- R/ \frac{dP}{dt} = \frac{Pkg}{1000 L} \left( -10 \frac{L}{m} \right)$$

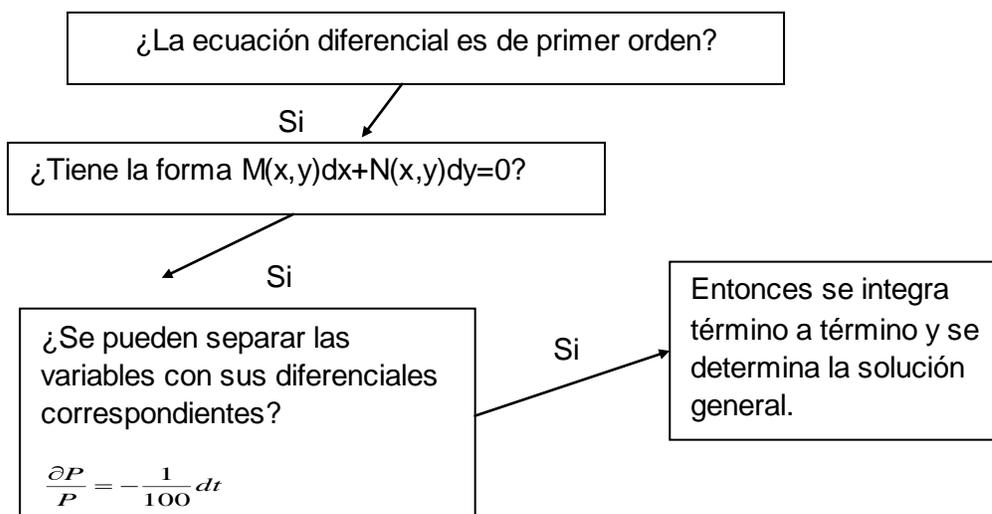
2.3-Hacer las simplificaciones correspondientes.

$$R/ \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{Pkg}{100m}$$

3- Identificar el tipo de ecuación diferencial.

3.1-La ecuación diferencial es de primer grado y primer orden.

3.2-



4- Obtener la solución de la ecuación diferencial.

4.1-Aplicar el método de solución.

4.1.2-Integro ambos miembros, porque es una ecuación diferencial de variables separables:

$$\int \frac{\partial P}{P} = -\int \frac{1}{100} dt$$

$$\ln|P| = -\frac{1}{100}t + c$$

4.1.4-Aplicar la propiedad que plantea que una función compuesta con su inversa es igual al argumento  $a^{\log_a x} = x$ .

$$4.2 \quad P(t) = ce^{-\frac{1}{100}t} \quad (1)$$

5- Determinar la solución general y particular según las condiciones dadas en el problema.

5.1-Sustituir la condición  $P(0)=15$  en (1).

5.2-Determinar el valor de la constante arbitraria C

$$15 = ce^{-\frac{1}{100} \cdot 0}$$

$$C=15$$

$$5.3-R/P \quad P(t) = 15e^{-\frac{1}{100}t} \quad (2)$$

5.4-

- Sustituir en (2) el valor  $t=20$  minutos

$$P(20) = 15e^{-\frac{1}{100} \cdot 20} = 15e^{-\frac{1}{5}} = \frac{15}{e^{\frac{1}{5}}} = \frac{15}{1,22} = 12,29$$

R/ A los 20 minutos en el tanque habían 12,29Kg de sal.

6- Analizar la solución hallada y la posibilidad de otra vía de solución

Como se planteó en la presentación del problema la vía de solución es única pues no existe otra ecuación diferencial que modele la situación planteada.

En el siguiente problema se muestra la aplicación de la ecuación diferencial de variables separables para resolver una situación problémica basada en el proceso de producción de un producto.

3- La Empresa que se encarga de la elaboración de productos para el cutis quiere exponer al mercado una nueva línea, compuesta por varios cremas para la limpieza y embellecimiento facial, para la producción de una crema hidratante se hizo necesario hacer reaccionar el azufre con potasio para formar un nuevo producto químico necesario para su producción, sabiendo que la velocidad con que este se forma varía como el producto de las cantidades instantáneas del azufre con el potasio y que además su formación requiere de 2g de azufre por cada kg de potasio. Conociendo que inicialmente hay 10g de azufre y 20 g de potasio y que en 20 minutos se han formado 6g del nuevo producto químico.

a) Halle la cantidad de gramos del nuevo producto químico necesario en la producción de la crema hidratante en cualquier tiempo t.

b) Al transcurrir 1 minuto, ¿cuántos gramos del nuevo producto químico para la producción de la crema hidratante se habrían formado?

1- Determinar que la situación problémica se debe resolver mediante una ecuación diferencial.

1.1-La solución del problema está relacionada con una función, porque se necesitan para diferentes instantes de tiempo, determinar la cantidad de gramos que se forman del nuevo producto.

1.2-Se puede identificar un proceso en el cual se necesita determinar la cantidad de gramos que se forman del nuevo producto químico si inicialmente hay 10g de azufre y 20 g potasio y que en 20 minutos se han formado 6g.

1.3-Asignar letras a cada uno de los productos químicos para facilitar la formulación matemática del problema.

A= azufre, B= potasio, C= nuevo producto químico.

1.4-Aplicar el concepto de derivadas para determinar la velocidad con que varía C con respecto al tiempo  $\frac{dx}{dt}$ .

2- Modelar la situación planteada en el problema.

2.2-Para formar x gramos del producto C se necesitan  $\frac{2}{3}x$  de A y  $\frac{1}{3}x$  de B

(Se necesita que el producto químico A sea el doble del producto B).

-La cantidad de A presente al tiempo t cuando se forma x cantidad del producto C es  $10 - \frac{2}{3}x$  y la cantidad de B es  $20 - \frac{1}{3}x$ .

- La formulación matemática del problema es la siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = k \left( 10 - \frac{2}{3}x \right) \left( 20 - \frac{x}{3} \right), \text{ donde } k \text{ es la constante de proporcionalidad.}$$

2.3-Trasformar el modelo obtenido para facilitar el proceso de identificación de la ecuación diferencial.

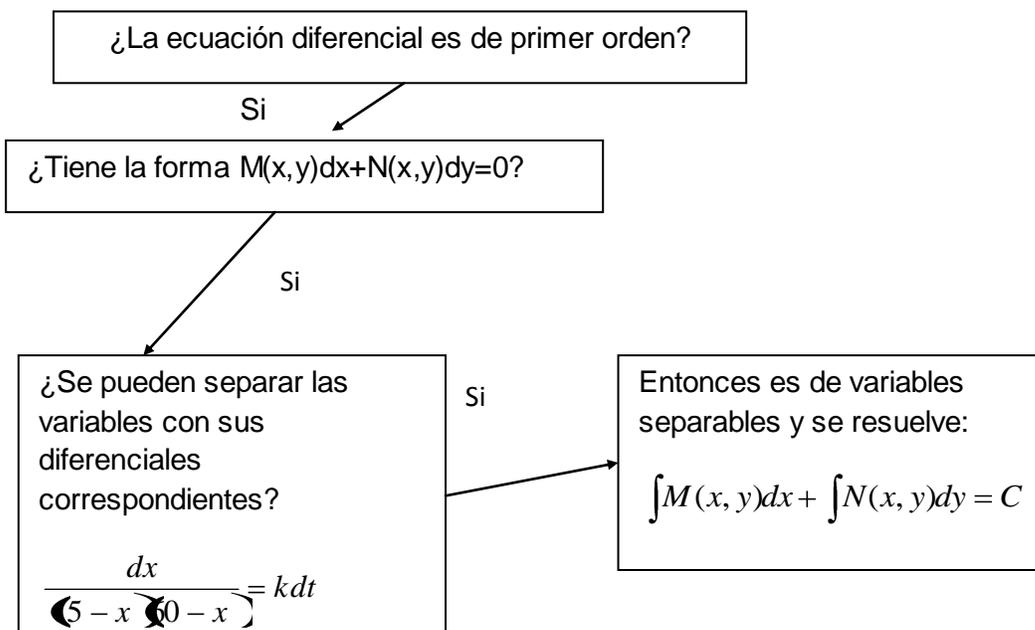
$$\frac{dx}{dt} = k (5 - x) (60 - x)$$

Esta última expresión es precisamente la ecuación diferencial que representa la variación de la cantidad del producto C con respecto al tiempo.

3- Identificar el tipo de ecuación diferencial.

3.1-La ecuación diferencial es de primer grado y primer orden.

3.2-



4- Obtener la solución de la ecuación diferencial.

4.1- Aplicar los métodos de solución según el tipo de ecuación diferencial.

4.1.2- Se procede a la integración de ambos miembros:

$$\int \frac{dx}{(5-x)(60-x)} = \int k dt$$

-Integro el miembro izquierdo aplicando el método de integración para fracciones simples y el miembro derecho mediante una integral inmediata.

$$\frac{1}{45} \ln \frac{60-x}{15-x} = kt + c$$

4.1.4-Aplicando propiedades de los logaritmos:

$$\frac{60-x}{15-x} = ce^{45kt} \quad (1)$$

5- Determinar la solución general y particular según las condiciones dadas en el problema.

5.1-Hay que tener en cuenta que inicialmente no está presente el producto C ( $x=0$  y  $t=0$ ).

5.2-Sustituyo en (1) las condiciones iniciales.

$$\frac{60}{15} = c, c = 4.$$

5.3-Sustituyendo en (1) el valor de c:

$$\frac{60-x}{15-x} = 4e^{45kt} \quad (2)$$

-Determinar el valor de k, para lo que se necesita la condición  $x=6$  y  $t = \frac{1}{3}$ .

-Sustituyo en (2) el valor de x y de t.

$$\frac{60-6}{15-6} = 4e^{\frac{45}{3}k} \Rightarrow \frac{3}{2} = e^{15k}$$

- Sustituyo en (1),  $\frac{3}{2} = e^{15k}$

La cantidad de gramos que se necesita formar del nuevo producto químico para la producción de la crema hidratante en cualquier tiempo es:

$$R/ \quad x = \frac{15 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{3t} \right]}{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{2}{3} \right)^{3t}} \quad (3)$$

5.4-

Sustituyo  $t=1$  en (3):

$$x = \frac{15 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right) \right]}{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{2}{3} \right)} = 0.15$$

R/ En 1 minuto se habían formaron 0.15 g del nuevo producto químico para la producción de la crema hidratante.

6- Analizar la solución hallada y la posibilidad de otra vía de solución

Otra vía de solución sería a través de la aplicación de la ecuación diferencial lineal.

Todos los problemas que se plantearon anteriormente y que fueron resueltos a través de la SICA están vinculados al perfil del Ingeniero Industrial, con cada uno de los modos de actuación en los que se encuentra más definida la aplicación de ecuaciones diferenciales de variables separables y lineales de primer orden, estos podrán ser utilizados como material complementario dentro del tema de las ecuaciones diferenciales y como muestra de la utilización de la SICA.

La autora propone para la motivación de la Conferencia 7 de la asignatura Matemática III (Ver Anexo 2), utilizar el problema 1 de la colección de problemas y para la orientación del estudio independiente el problema 2 (Ver Anexo1).

En la Clase Práctica 9 (Ver Anexo 2), se propone resolver los problemas 3, 4 de la colección de problemas (Ver Anexo1).

La autora propone para la motivación de la Conferencia 9 de la asignatura Matemática III (ver Anexo 2), utilizar el problema 8 de la colección de problemas y para la orientación del estudio independiente el problema 9 (Ver Anexo1).

En la Clase Práctica 10 (ver Anexo 2), se propone utilizar los problemas 9.1 y 9.2 de la colección de problemas (Ver Anexo1).

En la Clase Práctica 12 (ver Anexo 2), se propone utilizar los problemas 5, 6 y 7 de la colección de problemas típicos (Ver Anexo1).

La colección de problemas puede ser enriquecida a través de la interdisciplinariedad con otras asignaturas que se imparten en la carrera de Ingeniería Industrial y que contribuya desde esa proyección a desarrollar habilidades en la modelación y

resolución de problemas que requieran la aplicación de las ecuaciones diferenciales y que logren una mayor eficiencia en la formación profesional del Ingeniero Industrial.

### **2.3-Valoración del proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones en cursos anteriores.**

Para conocer la valoración por parte de los estudiantes de la carrera de Ingeniería Industrial, que cursaron la Asignatura Matemática III en años anteriores, fue necesaria la aplicación de una encuesta.

La encuesta va dirigida a un número grande de personas o sea la población (que no es más que todos los individuos que nos interesa encuestar). Sin embargo, encuestar a toda la población, puede resultar imposible, o muy costosa, además del tiempo que exige no solo la realización de todas las encuestas sino también el procesamiento después de tanta información. Este problema suele ocurrir frecuentemente y una solución bastante efectiva consiste en medir solo una parte de la población que se denomina: muestra.

La muestra debe obtener toda la información deseada para tener la posibilidad de extraerla, esto sólo se puede lograr con una buena selección de la muestra y un trabajo muy cuidadoso y de alta calidad en la recogida de los datos.

La representatividad en estadística se logra con el tipo de muestreo adecuado que siempre incluye la aleatoriedad en la selección de los elementos de la población que formarán la muestra. No obstante, tales métodos solo garantizan una representatividad muy probable pero no completamente segura.

Para determinar el **tamaño de la muestra** cuando los datos son cualitativos; es decir, para el análisis de fenómenos sociales o cuando se utilizan escalas nominales para verificar la ausencia o presencia del fenómeno a estudiar, se recomienda la utilización de la siguiente fórmula:

$$n = \frac{n'}{1 + \frac{n'}{N}}$$

Siendo  $n' = \frac{s^2}{\sigma^2}$  sabiendo que:

$\sigma^2$  es la varianza de la población respecto a determinadas variables.

$s^2$  es la varianza de la muestra, la cual podrá determinarse en términos de probabilidad como  $s^2 = p \times q$

$S_e$  es error estándar que está dado por la diferencia entre  $(\mu - \bar{x})$  la media poblacional y la media muestral.

$(S_e)^2$  es el error estándar al cuadrado, que sirve para determina  $\sigma^2$ , por lo que:

$\sigma^2 = (S_e)^2$  es la varianza poblacional.

Teniendo en cuenta estos elementos se declara como **población** a los estudiantes que han recibido la asignatura Matemática III del curso regular diurno de la Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos o sea de tercer año a quinto año. En el cuadro 1 se observa la cantidad de estudiantes que la conforman:

Cuadro 1. Estudiantes de Ingeniería Industrial por grupos. Fuente: elaboración propia.

Grupos	Cantidad de estudiantes
I-31	29
I-32	28
I-41	28
I-42	28
I-51	25
I-52	26
<b>Población (N)</b>	<b>164</b>

Se procede a calcular el tamaño de muestra:

**Solución**

$$N=164$$

$$p=q=0,5$$

$$s^2=p \times q=0,25$$

$$S_e=0,05$$

$$\sigma^2 = (S_e)^2=0,0025$$

**Sabiendo que:**

$$n' = \frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{0,25}{0,0025} = 100$$

**Por lo que:**

$$n = \frac{n'}{1 + \frac{n'}{N}} = \frac{100}{1 + \frac{100}{164}} = \frac{100}{1.6097} = 62,1 \approx 62$$

El tamaño de muestra es 62 lo que indica la cantidad de estudiantes a encuestar.

**El tipo de muestreo que es conveniente utilizar es el Muestreo Estratificado:**

A fin de que los elementos muestrales o unidad de análisis posean un determinado atributo que en este caso sería los diferentes grupos a los que pertenecen los estudiantes de Ingeniería Industrial es necesario estratificar la muestra. Es decir, cuando no basta que cada uno de los elementos muestrales tengan la misma probabilidad de ser escogidos, sino que además es necesario estratificar la muestra en relación a estratos o categorías que se presentan en la población y que aparte son relevantes para los objetivos del estudio, se diseña una muestra probabilística estratificada.

Lo que se hace es dividir a la población en subpoblaciones o estratos y se selecciona la muestra para cada estrato. La estratificación aumenta la precisión de la muestra e implica el uso deliberado de diferentes tamaños de muestra para cada estrato, " a fin de lograr reducir la varianza de cada unidad muestral " (Kish, 1965) en su libro de muestreo expone que en un número determinado de elementos muestrales  $n = \sum nh$  la varianza de la media muestral  $\bar{x}$  puede reducirse al mínimo si el tamaño de la muestra para cada estrato es proporcional a la desviación estándar dentro del estrato. Esto es,

$f_h = \frac{n}{N} = Ksh$  donde  $f_h$  es la fracción del estrato,  $n$  el tamaño de la muestra,  $N$  el tamaño de la población, es la desviación estándar de cada elemento del estrato  $h$ , y  $K$  es una proporción constante que nos dará como resultado una  $n$  óptima para cada estrato.

De manera que el total de la subpoblación se multiplicará por esa fracción constante a fin de obtener el tamaño de muestra para el estrato.

Es necesario estratificar la muestra tomando como criterio de estratificación los diferentes grupos de estudiantes de Ingeniería Industrial con el objetivo de seleccionar muestras representativas de cada estrato.

El **Cuadro 2** muestra los resultados de la estratificación por lo que la muestra de 62 estudiantes quedó repartida entre los diferentes grupos.

**Cuadro 2.** Muestreo estratificado por grupos.

Estratos	Grupos	Total población (fh) = $n/N=0.3678$	Muestra
1	I-31	29	12
2	I-32	28	11
3	I-41	28	11
4	I-42	28	10
5	I-51	25	9
6	I-52	26	9
		N= 164	n=62

**Fuente:** Elaboración propia.

**Resultado de la encuesta realizada a estudiantes de Ingeniería Industrial.**

Se aplicó la encuesta que aparece en el Anexo 3 a la muestra de estudiantes seleccionadas, para determinar su opinión respecto a la forma de enseñanza de las ecuaciones diferenciales y a la utilidad de su aplicación para resolver situaciones problemáticas relacionadas con su perfil profesional.

Los principales resultados que arrojó dicha encuesta se muestran en el cuadro 2.4

**Cuadro 2.4** Principales resultados de la encuesta aplicada.

<p>1. Los contenidos que se impartieron en el tema de estudio de las ecuaciones diferenciales dentro de la asignatura Matemática III han tenido:                  Poca <b>48</b> Media <b>12</b> Mucha <b>2</b> aplicación en problemas típicos de su perfil.</p> <p>2. ¿Consideras que el estudio de las ecuaciones diferenciales es de utilidad para su formación profesional?                  Si <b>38</b> No <b>4</b> No sé <b>20</b></p> <p>3. ¿Has resuelto alguna situación problemática relacionada con tu carrera a través de las ecuaciones diferenciales?                  Si <b>8</b> No <b>50</b> No me acuerdo <b>4</b></p> <p>4. ¿Les hubiera resultado más interesante contar con un conjunto de problemas típicos de su perfil profesional que se resolvieran a través de las ecuaciones</p>
--

diferenciales y que enriqueciera la bibliografía del tema en cuestión?

Si 56 No 5 Tal vez 3

5. ¿Sería más satisfactorio para su desarrollo como futuros profesionales el estudio de las ecuaciones diferenciales si su enseñanza se dirigiera a través de la resolución de problemas típicos del su perfil?

Si 57 No 1 Tal vez 5

**Fuente:** elaboración propia.

Haciendo un análisis de los resultados se puede apreciar que:

1. El 74.41 % de los estudiantes encuestados consideran que los contenidos recibidos en la asignatura Matemática III, específicamente el tema que aborda las ecuaciones diferenciales han tenido poca aplicación en problemas relacionados con su perfil profesional, el 19.35 % media y el 3.22 % con mucha aplicación. Se puede destacar que ningún estudiante lo consideró aburrido e innecesario.

2. El 61.29 % coincidió en que el estudio de las ecuaciones diferenciales resultaron de gran utilidad para su formación, mientras que el 32.25 % desconoce la utilidad para su carrera en particular y un 6.45 % piensa que no.

3. El 80.64 % de los estudiantes no han aplicado las ecuaciones diferenciales para resolver alguna situación problémica específica que se les haya presentado en algún momento dentro del transcurso de su carrera, un 12.9 % plantea que si y el 6.45 % no recuerda haberlo hecho.

4. El 90.32 % de los encuestados opinan que hubiera resultado interesante contar dentro de la bibliografía del tema en cuestión con un conjunto de problemas relacionados con situaciones características de su perfil y que se resolvieran aplicando las ecuaciones diferenciales, sin embargo un 8.06 % opina que no y un 4.83 % que tal vez si sería interesante.

5. El 91.93 % de la totalidad de estudiantes encuestados consideran que sería provechosa y satisfactorio para su desarrollo como futuros profesionales si la enseñanza de las ecuaciones diferenciales estuviera dirigida a través de la resolución de problemas típicos de su perfil, un 1.61% que no y un 8.06 % que tal vez.

Haciendo un análisis más profundo de estos resultados, se aprecia que más del 74 % de los estudiantes encuestados, que recibieron la asignatura Matemática III opinan, que

dentro del tema de las ecuaciones diferenciales no se evidencia la aplicación de problemas prácticos vinculados con su carrera, pero sin embargo un 61.29 % la consideran útil para su formación profesional aunque un 80.64 % no las ha utilizado para resolver alguna situación concreta vinculada con su perfil profesional; esto se encuentra en total correspondencia con que a un 90.32 % de los estudiantes les resulte interesante contar con un conjunto de problemas típicos de su perfil que se resuelvan aplicando las ecuaciones diferenciales y que complemente la bibliografía del tema, además que el 90.32 % considera provechoso y satisfactorio que su enseñanza se dirigiera a través de la resolución de problemas típicos de su perfil.

A través de la encuesta se pudo determinar de forma general que los estudiantes de Ingeniería Industrial no aplican las ecuaciones diferenciales para resolver problemas relacionados con su perfil profesional y que resultaría de mucha utilidad contar dentro de la bibliografía del tema con un conjunto de problemas que resolvieran situaciones reales dentro de su ámbito profesional a través de la aplicación y el estudio de las ecuaciones diferenciales.

#### **2.4 Criterio de Expertos.**

Para la validación de los resultados del trabajo de investigación sobre la colección de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial, se aplica el método de criterio de expertos. Para esto, se procedió a determinar la cantidad de expertos y obtener el consentimiento de ellos para su participación. Se propone que la cantidad de expertos a seleccionar debe ser menor o igual que a  $a * n$  donde:

a - Número entre 0.7 y 1, prefijado por el investigador.

n- Elementos que caracterizan un determinado objeto de estudio (número de atributos).

En esta investigación se toma que “n” es igual a 10 y se fija por parte del investigador que “a” es igual a 0.7.

Proceso de selección de los expertos:

Para la selección del experto se utiliza el llamado coeficiente de competencia el cual se determina de acuerdo con la opinión del experto sobre su nivel de conocimiento con respecto al problema que se está resolviendo y con las fuentes que le permiten comprobar su valoración. El coeficiente de competencia se calcula de la siguiente forma:  $K = (K_c + K_a) / 2$

De esta forma, resulta para el coeficiente de competencia K un valor comprendido entre 0,25 (mínimo posible) y 1 (máximo posible). De acuerdo con los valores obtenidos, se asume un criterio para decidir si el experto debe ser incluido y el peso que deben tener sus opiniones. Los valores de K considerados para determinar la inclusión de los sujetos como expertos fueron 0,8, 0,9 y 1. Además de estos datos recogidos sobre los expertos se tuvo en cuenta su creatividad, capacidad de análisis, espíritu autocrítico y disposición a participar en el trabajo; todo lo cual se valoró en los contactos previos que se sostuvieron durante la aplicación de la consulta. Para determinar el coeficiente de competencia K de los sujetos seleccionados como expertos potenciales, se siguió el siguiente procedimiento. Este coeficiente se conforma a partir de otros dos:

Donde: Kc (es el coeficiente de conocimiento o información que tiene el experto respecto al problema, calculado sobre la valoración del propio experto) y Ka (es el coeficiente de argumentación o fundamentación de los criterios del experto). Para calcular el coeficiente de conocimiento o de información

Kc que posee el experto sobre el problema que se analiza, se determina a partir de su propia valoración, lo que ofrece el valor para el cálculo del Kc. ( Ver Anexo No 4, pregunta 1) a partir de solicitarle primeramente que valore su competencia sobre el problema en una escala de 0 a 10 (escala en que el 0 representa que el experto no tiene conocimiento alguno sobre el tema y el 10, expresa que posee una valoración completa sobre el mismo; de acuerdo a su autovaloración el experto ubica su competencia en algún punto de esta escala. Donde  $Kc = \text{coeficiente de conocimiento} / 10$ .

**Tabla No 1.** Determinación del coeficiente de conocimiento Kc de los expertos potenciales.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
Kc	0.9	0.7	0.9	0.8	0.9	0.8	0.9	0.8	0.7	0.8

**Fuente:** Elaboración propia.

En la segunda fase se obtiene la información que posibilita calcular el coeficiente de argumentación. El coeficiente de argumentación (Ka) que se estima, a partir del análisis del propio experto, y sus niveles de fundamentación sobre el tema. Para determinar este coeficiente se le pide al experto que precise cuál de las fuentes él considera que

ha influido en su conocimiento de acuerdo con el grado (alto, medio, bajo). Las respuestas dadas por el experto se valoran de acuerdo a los valores de la tabla patrón para cada una de las casillas marcadas. La escala que se ha asignado en la segunda columna para medir esta valoración es alto, medio y bajo. (Ver Anexo No 4, pregunta 2). A continuación se muestran los valores fijados para el cálculo de este coeficiente:

**Tabla No 2.** Datos para el cálculo del coeficiente de argumentación Ka.

Fuentes que han influido en sus conocimientos sobre la aplicación de las ecuaciones diferenciales en problemas típicos del la carrera de Ingeniería Industrial.	Grado de influencia de los criterios		
	Alto	Medio	Bajo
Sus análisis teóricos sobre este tema.	0.27	0.21	0.13
Su experiencia en el trabajo profesional en Cuba.	0.24	0.22	0.12
Consulta de trabajos de autores cubanos.	0.14	0.10	0.06
Consulta de trabajos de autores extranjeros.	0.08	0.06	0.04
Sus conocimientos/experiencias sobre estos aspectos en el extranjero.	0.09	0.07	0.05
Su intuición basada en sus conocimientos y experiencias profesionales.	0.18	0.14	0.10

**Fuente:** Adaptado de Frías, R. (2008).

A continuación se muestran los resultados obtenidos del coeficiente de argumentación (Ka), basado en los conocimientos teóricos y prácticos adquiridos por cada experto:

**Tabla No 3.** Determinación del coeficiente de argumentación Ka de los expertos potenciales.

Fuentes	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
1. Sus análisis teóricos sobre este tema.	0.27	0.21	0.27	0.24	0.27	0.21	0.27	0.21	0.21	0.27
2. Su experiencia en el trabajo profesional en Cuba.	0.24	0.22	0.24	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22
3. Consulta de trabajos de autores cubanos.	0.14	0.10	0.10	0.14	0.10	0.14	0.14	0.14	0.10	0.14
4. Consulta	0.08	0.06	0.08	0.06	0.06	0.06	0.04	0.06	0.04	0.06

de trabajos de autores extranjeros.										
5. Sus conocimientos y/o experiencias sobre estos aspectos en el extranjero.	0.09	0.05	0.09	0.07	0.07	0.07	0.07	0.09	0.05	0.07
6. Su intuición basada en sus experiencias profesionales.	0.18	0.14	0.18	0.18	0.18	0.18	0.14	0.14	0.10	0.14
<b>Ka</b>	1	0.56	0.96	0.91	0.90	0.89	0.88	0.86	0.72	0.94

**Fuente:** Elaboración propia

En la tercera fase se obtiene el Coeficiente de Competencia K del experto, al promediar la puntuación correspondiente a cada una de las partes del cuestionario, se propone que este coeficiente debe estar entre  $0.8 < K < 1$ , con el objetivo de hacer una selección rigurosa de los profesionales dispuestos a participar en la investigación.

Una vez calculado el coeficiente de conocimiento y de argumentación, con estos datos se determinó el coeficiente de competencia de cada experto potencial a través de la fórmula:  $K = (Kc + Ka) / 2$ .

**Tabla No 4.** Cálculo del coeficiente de competencia de los expertos potenciales.

Fuentes	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
<b>K</b>	0.95	0.63	0.93	0.85	0.90	0.83	0.89	0.88	0.71	0.92

**Fuente:** Elaboración propia

El método exige un coeficiente de competencia superior a 0.8 para ser considerado experto en la temática, por tanto todos los que arrojaron resultados menores no son considerados como tal. Por lo que se ha considerado como expertos seleccionados en esta investigación a los 8 expertos con valores correspondientes entre 0,83 y 0,95 por satisfacer los requisitos del método.

**Validación por los expertos de la colección de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial donde se aplican las ecuaciones diferenciales.**

Para la valoración por el grupo de expertos, de la colección de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial, se aplicó un segundo cuestionario (Ver Anexo No 5) con el cual se obtuvieron los siguientes resultados:

Aspectos	MA	BA	A	PA	I
1. Posiciones teóricas en las que se apoya la colección de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial que requiera la aplicación de las ecuaciones diferenciales.	50%	50%			
2. Correspondencia del objetivo de la colección de problemas típicos con su intencionalidad.	75%	25%			
3. Utilización de la SICA (Sucesión de Indicaciones de carácter cuasi-Algorítmico) para modelar y resolver los problemas que se proponen en la colección.	62.5%	37.5%			
4. Contribución de la colección de problemas al desarrollo de las habilidades en la modelación y resolución de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial que requieran la aplicación de las ecuaciones diferenciales para obtener su solución.	75%	25%			
5. Factibilidad y aplicabilidad de la colección de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial que requiera la aplicación de las ecuaciones diferenciales.	50%	37,5%	12.5%		

Según los resultados obtenidos en el mismo se aprecia que sería pertinente, aplicable y factible la colección de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial para contribuir a desarrollar habilidades en la modelación y resolución de problemas donde se aplican las ecuaciones diferenciales

### **Valoración de consensos para los expertos a través del Modelo Torgerson-Delphi.**

Con el modelo Torgerson se trata de dar objetividad a los criterios de los expertos u otro personal encuestado, al convertir la escala ordinal en escala de intervalo (de cualitativo a cuantitativo).

Se opta por emplear este modelo matemático, que permite no sólo asignar un valor de escala a cada indicador, sino determinar límites entre cada categoría y de esta forma, obtener los límites reales (asignados por un número real) entre las categorías ordinales y sus correspondientes a escala de intervalo (números reales), entre cada uno de los rangos que componen los criterios evaluativos dados por los expertos, así, se pueden conocer con precisión cuáles son los límites reales de cada categoría; es decir, hasta qué valores reales se puede considerar que la variable es Muy adecuada, Bastante adecuada, Adecuada, Poco adecuada e inadecuada.

Esta técnica permitió extraer la información de los expertos que conforman un grupo heterogéneo, analizar las convergencias de opiniones en torno al problema que aborda la investigación, facilitar a los expertos entrevistados emitir sus opiniones sin saber qué es lo que otros colegas opinan llegando a un consenso de ideas, reflexiones, criterios incidiendo en la mejora de la problemática planteada. Se basó en la utilización sistemática e iterativa de juicios de opiniones de un grupo de expertos hasta llegar a un acuerdo, en este proceso se trató de evitar las influencias de individuos o grupos dominantes y al mismo tiempo existió la retroalimentación facilitando el acuerdo final.

En este caso al aplicar el Modelo Torgerson-Delphi se obtuvieron los siguientes resultados: (Anexo No 6).

Todas las preguntas se consideran muy adecuadas, por lo que la autora considera según las respuestas dadas por los expertos en el cuestionario número 2 (Anexo No 5) que la propuesta de una colección de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial para contribuir a desarrollar habilidades en la resolución y modelación de problemas donde se aplican las ecuaciones diferenciales, es pertinente, aplicable y factible.

### Conclusiones Parciales

- Una alternativa eficiente para mantener al estudiante de ingeniería Industrial motivado por el estudio de las ecuaciones diferenciales, es vincular el tema con situaciones problémicas que se relacionen con el entorno profesional.
- Con el apoyo de una SICA (Sucesión de Indicaciones con carácter Cuasi-Algorímic) para la resolución de problemas aplicando las ecuaciones diferenciales, se puede contribuir a desarrollar habilidades en proceso de resolución de problemas.
- Los estudiantes a través de la encuesta demostraron, su inconformidad respecto a la forma en que se impartió el tema de las ecuaciones diferenciales y la escasa vinculación con situaciones problémicas de su interés profesional.

## **Conclusiones de la investigación**

- ❖ La enseñanza de las ecuaciones diferenciales a través de la resolución de problemas típicos del perfil de un ingeniero industrial, constituye la vía más eficaz para demostrar al estudiante la importancia y aplicación de los contenidos matemáticos para su formación profesional.
- ❖ Los estudiantes de Ingeniería Industrial de la Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos” valoraron el tema de las ecuaciones diferenciales como poco relevante para su formación profesional, debido a que durante su estudio no experimentaron la relación con su carrera.
- ❖ Los modos de actuación del Ingeniero Industrial que se encuentran más relacionados con la aplicación de las ecuaciones diferenciales son los que están dirigidos a los procesos productivos, control de la calidad, planeación, toma de decisiones y a la gestión de los recursos humanos de cualquier empresa.
- ❖ La colección de problemas que se propone en la investigación contribuye a desarrollar habilidades en la modelación y resolución de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial mediante la aplicación de las ecuaciones diferenciales y a través de una SICA (Sucesión de Indicaciones con carácter Cuasi-Algorítmicas) para facilitar el proceso de solución.
- ❖ La valoración positiva, como resultado de la aplicación del criterio de expertos, acredita que es factible la colección de problemas para contribuir al desarrollo de habilidades en la modelación y resolución de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial que requiere la aplicación de las ecuaciones diferenciales.

## **Recomendaciones**

En base a los resultados obtenidos en esta investigación se plantean las siguientes recomendaciones que permitan ampliar y perfeccionar los elementos abordados en esta tesis de maestría.

- ❖ Comenzar a utilizar el conjunto de problemas típicos del perfil de un ingeniero industrial que se elaboró, como bibliografía complementaria para el tema de las ecuaciones diferenciales dentro de la asignatura Matemática III y valorar su efectividad en los próximos cursos.
- ❖ Divulgar los resultados obtenidos en el trabajo investigativo a través de publicaciones científicas en revistas y eventos científicos.
- ❖ Enriquecer y validar la propuesta que se hace en este trabajo en los cursos siguientes, de modo que los resultados obtenidos constituyan un punto de partida para el estudio en este campo.
- ❖ Emplear este documento como material de consulta para estudiantes, docentes e interesados en la temática abordada.

## **Bibliografía**

- 1-**Areias, E, L y Seide, E. G.(2005)**. La resolución de problemas: una alternativa para la estructuración de los conocimientos matemáticos en una disciplina docente, el análisis matemático. *Pedagogía Universitaria*, revista electrónica de la dirección de formación del profesional, ISSN 1609-4808.
- 2-**Alarcón, Nancy y Méndez, Ricardo (2007)**. La calidad y el contexto actual de la Educación Superior. Monografía.
- 3-**Alonso, I. (2001)**. La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación. Tesis Ph. D. Universidad de Oriente. Cuba.
- 4-**Ballester, S (1992)**. Enseñanza de la Matemática y dinámica de grupo / Sergio Ballester Pedroso.- La Habana: Ed. Academia, 1992.
- 5-**Bransford, J. D. And Stein, B. S. (1986)**. The ideal problem solver. A guide for improving thinking, learning and creativity. New York: W. H. Freeman and Company.
- 6-**Berenguer, I, A y Sánchez, N, M (2004)**. La resolución de problemas matemáticos, una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. Universidad de Oriente.
- 7-**Berenguer, Alonso, Isabel**. El problema matemático y su proceso de resolución. Una perspectiva desde la teoría del procesamiento de la información. Departamento de Matemática. Universidad de Oriente.
- 8- **Branca, N. A. (1980)**. Problem solving as a goal, process and basic skill. In S. Krulik and R. Reyes (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics*, Yearbook (pp. 3-8). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- 9-**Brown, S.I. (1983)**. The art of problem posing. Philadelphia: Franklin Institute Press.
- 10-**Breña, Luis y Timana, Carlos (-)**.La heurística y la propuesta de Polya aplicada a la resolución de problemas de Química orgánica. Metodología general para la resolución de problemas.
- 11-**Centro Rector de la Universidad de La Habana, (2008)**. Plan de estudio D de la carrera de Ingeniería Industrial. Universidad de La Habana.
- 12-**Colectivo de Autores (1993)**. Metodología de la enseñanza de la Matemática I, p.246.

- 13-**Callejo de la Vega, M. L.** (1998): Desarrollo de la creatividad a través de la Resolución de Problemas. Red Olímpica. Bs. As.
- 14-**Campistrous, L. y Rizo, C.** (1996). Aprende a resolver problemas aritméticos. Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación. 103p
- 15- **Díaz Beltrán J.** (2006). Historia de la Enseñanza Superior. La Educación Superior en el mundo. Folleto educacional. M.E.S.
- 16- **Delgado, J. R.** (1999). La enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: La estructuración del conocimiento y el desarrollo de habilidades Generales matemáticas. Tesis Ph. D. ISPJAE. Ciudad Habana. Cuba.
- 17-**Delgado, Adriana** (2010). La resolución de problemas de decisión empresarial a través de la Investigación de Operaciones. Matemática Educativa.
- 18-**Díaz Beltrán J.** (2006). Historia de la Enseñanza Superior. La Educación Superior en el mundo. Folleto educacional. M.E.S.
- 19-**Escalona, Moreno, Iván** (2003). Introducción a la ingeniería Industrial. Producción, Procesos y operaciones.
- 20-**Echeverría García, Luiska** (2009). Actividades didácticas que contribuyan a la motivación hacia la solución de problemas matemáticos en la enseñanza de primaria. Cárdenas. 120 h. Tesis en opción al título de Master en Ciencias de la Enseñanza Primaria. Sede Pedagógica Universitaria “Nicolás Guillén”.
- 21-**Gentner, D. & A. Stevens** (eds.) 1983 Mental Models. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, NJ.
- 22-**González González, M.** (2006). La didáctica y el proceso de enseñanza–aprendizaje. Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”.
- 23-**García Escobio, M.** (2006). Motivación y Creatividad en Educación. No. 118 (mayo – agosto) La Habana.
- 24-**Horruitiner Silva P.** 2006. La universidad cubana: el modelo de formación. La Habana: Editorial Félix Varela; ISBN 959-258-894-5.
- 25- **Hernández, Camacho, Reinaldo** (2010). La heurística en la resolución de problemas de cualquier disciplina.

- 26-**Hernández, C, Reinaldo (2000)**. Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto. Tesis de doctorado.
- 27-**J. J. Merel**. (s/a) Técnicas heurísticas de resolución de problemas: computación evolutiva y redes neuronales.
- 28-**KRULID J. Rudnick**, Reasoning and Problem Solving, Mass Allyn J. Bacon, 1993.
- 29-**Mazarío Triana, Israel (2006)**. Enseñar a aprender: conocimientos, experiencias y contextos.
- 30- **Mazarío, Triana, Israel (2005)**. La resolución de problemas: un reto para educación matemática contemporánea. Pedagogía Universitaria, revista electrónica de la dirección de formación del profesional, ISSN 1609-4808.
- 31-**Mazarío, Triana, Israel. (2002)**. La resolución de problemas en la Matemática I y II de la carrera de Agronomía.
- 32- **Mondéjar Rodríguez, L. (2001)**. La enseñanza problémica. Fundamentos teóricos y casos de aplicación. Perú: Libro de editores Gabrielle.
- 33- **Martín Juan A; Gómez Ángel; Gómez Carlos (2003)**. Enseñanza basada en problemas: una alternativa para el desarrollar el pensamiento lógico en la Educación Superior. Revista Digital UNBRAL 2000-No-11. <http://www.reduc.cu>
- 34-**Martínez,M.**(1986) "Fundamentos teóricos y metodológicos de la enseñanza problémica" [En: Curso Pre-reunión. Pedagogía'86, pág. 283]
- 35-**Nieto, S, José H (2007)**. Resolución de Problemas, matemática y computación.
- 36- **Newell, A. and H.A Simon (1972)**: Human problem solving. Printice-Hall.
- 37-**Nápoles, Valdés, J.** (s/a) La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias: un enfoque histórico.
- 38-**Osorio, A. y Hernández, A. (2006)** El perfeccionamiento de la enseñanza de las matemáticas. Una exigencia actual. Material mimeografiado. ISP Holguín.
- 39-**Parra, B. (1990)** Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. Educación matemática. p. 22-31.
- 40-**Polya, G. (1962)**. Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Vol. 1. Ed. John Wiley and Sons, Inc. USA.
- 41-**Polya, G.** "¿Cómo plantear y resolver problemas?" Editorial Trillas. C.México, 1986.

- 42-**Polya, G (1945)**. How to solve it Ed. Tecnos Madrid. España.
- 43-**Schoenfeld, A. (1985)**. Sugerencias para la enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. En Separata del libro “La enseñanza de la matemática a debate”. (Pp.13-47). Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.
- 44- **Concari, B, Sonia. (2010)**.El modelado y la resolución de problemas: ejes para la enseñanza de la física para ingenieros.
- 45-Santos Trigo, Luis M (1994). La resolución de problemas en el aprendizaje de la Matemática / Luz M. Santos Trigo.- México: Cuaderno de Investigación n° 28, 1994.- 136p
- 46- (2007). Matemática e Ingeniería: nuevas conexiones. Ingeniare. Revista chilena de ingeniería, vol. 15 No 3, 2007, pp. 216-217
- 47-**Wikipedia 2009**. [disco] Enciclopedia libre. Consultado: mayo 2010.
- 48-La nueva universidad y su contribución a la universalización del conocimiento (2006). La Habana: Editorial “Félix Varela”.
- 49-**Zill, Dennis (2006)**. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamericano.

## Anexos

### Anexo 1. Colección de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial que se resuelven aplicando las ecuaciones diferenciales de primer orden.

#### Aplicación de las ecuaciones diferenciales de variables separables.

1-El jefe de producción de la Empresa Cítricos Playa Girón comienza el proceso de producción de la pulpa de mango con un total de 500 tanques en el almacén, se conocen que estos crecen con una rapidez proporcional a la cantidad y que después de 3 horas hay 8000 tanques en el almacén, para realizar un envío al frigorífico se debe contar con no menos de 18 000 tanques de pulpa de mango en el almacén.

- Halle una función para determinar el número de tanques que hay en el almacén al cabo de  $t$  horas.
- ¿Cuántas tanques hay en el almacén al cabo de 6 horas?
- ¿Cuánto tiempo se necesitará para realizar el envío al frigorífico?

2-Un empresa importadora de alimentos a nivel nacional, para realizar un contrato con una firma extranjera por un período de 5 años, necesita conocer la función que expresa el total de la población en cada año, para que el proceso de planeación y distribución de los alimentos en el país sea efectiva, asumiendo que la tasa de crecimiento de una población es aproximadamente proporcional al tamaño de la población, y utilizando la tabla que se adjunta para la población nacional en miles de habitantes.

- Utilice la función para estimar la población en el año 2015.

Año	Población	t
1995	963	0
2000	802	5
2005	960	10
2010	835	15
2015	840	20

3-Un jefe de recursos humanos de una empresa, controla un número considerable de trabajadores entre los que se encuentra el contingente Mario Muñoz, en el cual se ha propagado una enfermedad, asumiendo que tenemos una población grande pero finita

y que los trabajadores de este contingente están aislados en un área aislada. Supondremos que hay solo dos tipos de trabajadores en este grupo, unos que tienen la enfermedad contagiosa, llamados infectados, y otros que no tienen la enfermedad, esto es, no infectado, pero que son capaces de adquirirla al primer contacto con un trabajador infectado. Deseamos obtener una función para el número de trabajadores infectados en cualquier tiempo, dado que inicialmente hay un número específico de trabajadores infectados.

4-El encargado de recursos humanos de una empresa de proyectos, dentro de los que tiene asignados una tarea de urgente terminación, se le presenta la siguiente situación, uno de los analistas del proyecto que cuenta con 1000 trabajadores regresó con gripa. Se supone que la gripa se propaga con una rapidez directamente proporcional al número de agripados como también al número de no agripados. El jefe de recursos humanos necesita determinar el número de agripados cinco días después, para en caso necesario llevar a cabo la contratación de un personal extra para terminar la tarea, si se observa que el número de agripados el primer día es 100.

5- Para estimar la calidad de la producción de cierto alimento, se estima en  $N$  el número de organismos de una cierta clase presentes en el paquete. Al cabo de 60 días el número  $N$  ha aumentado a  $1000N$ . Sin embargo, el número  $200N$  es considerado como el límite saludable y lo que determina que el proceso de producción del producto sea exitoso. A los cuantos días, después de elaborado, vence el alimento.

6- Para llevar a cabo el control de la calidad de la leche que se embotella en una empresa de productos lácteos se realizó un análisis a una botella de leche y se encontraron 500 organismos (bacterias) un día después de haber sido embotellada y al segundo día se encontraron 8000 organismos. La calidad de la leche embotellada depende del número de organismos que presenta la leche en el momento de embotellar. ¿Cuál es el número de organismos en el momento de embotellar la leche?

7-La empresa de extracción y procesamiento de minerales Sheriff está llevando a cabo la excavación de un pozo de petróleo en la región central del Mar Pacífico, se necesita para el control y planeación del proceso conocer el valor de la presión atmosférica a una altura de 2000 m, si se conoce que la razón de cambio de la presión atmosférica  $P$  con respecto a la altura  $h$  es proporcional a  $P$ , siempre que la temperatura sea

constante y que a los  $20^{\circ}\text{C}$ , al nivel del mar, la presión es de 112,5 kPa y para  $h=1000$  m, es de 83,11 kPa.

### **Aplicación de las Ecuaciones diferenciales lineales**

8-Suchel Camacho es una empresa especializada en productos de perfumería, en el mes de febrero se les presentó la siguiente situación: Una cadena de tiendas realizó un pedido urgente de perfume Mariposa como resultado de la demanda del cliente y que está por encima de lo que se produce normalmente, se tuvo que recurrir para su producción a la utilización de un depósito que contiene 100 litros de agua con una concentración de aromatizante de 0,4 kg./L, que se utiliza generalmente como materia prima en la mezcla para la elaboración de otro perfume, y esa misma mezcla se necesitaba para la elaboración del pedido extra de perfume Mariposa pero con menos concentración de ese aromatizante. Si se le suministra a dicho depósito agua pura a razón de 5 litros por minutos, se conoce que la solución se mezcla y se drena del depósito a razón de 3 L/min.

- a) Hallar una función que exprese la cantidad de aromatizante en el tanque a los  $t$  minutos.
- b) Determinar la cantidad de aromatizante en el tanque a los 22 minutos.
- c) Determinar la concentración de aromatizante en el tanque a los 22 minutos.

9- La fábrica nacional de pintura Vitral está poniendo en práctica un plan para la producción de nuevos colores de pintura para ofertar a la población, durante el proceso de producción se presentaron las siguientes problemáticas:

-El colorante sólido que se utiliza para la producción del color salmón A es disuelto en un líquido no volátil, entra a un tanque a una velocidad  $v_1$  galones de solución/minuto y con una concentración de  $c_1$  libras de colorante/galón de solución. La solución bien homogenizada sale del tanque a una velocidad de  $v_2$  galones de solución/min y entra a un segundo tanque del cual sale posteriormente a una velocidad de  $v_3$  galones de solución/min. Inicialmente el primer tanque tenía  $P_1$  libras de colorante disueltas en  $Q_1$  galones de solución y el segundo tanque  $P_2$  libras de colorante disueltas en  $Q_2$  galones de solución. Para controlar la efectividad del proceso se necesita encontrar las dos ecuaciones que determinen las libras de colorante presentes en cada tanque en cualquier tiempo  $t$ .

9.1-Una solución líquida de alcohol en agua, está constantemente circulando entre dos tanques a velocidades  $v_2$  y  $v_3$  galones/minuto. Si al primer tanque también entra una solución a una velocidad de  $v_1$  galones /minuto y de concentración  $c_1$  galones de alcohol/galón de solución y las cantidades iniciales en los tanques son  $P_1$  y  $P_2$  galones de alcohol en  $Q_1$  y  $Q_2$  galones de agua respectivamente. Encontrar dos ecuaciones para determinar los galones de alcohol presentes en cualquier tiempo en cada tanque.

9.2-Un tanque contiene 200 litros de una solución de colorante con una concentración de 1 g/l. El tanque debe enjuagarse con agua limpia que entra a razón de 2 l/min y la solución bien homogenizada sale con la misma rapidez. Encuentre el tiempo que transcurrirá hasta que la concentración del colorante en el tanque alcance el 1% de su valor original.

## Anexo 2.

### DOSIFICACIÓN DEL CONTENIDO DE MATEMÁTICA III PARA INDUSTRIAL CRD

FORMA ENSEÑ.	CONTENIDO
C1	Sucesiones numéricas. Concepto. Límite de una sucesión numérica. Sucesiones convergentes y divergentes. Concepto de serie numérica. Series convergentes y divergentes. Condición necesaria para la convergencia.
C2	Estudio de los criterios para la convergencia de una serie numérica de términos no negativos. Criterio de comparación. Criterio del cociente. Criterio de la raíz. Criterio de la integral.
CP-1	Determinación del carácter de una serie numérica de términos no negativos.
CP-2	Determinación del carácter de una serie numérica de términos no negativos.
C3	Estudio de las series numéricas alternadas. Convergencia absoluta y condicional.

CP-3	Determinación del carácter de una serie numérica alternada.
CP-4	Determinación del carácter de una serie numérica.
C4	Series de Funciones. Radio e intervalo de convergencia. Criterios para la determinación del dominio de convergencia de una serie de potencias. Propiedades de una función definida mediante una serie de potencias: Continuidad, derivación e integración término a término, suma y producto.
CP-5	Determinación del dominio de convergencia de una serie de potencias.
C5	Serie de Taylor. Desarrollo en serie de Taylor de una función. Condición necesaria y suficiente para que una serie de Taylor converja a dicha función.
CP-6	Serie de Taylor.
C6	Series de Fourier. Condiciones de Dirichlet. Aproximación de funciones mediante Series Trigonómicas de Fourier.
CP-7	Serie de Fourier.
CP-8	Series numéricas.
P:P:#1	Prueba Parcial # 1.
C7	Concepto de EDO. Clasificación según orden y grado. Solución general y particular. Interpretación geométrica de la solución general y particular de una ED de 1er orden y 1er grado. Teorema de Existencia y Unicidad de una EDO de 1er orden y 1er grado. Métodos de solución de las EDO de 1er orden. Variables separables en la modelación y resolución de problemas.
C8	Métodos de solución de las ED exactas y reducibles a exactas.
CP-9	Resolución y modelación de problemas aplicando EDO de variables separables, métodos de solución de EDO exacta y reducible a exactas.
C9	Métodos de solución de las ED lineales y de Bernoulli en la modelación y resolución de problemas.
CP-10	Resolución y modelación de problemas aplicando las ED lineales y

	de Bernoulli.
CP-11	Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden.
CP-12	Resolución de problemas físicos y geométricos a través de una EDO.
C10	EDO lineales de orden superior. Teorema fundamental sobre la solución general de ED lineales de orden "n". Método de solución de las ED lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes. Aplicación en la resolución y modelación de problemas.
CP-13	Resolución y modelación de problemas de las ED lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes.
C11	Método de solución de las ED lineales no homogéneas de orden n con coeficientes constantes. Método de los coeficientes indeterminados.
CP-14	Resolución de ED lineales no homogéneas de orden n con coeficientes constantes.
CP-15	Resolución de ED lineales no homogéneas de orden n con coeficientes constantes.
CP-16	Solución de EDO de primer orden y de orden superior.
P:P:#2	Prueba Parcial # 2.
C12	Sistemas de EDO lineales con coeficientes constantes. Métodos de solución.
CP-17	Resolución de sistemas de EDO lineales con coeficientes constantes.
CP-18	Utilización de asistente matemático para resolver EDO

### Anexo 3. Encuesta a estudiantes.

1. Los contenidos que se impartieron en el tema de estudio de las ecuaciones diferenciales dentro de la asignatura Matemática III han tenido:

Poca\_\_\_ Media\_\_\_ Mucha \_\_\_ aplicación en problemas típicos de su perfil.

2. ¿Consideras que el estudio de las ecuaciones diferenciales es de utilidad para su formación profesional?

Si\_\_\_ No\_\_\_ No sé \_\_\_

3. ¿Has resuelto alguna situación problemática relacionada con tu carrera a través de las ecuaciones diferenciales?

Si\_\_\_ No\_\_\_ No me acuerdo \_\_\_.

4. ¿Les hubiera resultado más interesante contar con un conjunto de problemas típicos de su perfil profesional que se resolvieran a través de las ecuaciones diferenciales y que enriqueciera la bibliografía del tema en cuestión?

Si\_\_\_ No\_\_\_ Tal vez \_\_\_.

5. ¿Sería más provechoso para su desarrollo como futuros profesionales el estudio de las ecuaciones diferenciales si su enseñanza se dirigiera a través de la resolución de problemas típicos del su perfil?

Si\_\_\_ No\_\_\_ Tal vez \_\_\_

#### **Anexo 4.**

**Cuestionario # 1 aplicado a profesores del Departamento de Matemática y del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos".**

**Objetivo:** Obtener una muestra adecuada de los expertos, así como poder verificar el grado de experticidad respecto al tema tratado.

**Consigna:** Estimado (a) Colega: Teniendo en cuenta su experiencia profesional en el tema, solicito de Ud. La valoración de esta propuesta. Le agradezco su valiosa colaboración.

Nombre y Apellidos: \_\_\_\_\_

Ocupación: \_\_\_\_\_

Institución a la que pertenece: \_\_\_\_\_

Calificación profesional:

(Marque con una cruz)

\_\_\_\_ Licenciado      \_\_\_\_ Master      \_\_\_\_ Doctor.

Calificación de la categorización profesional:

\_\_\_\_ Asistente      \_\_\_\_ Auxiliar      \_\_\_\_ Titular.

Años de experiencia en la actividad profesional: \_\_\_\_\_

Años de experiencia como investigador científico: \_\_\_\_\_

1. Marque con una cruz (X) en la escala creciente del 1 al 10 el valor que se corresponda con el nivel de conocimiento e información que tiene con el tema investigado.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Marque con una cruz (X) en la categoría que corresponda con el nivel de conocimiento e información que tiene con el tema investigado.

<b>Fuentes de argumentación o fundamentación</b>	Alto	Medio	Bajo
Su análisis teórico sobre el tema.			
Su experiencia en el trabajo profesional en Cuba			
Consulta de trabajos de autores cubanos			
Consulta de trabajos de autores extranjeros			
Su conocimiento y/o experiencia sobre estos aspectos en el extranjero.			
Su intuición basada en sus conocimientos y experiencias profesionales.			

### **Anexo 5.**

**Cuestionario # 2 aplicado a profesores del Departamento de Matemática y del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos".**

**Objetivo:** Valorar la pertinencia, aplicabilidad y factibilidad de la propuesta de "Aplicación de las ecuaciones diferenciales en la modelación y resolución de problemas típicos del perfil del Ingeniero Industrial."

**Consigna:** Estimado (a) Colega: Teniendo en cuenta su experiencia profesional en el tema, solicito de Ud. La valoración de esta propuesta. Le agradezco su valiosa colaboración.

Responda con la mayor sinceridad posible cada una de las preguntas que Unidades de medición: Muy Adecuado (5), Bastante Adecuado (4), Adecuado (3),

Poco Adecuado (2), Inadecuado (1).

	Aspectos a evaluar	5	4	3	2	1
1.	Posiciones teóricas en las que se apoya la colección de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial que requiera la aplicación de las ecuaciones diferenciales.					
2.	Correspondencia del objetivo de la colección de problemas típicos con su intencionalidad.					
3.	Utilización de la SICA (Sucesión de Indicaciones de carácter cuasi-Algorítmico) para modelar y resolver los problemas que se proponen en la colección.					
4.	Contribución de la colección de problemas en el desarrollo de las habilidades en la modelación y resolución de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial que requieran la utilización de las ecuaciones diferenciales para obtener su solución.					
5.	Factibilidad y aplicabilidad de la colección de problemas típicos del perfil de un Ingeniero Industrial que requiera la aplicación de las ecuaciones diferenciales					

Escriba a continuación cualquier consideración que usted valore como importante para el perfeccionamiento de la misma.

---

Muchas gracias.

## Anexo 6

## Modelo Torgerson-Delphi

Modelo Torgerson-Delphi									
P- Número de expertos									
I- Número de items o preguntas									
C - Número de categorías de cada pregunta					<b>P</b>	<b>I</b>	<b>C</b>		
Filas: Items					8	5	5		
Columnas: Categorías		(descendentemente)							
Ejemplo para 8 expertos y 5 preguntas con 5 categorías									
		<b>Categoría</b>	<b>MA</b>	<b>BA</b>	<b>A</b>	<b>PA</b>	<b>I</b>	<b>Pi</b>	<b>N-Pi</b>
<b>Pregunta</b>									
<b>1</b>	<b>Pregunta 1</b>								
	Frecuencia absoluta		4	4	0	0	0		
	Frecuencia acumulada		4	8	8	8	8		
	Frecuencia acumulada relativa		0.5	1	1	1	1		
	Percentil		0	3.5	3.5	3.5	3.5	2.8	-1.1182(MA)
<b>2</b>	<b>Pregunta 2</b>								
	Frecuencia absoluta		6	2	0	0	0		
	Frecuencia acumulada		6	8	8	8	8		
	Frecuencia acumulada relativa		0.75	1	1	1	1		
	Percentil		0.6745	3.5	3.5	3.5	3.5	2.934898	-1.2531(MA)
<b>3</b>	<b>Pregunta 3</b>								
	Frecuencia absoluta		5	3	0	0	0		
	Frecuencia acumulada		5	8	8	8	8		
	Frecuencia acumulada relativa		0.625	1	1	1	1		
	Percentil		0.3186	3.5	3.5	3.5	3.5	2.863728	-1.18193 (MA)
<b>4</b>	<b>Pregunta 4</b>								
	Frecuencia absoluta		6	2	0	0	0		
	Frecuencia acumulada		6	8	8	8	8		
	Frecuencia acumulada relativa		0.75	1	1	1	1		
	Percentil		0.6745	3.5	3.5	3.5	3.5	2.934898	-1.2531 (MA)
<b>5</b>	<b>Pregunta 5</b>								
	Frecuencia absoluta		4	3	1	0	0		
	Frecuencia acumulada		4	7	8	8	8		
	Frecuencia acumulada relativa		0.5	0.875	1	1	1		
	Percentil		0	1.15	3.5	3.5	3.5	2.33007	-0.64827 (MA)
<b>Nj</b>		<b>C1</b>	<b>C2</b>	<b>C3</b>	<b>C4</b>	<b>C5</b>	<b>N</b>		
		0.3335	3.03	3.5	3.5	3.5	1.681797		
<b>Clasificación</b>									
-1.1182			Menor que 0,3335 (MA)						
-1.2531			Menor que 0,3335 (MA)						
-1.18193			Menor que 0,3335 (MA)						
-1.2531			Menor que 0,3335 (MA)						
-0.64827			Menor que 0,3335 (MA)						
<b>Todas las preguntas se clasifican como Muy Adecuadas</b>									