

*Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”  
Facultad de Ciencias Técnicas*



## **OPTIMIZACIÓN DE LA TORRE AUTOSOPORTADA BUEY CABÓN MEDIANTE ALGORITMOS GENÉTICOS**

**Trabajo de Diploma en Ingeniería Civil**

**Autor: Jorge Inda Castillo**

**Tutor(es): Ing. Juan Carlos Verdecia Somoano**

**Ing. Javier Alejandro García Miranda**

*Matanzas, 2018*

## **DECLARACIÓN DE AUTORIDAD**

Por este medio declaro que yo Jorge Inda Castillo soy el único autor de este trabajo de diploma y, en calidad de tal, autorizo a la Universidad de Matanzas a darle el uso que estime más conveniente.



## **AGRADECIMIENTOS**

- A mi mamá, por su entrega incondicional y amor, por nunca dejarme solo, ayudarme y brindarme todo su apoyo en cada momento.
- A mi papá, por su guía, sacrificio y amor, por ser mi ejemplo a seguir siempre y mi mayor orgullo.
- A mi madrina, donde quiera que este, sin su confianza y ayuda no hubiera llegado a este punto.
- A Naily, mi mejor amiga y mi novia querida por estar siempre conmigo apoyándome, incluso en la distancia.
- A Juan Carlos y Javier mis tutores por estar hasta en el más mínimo detalle de este proyecto, por la gran confianza, disponibilidad y ayuda incondicional para la realización de este.
- A mi tía Dania que ha sido como una segunda madre para mí.
- A mi familia por su ayuda y confianza desde el inicio.
- A mis amigos cercanos que me apoyaron a lo largo de mi carrera.
- A Alejandro por su exigencia en la realización de este trabajo y por su guía y ayuda.
- A mis profesores que me compartieron sus conocimientos tanto en el aula como fuera de ella.
- A todas las personas que colaboraron de una forma u otra.

A todos muchas gracias.

## RESUMEN

Unido con el auge de las comunicaciones en Cuba, la demanda de torres para esta función ha ido en ascenso, el diseño estructural de dichas torres se realiza en gran parte basado en la experiencia del diseñador, el cual mediante el método de prueba y error consigue una configuración capaz de resistir las acciones externas. La tendencia mundial en el diseño de estructuras complejas como las torres es la implementación de técnicas de optimización, siendo una de las técnicas más eficientes para ello, el método de algoritmos genéticos (AG). Este trabajo está orientado a la aplicación de este método a una torre autosoportada con el objetivo de disminuir el peso y en consecuencia aspectos como los recursos, materiales, factibilidad, costos entre otros lo que facilita mejoras no solo en la calidad sino también en la economía, con respecto al diseño original sin la aplicación de los AG.

**Palabras claves:** Algoritmo Genético, torres, optimización, experiencia, diseño.

## **ABSTRACT**

Coupled with the rise of communications in Cuba, the demand for towers for this function has been increasing, the structural design of these towers is largely based in the experience of the designer, which through the trial and error method achieves a configuration capable of resisting external actions. The global trend in the design of complex structures such as towers is the implementation of optimization techniques, one of the most efficient techniques for which is the method of genetic algorithms (AG). This work is oriented to the application of this method to a self-supported tower with the objective of reducing the weight and consequently aspects such as resources, materials, feasibility, costs among others, which facilitates improvements not only in quality but also in the economy, with respect to the original design without the application of the AG.

Keywords: Genetic Algorithm, towers, optimization, experience, design

## TABLA DE CONTENIDO

Introducción .....	1
Capítulo 1: Estado del Arte de la optimización estructural de torres. ....	4
1.1 Torres de celosía.....	4
1.2 Torres Autosoportadas .....	8
1.2.1 Materiales.....	9
1.2.2 Cargas .....	11
1.3 Optimización.....	12
1.3.1 Optimización estructural.....	13
1.4 Algoritmo Genético (AG). ....	17
Conclusiones Parciales.....	23
Capítulo 2 Métodos y procedimientos para la optimización de la torre. ....	24
2.1 Descripción y caracterización de la torre objeto de estudio, Buey Cabón. ....	24
2.2 Consideraciones para la modelación del diseño original. ....	26
2.2.1 Modelación. ....	26
2.2.2 Cargas. ....	28
2.3 Determinación de la carga de viento.....	29
2.4 Proceso de optimización con AG.....	32
2.5 Parámetros tomados en cuenta en la optimización.....	36
Conclusiones parciales.....	37
Capítulo 3: Análisis de los Resultados.....	38
3.1 Resultados de la optimización con el AG. ....	38
Conclusiones parciales.....	43
Conclusiones .....	44
Recomendaciones .....	45
Referencias Bibliográficas .....	46
Anexos .....	48

## INTRODUCCIÓN

Las torres de celosía autoportadas son estructuras metálicas, delgadas, con características estructurales de bajo amortiguamiento y flexibles, lo que las hace realmente sensibles a la carga dinámica de viento o sismo (Martín and Elena, 2012). Son las más eficientes por su geometría. Con ellas podemos manejar alturas de hasta 81m en tramos múltiplos de 6m y remate de 3m; se fabrican en planta y se instalan o arman en campo. Por lo general, se usan para sitios en terreno natural o para sitios con difícil acceso en donde resulta complicado el uso de grúa. Su geometría en elevación es de forma piramidal y en planta triangular. Es posible el uso de torres autoportadas esbeltas de sección constante para alturas de hasta 42m.

Las torres instaladas en Cuba fueron diseñadas en sus inicios para una cierta cantidad de antenas, sin embargo, en la actualidad el desarrollo de las nuevas fuentes de comunicación y el aumento en el número de canales televisivos, han generado la colocación de nuevas antenas sobre las torres existentes, trayendo consigo el cambio de las condiciones iniciales de diseño.

El Algoritmo Genético (AG) aplicado a estructuras metálicas permite alcanzar soluciones extremas que satisfagan criterios prescritos (cumplimiento de coeficientes de seguridad, pesos mínimos de elementos estructurales, etc.) realizándose de una forma racional sin acudir a una intuición o a las habilidades del diseñador.

Se plantea entonces como **situación problemática** que con el desarrollo de las nuevas fuentes de comunicación y el aumento en el número de canales televisivos en Cuba se ha generado la necesidad de construir más torres autoportadas y por ende es necesario un método para optimizar su diseño.

Como **problema científico** tenemos para la investigación entonces: la no utilización de un método de optimización para el diseño de las torres autoportadas. Al cual se le trata de dar solución partiendo de la **hipótesis** de que, si se realizara una optimización del diseño

estructural de la torre autoportada “Buey Cabón” utilizando algoritmos genéticos, permitirá determinar una variante más eficiente para el diseño de estas torres.

Variables de la hipótesis:

- Independiente: Optimización del diseño utilizando algoritmos genéticos.
- Dependiente: Diseño óptimo de las torres autoportadas “Buey Cabón”.

El objetivo general del trabajo entonces es: optimizar el diseño de la torre autoportada “Buey Cabón” mediante el uso de algoritmos genéticos, teniendo en cuenta los siguientes objetivos específicos:

- Analizar el estado del arte del diseño y optimización de torres autoportadas en Cuba.
- Definir variables y procedimientos para la optimización de la torre autoportada “Buey Cabón” mediante el uso de algoritmos genéticos.
- Optimizar el diseño de las torres autoportadas “Buey Cabón” mediante el uso de algoritmos genéticos.

La optimización de torres autoportadas, y en general de estructuras metálicas, no es un tema nuevo. Según la bibliografía consultada se utiliza a nivel mundial, en Europa y Norteamérica principalmente. En Cuba, la construcción de este tipo de torres se realiza mediante la modelación de estas en Softwares como el SAP 2000, teniendo en cuenta fundamentalmente criterios de la experiencia de los profesionales que las construyen. El campo de acción de este trabajo es la optimización de la torre autoportada “Buey Cabón” esperando como resultados un diseño más óptimo de esta.

Para la realización del trabajo, se organiza el mismo de la siguiente forma:

- Capítulo 1: Estado del arte del diseño y optimización de torres autoportadas en Cuba.
- Capítulo 2: Métodos y procedimientos para la optimización de la torre.

- Capítulo 3: Análisis de los Resultados.
- Conclusiones.
- Recomendaciones
- Bibliografía
- Anexos

# **CAPÍTULO 1: ESTADO DEL ARTE DE LA OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL DE TORRES.**

Este capítulo tendrá como objetivo la revisión de artículos y publicaciones más actualizados acerca de la optimización de torres, pudiendo definir cuáles son los métodos y parámetros más usados por los autores para la optimización de las mismas.

## **1.1 Torres de celosía.**

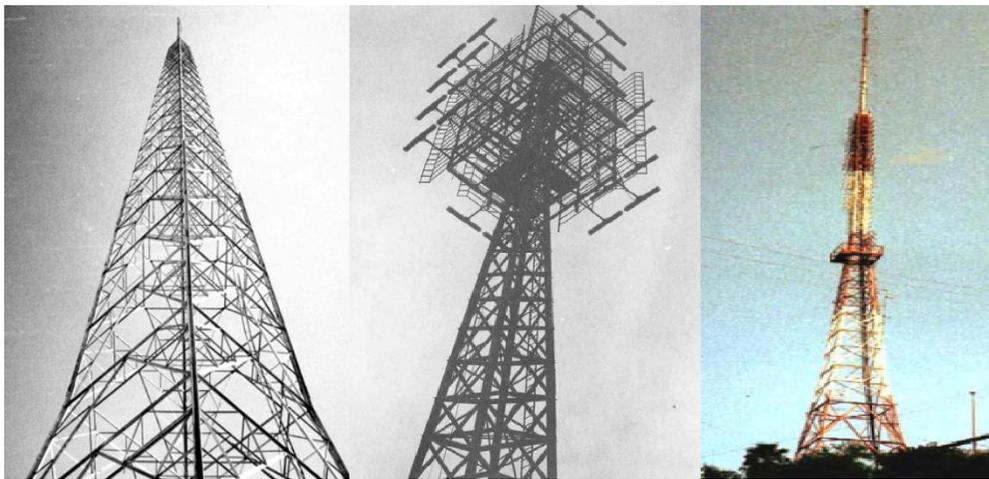
Una torre es un edificio de mucha más altura que superficie. Sus funciones pueden ser diferentes, pero históricamente han sido militares y religiosas, además de estéticas (para esparcimiento de la vista y para adorno). Más recientemente, el término se emplea para designar a diferentes estructuras tecnológicas, así como a edificios de oficinas o viviendas de gran altura. Las torres son uno de los principales hitos urbanos, y configuran la personalidad de una ciudad.

A través de la historia las funciones de una torre han sido muy diversas:

- Torres para Viviendas, oficinas y locales de todo tipo. Conocidas en la actualidad como rascacielos.
- Torres vigías, o con otros fines militares.
- Torres con fines religiosos, como torres funerarias, monasterios, iglesias, campanarios.
- Torres de funciones tecnológicas, como molinos, torres de reloj, de refrigeración, torres de control de tráfico aéreo, castilletes o torres para perforación.
- Para fines turísticos, en la cúspide se construyen restaurantes y el atractivo principal se debe a la altura en que se encuentran.
- Como símbolos o expresiones artísticas de diversas ciudades (Torre Eiffel).
- Torres faros.

Las torres metálicas reticuladas o torres de celosías, destinadas a las telecomunicaciones, son estructuras de amplio uso en la actualidad. La necesidad creciente de estructuras altas que permitan la mejor comunicación de la radio y la televisión, así como el desarrollo de la telefonía celular, ha producido una aceleración en la construcción de torres soporte de antenas y ha ampliado las funciones de las ya existentes. Estas estructuras suelen ser elementos esbeltos y ligeros con un diseño condicionado fundamentalmente por las cargas ecológicas. Las fallas en este tipo de estructuras resultan frecuentes en relación con otros tipos estructurales, lo cual ha motivado la necesidad de investigaciones en torno a su comportamiento en las últimas décadas. (Elena, 2008)

Según (Benitez, 2010, Janki, 2012) una torre de celosía es una estructura formada por elementos lineales, unidos entre sí por sus extremos, logrando un arreglo espacial en forma de reticulado cinemáticamente invariable. Esta forma constructiva, permite gran resistencia con poco consumo de material y por su permeabilidad, reduce las fuerzas del viento que son generadas sobre la estructura. Los materiales más utilizados han sido la madera y el acero. La mayoría de las torres de madera como la Muehlacker en Alemania, fueron demolidas antes de 1960, debido a la preponderancia del acero como material más eficiente.



*Figura 1.1. Torres de celosía, metálicas, (a) torre autoportada para antenas de televisión, (b y c) torre autoportada para antenas de radio. (Pérez, 2001)*

Con el surgimiento de la radio a partir del siglo XX, las torres de celosía adquirieron mayor uso y se diseminaron por todo el planeta. Luego la televisión, la telefonía celular y toda la tecnología WiFi en los últimos años, han incrementado su uso como soportes de antenas para las comunicaciones inalámbricas. (Benitez, 2010)

Las torres de celosía por su parte pueden tener funciones diversas también:

- De soporte de antenas y parábolas para la transmisión televisiva.
- Para comunicaciones radiales.
- Para tener acceso a objetos que se encuentran a gran altura, como una especie de andamios.

Existen diversos tipos de torres reticuladas de acuerdo con su sección transversal, a sus elementos componentes, etc. Pero todas ellas se agrupan de modo general en dos grandes grupos atendiendo a su comportamiento estructural: torres autosoportadas y torres atirantadas (Elena, 2008). Aunque la sección de las torres puede ser variada, por ejemplo, circular, hexagonal, etc., los más frecuentemente utilizadas en comunicaciones tienen sección cuadrada o triangular. Las torres autosoportadas son por lo general de sección cuadrada, en tanto que las arriostradas pueden ser de sección cuadrada o triangular (Pérez, 2001). Las cuadradas llevan más consumo de materiales que las triangulares, pero tienen mayor rigidez a la torsión, debido a que en la sección cuadrada los momentos de inercia en todas las direcciones son iguales y no existe delineación de la sección transversal del fuste de la torre ante el fenómeno de torsión. (Benitez, 2010)

Existen torres de sección triangular, de diferentes configuraciones, como alternativa también a las de sección cuadrangular. Las hay constituidas por perfiles angulares en su totalidad, por montantes tubulares y diagonales de perfil angular, etc. Las primeras, debido a que los perfiles angulares que las conforman tienen 90 grados entre sus alas, requieren la utilización de cartelas soldadas o atornilladas para conseguir los 60 grados que forman los lados del triángulo equilátero de la sección. (Carrasco, 2009)



*Figura 1.2. Torres autoportadas de sección triangular. (Vidal, 2011)*

Las torres arriostradas se mantienen en posición mediante cables anclados a cierta distancia de la base de la torre, en tanto que las autoportadas, como su nombre lo indica, se mantienen en posición por sí mismas, como estructuras en cantilever. Con pocas excepciones, el costo de la estructura y cimentación es inferior para las torres arriostradas que, para las autoportadas, sin embargo, aquéllas requieren de un terreno considerablemente mayor, de modo que la elección de un tipo u otro de torre no está condicionado únicamente por el costo de la estructura, sino por el terreno disponible y con frecuencia, por las condiciones topográficas del lugar de erección de la torre. (Pérez, 2001)

Una torre autoportada requiere de un terreno cuadrado cuyos lados tienen una longitud aproximadamente, entre el 8 y el 20% de la altura de la torre, en tanto que una torre arriostrada, el área del terreno necesario depende de la distancia entre las anclas de las riostras y la base de la torre. Esta distancia es, generalmente, entre el 70 y el 80% de la altura de la torre. (Pérez, 2001)

Las torres autoportadas se apoyan en la tierra o sobre edificios y se comportan como vigas en voladizo frente a la acción del viento y de las cargas sísmicas. Son por lo general de sección transversal variable que disminuye con la altura. (Elena, 2008)

Las torres atirantadas se apoyan igualmente en la base, pero se encuentran arriostradas lateralmente mediante cables. La sección más frecuente para este tipo de torre es triangular equilátera y constante, en cuyo caso los cables salen desde los vértices del triángulo (a diferentes niveles) hacia los anclajes de tierra, en tres direcciones radiales espaciadas a 120

grados. Estas torres permiten mayor ligereza y menor consumo de material que las torres autosoportadas, pero tienen el inconveniente de necesitar mucho espacio o terreno circundante para el anclaje adecuado de los cables. (Elena, 2008)

De acuerdo con la composición de sus elementos las torres se agrupan en tres tipos, unas son las constituidas por perfiles laminados abiertos (canal, angular de alas iguales y desiguales), otras conformadas por elementos tubulares y las mixtas que son combinaciones de los anteriores (usan perfiles laminados abiertos y elementos en forma de tubo). La unión entre los elementos componentes de la torre se realiza por medio de pernos y planchuelas o directamente entre perfiles con pernos. (Benitez, 2010)

## **1.2 Torres Autosoportadas**

Se definen como aquella estructura metálica autoestable reticulada que se puede soportar por sí misma, es decir no requiere de elementos externos para sostenerse como es el caso de las torres atirantadas, las cuales necesitan de cables y/o riostras para mantenerse en pie. Este tipo de torres están diseñadas como una solución para un alto rango de aplicaciones, debido a su reducido espacio y la gran altura, se utilizan desde los 12 a los 200m. (Vidal, 2011)

Su principal función es proporcionar un soporte adecuado a todo tipo de antenas y componentes a instalar en las torres. Deben tener la estabilidad y resistencia necesarias, y la altura adecuada para que los campos de acción de los componentes de telecomunicación realicen su tarea y no se vea obstaculizado por otros elementos. Siempre buscando la solución más económica y ligera posible.

Están conformadas por las patas principales, cerramientos horizontales, cerramientos diagonales, cerramientos secundarios, placas de unión de cerramientos diagonales y secundarios, diafragma y tornillería. Suelen estar realizadas de perfiles de acero laminado en caliente de diversos tipos (planchas de acero para la torre tipo monopolo), fabricados por la propia empresa o bien utilizando materiales prefabricados. (Vidal, 2011)

Para proyectar una estructura de soporte de las antenas se han de tener en cuenta una serie de factores de gran importancia para un correcto cálculo de los parámetros de diseño.

- Ubicación geográfica de la estación base.
- Altura de la torre necesaria y área existente de la estación base.
- Velocidad del viento según la región.
- Cargas a soportar por la estructura.
- Altura de la carga anterior sobre la torre.
- Accesorios y ubicación sobre la torre.
- Normativa a aplicar para su cálculo y diseño.
- Memoria de cálculo estructural y de cimentación.
- Análisis estructural.
- Anclaje al terreno o cimentación.

### **1.2.1 Materiales.**

En general las torres de celosía pueden ser de tres materiales en específico, de madera, hormigón y metálicas.

Las torres de hormigón se construyen principalmente de hormigón armado, aunque pueden ser de hormigón pretensado. Las torres de madera están constituidas por árboles a los cuales se les ha eliminado la corteza y se han tratado convenientemente con procedimientos de inmersión en líquido compuesto por agua y bicloruro de mercurio o por impregnación de alquitrán cuando la madera está seca, para incrementar su tiempo de vida útil haciendo más lento el proceso de pudrición de la misma. En general la vida media de estos elementos es muy variada y depende del tipo de madera empleada. Adicionalmente las puntas del “palo” se tratan de manera especial para evitar la penetración del agua de lluvia. Los tipos de árboles de los que principalmente están construidos estas torres son: el castaño, el abeto y el pino. (Carrasco, 2009)

Las torres metálicas son las más usadas mundialmente para la transmisión aérea de la energía eléctrica ya que tienen una serie de ventajas entre las que destacan:

- Mayor resistencia mecánica.
- Comodidad y facilidad para realizar el ensamblaje en el lugar de izaje.
- Menor peso.
- Mayor vida útil.

El metal más empleado en la fabricación de estas torres es el acero de bajo contenido de carbono, en forma de perfiles abiertos laminados en L, U, T, I, etc. En algunos casos se emplea hierro fundido o aleaciones de aluminio. Para unir los diversos perfiles se emplean remaches, tornillos o soldadura, aunque las más comunes son las uniones atornilladas. (Carrasco, 2009)

El material utilizado con más frecuencia es el acero de tipo A36 ATSM y el de tipo A572 ATSM, de grado 50 o equivalente. El acero A36 es acero estructural al carbón y el A572 es acero de alta resistencia y baja aleación de niobio y vanadio. En cualquier caso, el acero utilizado es de bajo contenido de carbón, con tensiones de deformación entre 36,000 psi (2531 kg/cm<sup>2</sup>) y 60,000 psi (4218 kg/cm<sup>2</sup>). (Pérez, 2001)

Aunque no hay una forma de los materiales que pueda considerarse mejor desde el punto de vista estructural, prácticamente todos los miembros estructurales de las torres suelen ser de perfil angular, rolados en caliente y deben estar galvanizados por inmersión para conseguir máxima protección contra la corrosión. El espesor del galvanizado no debe ser inferior a 0.0034 pulgadas (0.086 mm). (Pérez, 2001)

En prácticamente todas las torres de celosía, los miembros estructurales deben ir atornillados y nunca soldados, excepto en condiciones especiales que deben ser objeto de estudio cuidadoso. Los tornillos deben ser de acero y llevar arandela plana, arandela de presión y, preferiblemente, doble tuerca para evitar que la vibración causada por el viento llegue a aflojar los tornillos.

## 1.2.2 Cargas

Carga muerta: Incluye el peso de la estructura más todos los elementos adicionales sujetos a ella.

Carga viva: Suele especificarse en los códigos de construcción. Algunos tipos de cargas vivas pueden ser de naturaleza prácticamente permanente, aunque sujetos a remoción o reubicación. En una torre, por ejemplo, en que se instalan temporalmente antenas sobre las caras y luego se remueven. En edificios, las paredes o particiones removibles, elementos colgantes del techo, equipos, etc. La carga de suelo es parte de la carga viva. La carga viva que puede, o debe soportar una determinada estructura, se especifica en  $\text{kg/m}^2$  en el SI y en libras/pie<sup>2</sup> o psf ( $1\text{psf} = 4.8824\text{ kg/m}^2$ ), en el sistema inglés. (Pérez, 2001)

En torres de alta tensión que son uno de los tipos más comunes de torres autoportadas se tienen en cuenta los siguientes tipos de cargas o acciones clasificándolas en función del tipo de esfuerzo que originan, utilizándose comúnmente la siguiente nomenclatura:

- Carga vertical: aquella que actúa sobre el eje que contiene la fuerza de la gravedad y la altura principal de la estructura.
- Carga longitudinal y transversal: aquella que actúa paralelamente y perpendicularmente al eje de la torre.

En cuanto al tipo de carga las acciones que se debe considerar en el diseño de una torre de alta tensión son:

- Peso propio: tanto el de la torre como el de los conductores, cables de guarda, aisladores y herrajes. Genera esfuerzos verticales.
- Sobrecarga de hielo: genera esfuerzos verticales. Debido a que la longitud de los vanos suele ser elevada, no se considera la acumulación de hielo sobre la torre, al ser bastante menor que los manguitos sobre los conductores/cables de guarda. (Villanueva, 2014)
- Fuerza del viento: genera esfuerzos longitudinales y transversales, aunque a efectos prácticos no se suele considerar los primeros por contener los cables.

- Desequilibrio de tracciones: genera esfuerzos verticales, longitudinales y transversales, aunque no se considera para todos los tipos de torres. Tiene lugar cuando las tensiones de los vanos se descompensan, y ocurre por ejemplo cuando el hielo se acumula más en un vano que en otro.
- Rotura de cables: como sucede con el desequilibrio de tracciones, genera los tres tipos de esfuerzos.

### **1.3 Optimización.**

En base a su naturaleza, hay varias formas de clasificar un problema de optimización. Para comenzar, una primera distinción la podemos realizar en base a la continuidad o no de las variables de decisión. Se dice que estamos frente a un problema de “Optimización Continua” cuando todas las variables de decisión pueden tomar cualquier valor perteneciente al conjunto de los reales. Dentro de este tipo de problemas, son de particular importancia los problemas de “Optimización Convexa”, en los cuales se debe minimizar una función convexa sujeta a un conjunto solución convexo. En el caso de trabajar con variables discretas (es decir, que solo puedan tomar valores enteros) nos enfrentamos a un problema de “Optimización Combinatoria”. Por raro que pueda parecer, en general un problema de optimización combinatoria es más complicado de resolver que uno de optimización continua. En la práctica, estos problemas se resuelven en forma más parecida a los problemas combinatorios que a los continuos. (Baquela and Redchuk, 2013)

Vista esta clasificación, se procede a clasificar los métodos de resolución de problemas de optimización en tres tipos diferentes:

Resolución mediante cálculo: Los métodos de resolución por cálculo apelan al cálculo de derivadas para determinar para qué valores del dominio la función presenta un máximo o un mínimo. Son métodos de optimización muy robustos, pero que requieren mucho esfuerzo de cómputo y que tanto la función objetivo como las restricciones presenten determinadas condiciones (por ejemplo, que estén definidas, que sean continuas, etc.). En general, no se suele apelar a estos métodos en el mundo de la ingeniería, ya que los

problemas no se ajustan a las restricciones de continuidad y tienen demasiadas variables como para que su tratamiento pueda ser eficiente.

Resolución mediante técnicas de búsquedas: Dentro de este apartado, podemos encontrar un gran abanico de técnicas, desde el viejo método de prueba y error hasta las modernas técnicas de programación matemática.

Resolución mediante técnicas de convergencia de soluciones: grupo compuesto casi completamente por técnicas metaheurísticas (o sea, que los resultados van a ser aproximadamente óptimos). Estos métodos se basan en generar una gran cantidad de soluciones, determinar cuáles son las “mejores” y, a partir de ellas, generar un nuevo conjunto de soluciones a analizar, repitiendo el proceso hasta que las soluciones generadas converjan en una (o sea, hasta la iteración en la cual todas las soluciones generadas tengan un valor de función objetivo muy parecido). Entre las técnicas más conocidas de este grupo, aunque no las únicas, tenemos a todas las versiones de "Algoritmos Genéticos", tema el cual nos ocupa en el presente trabajo, y ampliaremos a continuación.

Desde hace algunos años, han surgido teorías, técnicas y métodos de optimización, desde diferentes ramas del conocimiento, planteando distintas formas de resolver problemas complejos, obteniendo soluciones cercanas a las óptimas. La aplicación de dichos métodos a problemas de diseño en ingeniería representa un área de oportunidad que, gracias a la gran capacidad de las computadoras actuales, ha empezado a desarrollarse tanto académica como industrialmente. Esto ha incrementado el uso de técnicas de optimización durante el proceso de diseño debido a su capacidad para resolver problemas complejos.

### **1.3.1 Optimización estructural**

Hasta hace unos pocos años el proceso de diseño y la optimización en sí del mismo, en la ingeniería, requería fundamentalmente una gran experiencia por parte del diseñador, el cual debía utilizarla en casi todas las etapas del proceso de diseño. Métodos, como el denominado de “Prueba y Error” (ver figura 1.3) presentaban el inconveniente de que las modificaciones dependían totalmente de la experiencia del diseñador, lográndose

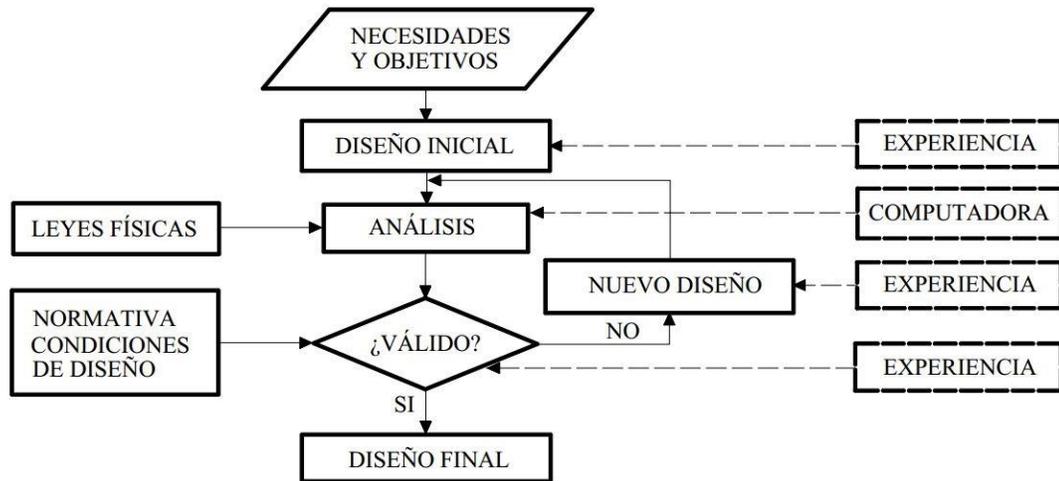
soluciones que cumplen con las solicitudes actuales, pero no las mejores y, además con un alto costo en tiempo por parte del proyectista. (Borda and Rodríguez, 2010)

La optimización de un diseño incrementa el valor de un producto mejorando su rendimiento en su entorno operativo a menor costo de producción, mediante la reducción de la cantidad de material utilizado para su fabricación, garantizando un tiempo de vida mucho mayor del producto bajo sus condiciones de operación. Al utilizar la optimización, el ingeniero de diseño incrementará los conocimientos sobre el comportamiento de su producto y mejorará el diseño, mientras compara los datos nuevos, con los obtenidos de análisis realizados previamente.

El problema de diseño en ingeniería, y en particular en el área de la ingeniería civil, se relaciona de manera muy estrecha con una gran variedad de disciplinas como son: diseño estructural, selección de materiales, procesos de manufactura, ingeniería del valor, etc.

Antes de la aplicación de las modernas técnicas de optimización al diseño, el proceso de diseño óptimo requería fundamentalmente una gran experiencia por parte del diseñador, el cual debía utilizarla en casi todas las etapas del proceso de diseño. El método que se empleaba era el siguiente: el ingeniero definía un diseño inicial cuyo comportamiento era analizado numéricamente; de los resultados de dicho análisis se podían deducir (por experiencia o intuición) los cambios a realizar para mejorar dicho diseño. Se finalizaba el proceso cuando se consideraba que el diseño era lo suficientemente bueno. Este método denominado de prueba y error, presentaba el inconveniente de que las modificaciones dependían totalmente de la experiencia del diseñador, lográndose soluciones buenas, pero no las mejores, y además con un alto precio por parte de este. (Nicolás, 2006)

El diseño de estructuras es un proceso iterativo en el que se busca, ensayando distintas soluciones, la estructura que cumpla con unos requerimientos de seguridad con el menor costo posible. La experiencia y la intuición del ingeniero son fundamentales para la obtención de un buen diseño, difícilmente el mejor. Cuando el problema de diseño de estructuras se convierte en encontrar el mejor diseño, se habla de Diseño Óptimo de Estructuras. (Torrano and Martí, 2003)



*Figura 1.3 Proceso tradicional de diseño por “Prueba y Error” (Torrano and Martí, 2003)*

En la actualidad la optimización es un proceso que tiene grandes aplicaciones en prácticamente cualquier área, con lo cual se logra una mejora de procesos y por tanto reducción de costos, tiempos, etc., todo ello debido a su definición: “La optimización es un proceso a través del cual se busca obtener o determinar la mejor solución posible, de entre un grupo de resultados, que a su vez satisface las restricciones que presenta el sistema al cual se aplica. Lo que significa matemáticamente: “La búsqueda del máximo o mínimo de una función objetivo.

Por tanto, en ingeniería, tiene más sentido describir la optimización como el cálculo de uno o varios objetivos, por ejemplo: el peso, el esfuerzo, el costo, la geometría, las frecuencias naturales, la temperatura, etc., que dependen de variables conocidas: las cotas, las cargas, las restricciones, los materiales, los requisitos de fabricación, etc. Sin embargo, los ingenieros de diseño pocas veces conocen todos estos datos en las fases iniciales del proceso de diseño.

De esta manera la optimización estructural (SO, por sus siglas en inglés) se ha convertido en un campo de investigación bastante amplio, que busca desarrollar metodologías que permitan encontrar nuevas soluciones e incluso mejorar las existentes de manera que, bajo

ciertos criterios, resulten ser las mejores y que a su vez se fabriquen con la menor cantidad de material posible y con mayor facilidad.

La optimización de un diseño incrementa el valor de un producto mejorando su rendimiento en su entorno operativo a menor costo de producción, mediante la reducción de la cantidad de material utilizado para su fabricación, garantizando un tiempo de vida mucho mayor del producto bajo sus condiciones de operación y disminuyendo el costo de producción del mismo.

De esta forma la optimización estructural puede definirse como: “Búsqueda de diseños de estructuras que minimicen una función objetivo, frente a un juego de variables de diseño y teniendo en cuenta restricciones a cumplir, tales como: valores máximos de esfuerzo o deformación, volumen, masa flujo, etc., obteniendo la mejor solución y que a su vez se fabrique con la menor cantidad de material posible, basado en el simple concepto de remover lentamente el material ineficiente de una estructura, la forma resultante de ésta, evoluciona o se desarrolla hacia la óptima.

En lo que concierne a estudios relacionados con la optimización de estructuras y específicamente con armaduras, existe una gran cantidad de trabajos académicos e investigaciones en las cuales se aplican métodos metaheurísticos, como los AG, orientados a la optimización de diversas características propias de este tipo de estructura (configuración, topología, dimensiones, etc.). (Echeverria, 2014)

A medida que se empezó a profundizar en la optimización de estructuras con elementos unifilares (tipo armadura), los primeros investigadores dividieron sus esfuerzos para abordar el problema desde dos perspectivas que apuntan al mismo objetivo, minimizar el peso (costo) de la estructura. Estudios como los de Vanderplaates (1975), Queau y Trompette (1980), Bennett and Botking (1985) y Pedersen (1987) se centraron en el problema de optimización de la geometría y la tipología de las estructuras continuas 2-D y 3-D mediante la modificación de la posición de los nodos, mientras que trabajos como los de Goldberg and Samtani (1986) y Rajeev y Krishnamoorthy (1992) se enfocaron en optimizar la sección (área) de los elementos de estructuras, mediante espacios de búsqueda discretos. Debido al éxito y calidad de los resultados de estos primeros trabajos, en las

últimas décadas un gran número de investigaciones se orientaron a la profundización y mejoramiento de las metodologías que emplean algoritmos evolutivos en la optimización de estructuras. (Echeverria, 2014)

Hajela y Lee (1994) proponen un método de búsqueda estocástico e intuitivo que emplea AG's para encontrar la tipología óptima de una armadura. Dado que la determinación precisa de la tipología resulta complicada, ya que esta depende de los nodos restringidos y los nodos cargados, emplearon un análisis paralelo en el cual se modela la estructura con diferentes topologías, con la ventaja de que se pueden agregar y remover elementos durante el proceso hasta encontrar la configuración óptima. Kawamura et al. (2002) se basaron en el trabajo anterior para proponer su propio algoritmo estocástico de búsqueda, ya que consideran que el algoritmo propuesto por Hajela y Lee (1994) tiene la desventaja que la topología resultante puede incluir miembros innecesarios y que además puede que la estructura obtenida no sea estable.

En general para el trabajo de optimización de estructuras metálicas de tipo cercha de la torre se procede siguiendo los siguientes pasos:

- La creación de una función de penalización de peso de las estructuras que no cumplan con las restricciones impuestas.
- La creación de una función de aptitud que maximice la mejor estructura.
- La normalización de la función de aptitud para mantener el proceso generacional con eficiencia en la búsqueda del óptimo.
- La creación de un programa que utilizando como datos de entrada una población de cromosomas y su función de aptitud cree una población-hijo mediante “parámetros” probabilísticos y procesos aleatorios.

#### **1.4 Algoritmo Genético (AG).**

La capacidad del ser humano para predecir el comportamiento de su entorno se ha ido incrementando con el paso del tiempo. De igual modo, ha comprendido que, si bien era capaz de controlar muchos aspectos de su vida, y su interacción con lo que le rodeaba, no

lo era para otros tantos. Los pioneros de la ciencia de la inteligencia artificial estaban tan interesados en la electrónica como en la biología, y por eso sus aplicaciones iban desde calcular trayectorias de misiles, a tratar de modelar el cerebro o imitar el proceso de aprendizaje humano y simular la evolución biológica. Los años ochenta (en el siglo pasado) marcan el florecimiento del interés de la comunidad científica por estos temas computacionales inspirados en la biología, que han visto cómo su desarrollo los llevaba a cotas inimaginables, primero en el campo de las Redes Neuronales, luego en el del Aprendizaje y, por último, en lo que ahora se conoce como “computación evolutiva”, de la que los Algoritmos Genéticos constituyen su máximo exponente. (Rodríguez, 2011)

En términos muy generales se podría definir la computación evolutiva como una familia de modelos computacionales inspirados en la evolución. Más formalmente, el término de computación evolutiva se refiere al estudio de los principios de la evolución natural. (Alba and Tomassini, 2002)

Se definen entonces los Algoritmos Genéticos (AG), como un método de optimización y búsqueda basado en los mecanismos de selección y genética natural. Combinan la supervivencia de los más compatibles entre las estructuras de cadenas, con una estructura de información procesada aleatoriamente, intercambiada para construir un algoritmo de búsqueda con algunas de las capacidades de innovación de la búsqueda humana. (Goldberg, 1989)

Koza (1992) define de forma clara y global los algoritmos genéticos como “Un algoritmo matemático altamente paralelo que transforma un conjunto de objetos matemáticos individuales con respecto al tiempo, usando operaciones modeladas de acuerdo al principio Darwiniano de reproducción y supervivencia del más apto, y tras haberse presentado de forma natural una serie de operaciones genéticas entre las que destaca la recombinación sexual. Cada uno de estos objetos matemáticos suelen ser una cadena de caracteres (letras o números) de longitud fija que se ajusta al modelo de las cadenas de cromosomas y se les asocia con una cierta función matemática que refleja su aptitud”. (Koza, 1992)

Esta técnica se basa en los mecanismos de selección que utiliza la naturaleza, de acuerdo con los cuales los individuos más aptos de una población son los que sobreviven, al

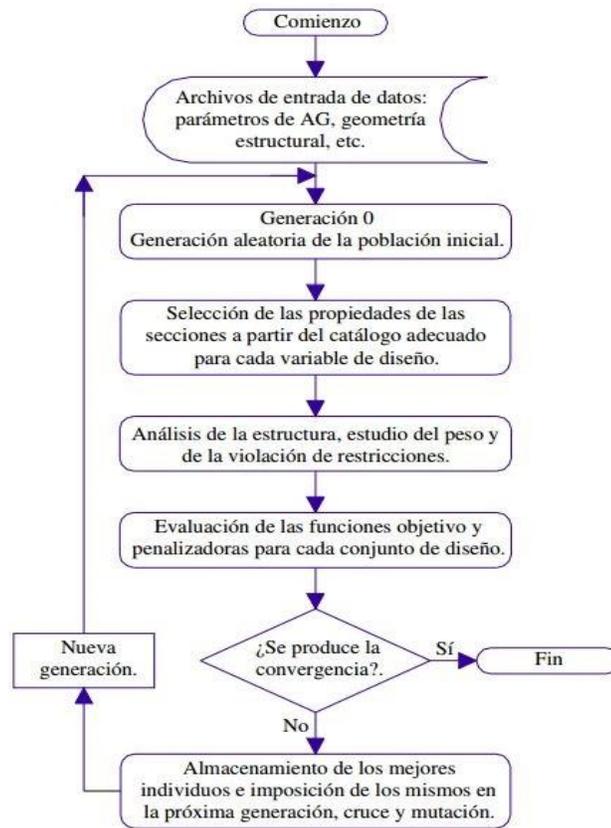
adaptarse más fácilmente a los cambios que se producen en su entorno. Hoy en día se sabe que estos cambios se efectúan en los genes (unidad básica de codificación de cada uno de los atributos de un ser vivo) de un individuo, y que los atributos más deseables (los que le permiten a un individuo adaptarse mejor a su entorno) del mismo se transmiten a sus descendientes, cuando éste se reproduce sexualmente. (Coello, 1995)

El poder de los AG se logra por la diversidad de los individuos de una población que evolucionan, en paralelo, siguiendo el principio de "la supervivencia del más apto". La diversidad de los individuos se obtiene y se mantiene con los operadores genéticos que permiten encontrar mejores soluciones y evitan la convergencia prematura a un máximo local.

Básicamente, el AG funciona como sigue: en cada generación, se crea un conjunto nuevo de "criaturas artificiales" (población) utilizando bits y partes más adecuadas del progenitor. Esto involucra un proceso aleatorio que no es, en absoluto, simple. La novedad que introducen los AG es que explotan eficientemente la información histórica para especular sobre nuevos puntos de búsqueda, esperando una evolución, es decir, un funcionamiento mejorado (ver figura 1.4). (Rodríguez, 2011)

La evolución, tal y como se le conoce, es básicamente un método de búsqueda entre un número enorme de posibles "soluciones". En biología las posibilidades están formadas por un conjunto de secuencias genéticas posibles, y las soluciones deseadas, por organismos capaces de sobrevivir y reproducirse en sus entornos. La evolución puede verse, asimismo, como un modo de "diseñar" soluciones a problemas complejos, con la capacidad de innovar. Estos son los motivos de que los mecanismos evolutivos sean una fuente de inspiración para los algoritmos de búsqueda. Por supuesto, el buen funcionamiento de un organismo biológico depende de muchos criterios, que además varían a medida que el organismo evoluciona, de modo que la evolución está "buscando" continuamente entre un conjunto cambiante de posibilidades. Por ello, se le puede considerar como un método de búsqueda masivamente paralelo, ya que evalúa y cambia miles de especies en paralelo. Para terminar, las reglas de la evolución, aunque de alto nivel, son simples: las especies evolucionan mediante variaciones aleatorias (vía mutaciones, regeneraciones, etc.)

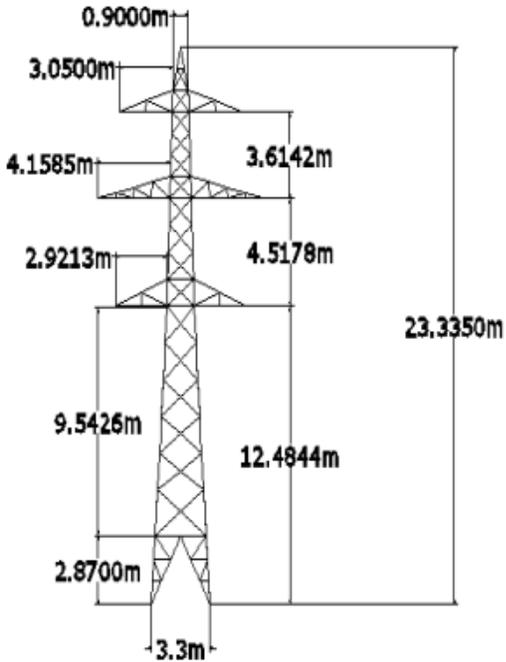
seguidas por la selección natural, donde el mejor tiende a sobrevivir y reproducirse, propagando así su material genético a posteriores generaciones. (Rodríguez, 2011)



*Figura 1.4 Esquema de un AG simple (Prendes et al., 2002)*

Mohamed y otros autores (2012) aplicaron algoritmos genéticos basados en FORTRAN a la optimización de torres de transmisión de electricidad utilizando distintas variables de diseño y luego compararon los resultados.

Para el cálculo estructural usaron el método de elementos finitos. El diseño óptimo se realizó sobre una torre de 672 elementos y 306 nodos.



*Figura 1.5: Dimensiones de la torre (Mohammed et al., 2012)*

Las restricciones aplicadas fueron:

- Esfuerzo a tracción:  $\sigma_t = 400.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ .
- Esfuerzo a compresión  $\sigma_c = -400.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ .
- Máximo desplazamiento de los nodos: 0.1m en todas las direcciones.

En el diseño inicial consideraron áreas para las secciones rectangulares de 0.01 m<sup>2</sup>, las áreas de las secciones fueron consideradas como pseudo-continuas y las longitudes mínima y máxima son de 0.05 y 0.15m.

Número de población 100, número de generación 100 y longitud de cadena binaria variable de diseño  $m = 8$ .

Para cada combinación de grupos de variables de diseño los autores obtuvieron un diseño óptimo (Tabla 1.1)

Tabla 1.1 Comparación entre los diseños óptimos. [Mohammed et al, 2012]

Variables de diseño (DV)	Valor optimizado por el algoritmo genético (m2)			
	Sección rectangular DV=24	Sección cuadrada DV=12	Ancho fijo DV= 12	Espesor de sección fijo DV=12
DV1	0,00054	0,00453	0,0081	0,0075
DV2	0,00873	0,0141	0,0119	0,00916
DV3	0,0119	0,00924	0,00022	0,00721
DV4	0.00131	0,00043	0,00697	0,0102
DV5	0.00765	0,00022	0,0066	0,00539
DV6	0,00683	0,011	0,00557	0,0116
DV7	0,00053	0,00687	0,00295	0,00344
DV8	0,00181	0,00873	0,0115	0,00152
DV9	0.00132	0,0108	0,00533	0,0022
DV10	0.00100	0,00645	0,00447	0,00405
DV11	0,000669	0,00127	0,00405	0,00447
DV12	0,00123	0,0135	0,0103	0,0115
Peso óptimo (kg)	17163,85	39729,3	33795,14	44085,71
% optimo	64,68	18,26	30,47	9,30

Según estos resultados, la optimización del peso de la armadura fue exitosa, ya que esta disminuyó a un 64,68 por ciento del peso de la torre anterior.

## Conclusiones Parciales

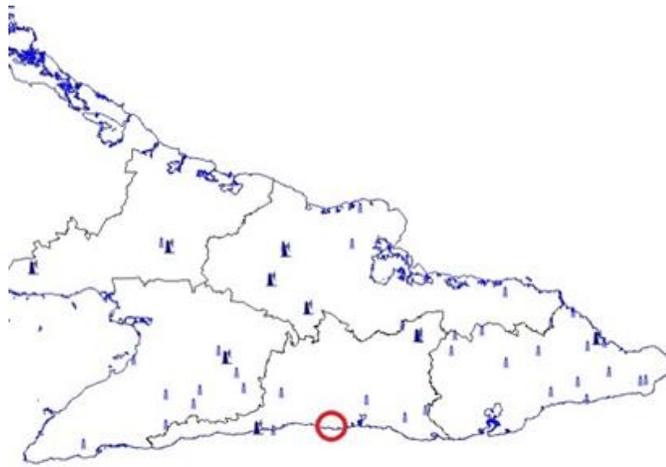
- Las torres autoportadas son estructuras que por su compleja configuración es difícil para el diseñador lograr una disposición óptima de sus elementos, por ello los métodos utilizados en la actualidad para su diseño, requieren de una gran experiencia por parte del diseñador de las mismas.
- Los algoritmos genéticos son un método robusto de búsqueda que se ajusta a ser utilizado en la optimización de armaduras y en consecuencia de torres de celosía aportando resultados eficientes sobre los parámetros de diseño de este tipo de construcciones.

## **CAPÍTULO 2 MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS PARA LA OPTIMIZACIÓN DE LA TORRE.**

Las consideraciones para el análisis de torres autoportadas han evolucionado en los últimos años. La torre seleccionada para la investigación fue la Buey Cabón, al formar parte del sistema nacional de torres y ser uno de los modelos fabricados por nuestro país. En este capítulo se definen las características típicas de la misma, así como de la zona de emplazamiento y de las consideraciones tomadas en cuenta para el diseño original. Además, se definen los supuestos para la aplicación de la optimización, así como el procedimiento seguido para la realización de este.

### **2.1 Descripción y caracterización de la torre objeto de estudio, Buey Cabón.**

La torre en cuestión se encuentra ubicada en la provincia de Santiago de Cuba, en la zona que se muestra en la figura 2.1 cuyas características principales se observan en la Tabla 2.1.

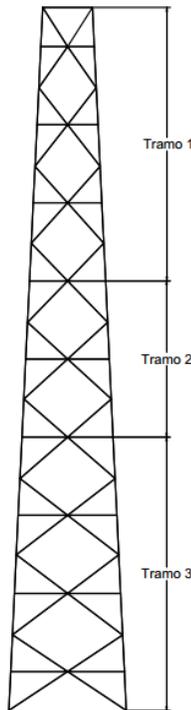


*Fig. 2.1 Situación geográfica de la torre Buey Cabón. (Martín, 2010)*

*Tabla 2.1 Características de la torre Buey Cabón (Martín, 2010)*

Centro	BUEY CABÓN
Provincia	Santiago de Cuba
Año de Construcción	2006
Tipo de Torre	Autosoportada
Modelo	-
Altura Total (m)	36 m
Sección Transversal	Triangular
Ancho de la Base (m)	6 m
Cantidad de Tramos Constructivos	6
Peso (Ton)	4,20

Los datos de diseño y relacionados con la revisión de la estructura que posee la torre, es decir, la configuración actual de los perfiles que se utilizan para su construcción es la siguiente:



*Figura 2.2 Configuración inicial de la armadura de una cara de la torre. (Fuente: Elaboración propia)*

*Tabla 2.2 Perfiles utilizados para la construcción de la torre. (Martín, 2012)*

Elementos	Tipo de perfil	Tramo 1	Tramo 2	Tramo 3
Columnas	Tubular (mm)	155	77	70
Diagonales	Angular (mm)	100x9	75x5	65x5
Tranque	Angular (mm)	65x5	65x5	65x5

En cuanto a los materiales utilizados para la construcción, podemos decir que se utiliza acero estructural A-36 con Tensión de Rotura de 400 MPa y Límite de Fluencia de 248 MPa.

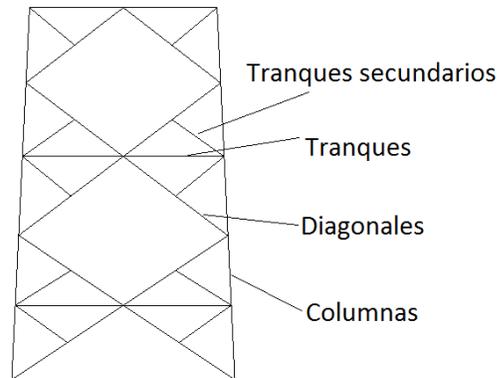
Los perfiles de mayor sección se colocan en el tramo 3, los medianos en el tramo 2 y los menores en el tramo 1 (ver figura 2.2)

## **2.2 Consideraciones para la modelación del diseño original.**

La torre objeto de estudio se encuentra ubicada en la provincia de Santiago de Cuba. En este epígrafe se describirá el proceso de modelación a partir de las invariantes: forma, material, condiciones de apoyo y cargas. La modelación y análisis de las torres se llevó a cabo a través del programa de análisis estructural SAP 2000 (versión 12), basado en el método de elementos finitos.

### **2.2.1 Modelación.**

La torre fue modelada como una armadura espacial, reproduciendo de forma detallada cada miembro de la armadura conformando la estructura tridimensional de sección triangular equilátera. La estructura en su conjunto se consideró con 6 grados de libertad.



*Figura 2.3 Elementos componentes de la torre (Fuente: Elaboración propia)*

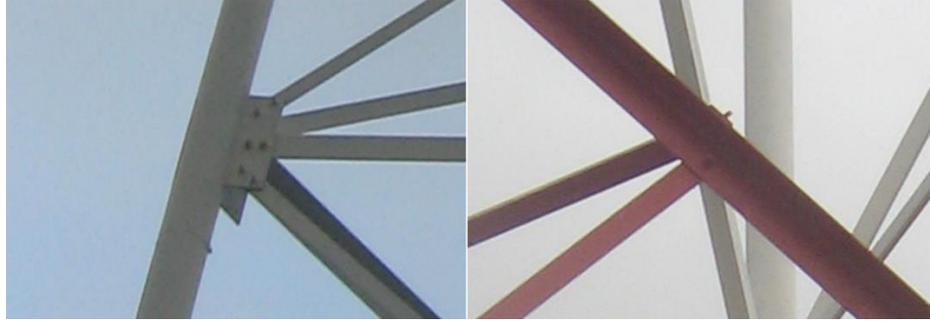
Los elementos de la armadura fueron modelados como barras, elementos lineales con dos nudos extremos.

Las columnas se consideraron en todos los modelos continuos desde la base hasta la cima, porque la unión entre ellas es a tope con doble plancha y seis pernos en el sentido longitudinal que garantizan la transmisión de momentos (ver figura 2.4).



*Figura 2.4 Unión columna-columna. (Fuente: Tomada por Patricia Martin)*

La unión entre los elementos tranques y columna, se consideró articulada (ver figura 2.4) al igual que las diagonales y diagonales secundarias, tranques interiores, tranques y tranques secundarios, debido a que en todos los casos la unión entre estos elementos se realiza mediante dos pernos.



*Figura 2.5 a) Unión columna-diagonal, b) Unión diagonal-tranque. (Fuente: Tomada por Patricia Martin)*

Las condiciones de apoyo fueron consideradas empotradas (ver figura 2.6) debido a que sus patas tienen apoyos independientes empotrados a la cimentación por medio de planchas de acero ancladas con pernos a la masa de hormigón y unidas con pernos a las patas de la torre.



*Figura 2.6 Condiciones de apoyo. (Fuente: Tomada por Patricia Martin)*

### **2.2.2 Cargas.**

En el diseño de las torres de celosía las principales cargas analizadas son: carga permanente, cargas ecológicas y la carga producto de la presencia de las antenas. En este trabajo no se tuvo en cuenta la carga que genera la presencia de las antenas. La carga ecológica analizada es la carga de viento. Para los casos de estructuras tipo torres, no son

consideradas en el análisis las cargas de uso ni la carga de viento no extremo. La carga de uso es poco frecuente en la torre (reparaciones, montaje de antenas) y no se encuentra presente junto a la carga de viento extrema. La carga de viento no extremo no genera la peor condición de trabajo de la torre por lo que al estudiar el comportamiento de estas estructuras frente a fuertes vientos, no corresponde realizar su análisis.

### *Carga Permanente*

Para el cálculo de las torres de celosía se consideran como cargas permanentes el peso propio de los elementos estructurales y el peso propio de las antenas y los elementos accesorios, como son las escaleras y balcones. En el caso de estudio no se tomaron en cuenta las cargas producto de los elementos accesorios, ni de las antenas.

### *Cargas Ecológicas*

La determinación de las cargas de viento es analizada a partir de lo establecido en la Norma Cubana de Viento (NC: 285-2003).

## **2.3 Determinación de la carga de viento.**

La NC 285:2003 plantea que la carga de viento debe ser considerada en toda estructura no soterrada, suponiendo que el viento actúa horizontalmente y en cualquier dirección. La componente estática de la carga de viento es la que corresponde al valor medio de la velocidad del viento y debe ser considerada en todos los casos. Los cálculos para la obtención del valor de la carga de viento sobre las torres se realizaron de acuerdo con lo establecido en la norma cubana de acción del viento NC:285-2003 para reticulados espaciales aplicando el valor de viento extremo. La torre fue dividida en diferentes tramos para el análisis, en cuyo punto medio se consideró aplicada la carga de viento de forma concentrada sobre los tres nudos que se encuentran en los vértices de la sección transversal de la torre. La referida norma no deja establecidas, de forma particular, las direcciones de viento a analizar en las torres que presentan sección triangular, por lo que se siguieron las recomendaciones del comité internacional de la IASS (Asociación Internacional de Estructuras Espaciales y Cáscaras) sobre torres y mástiles atirantados y según se establece

en varios códigos, se analizaron tres direcciones de ataque del viento: 0, 60 y 90 grados respecto a uno de los tres ejes de simetría de la torre (ver Figura 2.7).

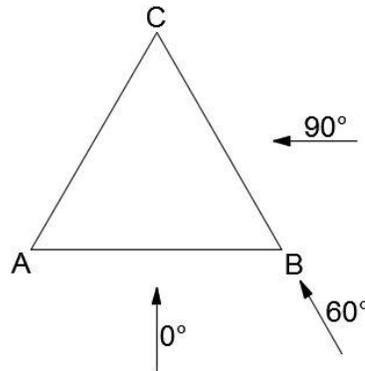


Fig. 2.7 Direcciones de aplicación de la carga de viento. (Fuente: Elaboración propia)

El valor de la componente estática se obtiene afectando el valor de la presión básica del viento por varios coeficientes, como muestra la Ecuación.

$$q = q_{10} \cdot C_t \cdot C_s \cdot C_h \cdot C_r \cdot C_{ra} \cdot C_f \quad (kN/m^2)$$

Donde:

$C_t$  = Coeficiente de recurrencia

$C_s$  = Coeficiente de sitio

$C_h$  = Coeficiente de altura

$C_{ra}$  = Coeficiente de reducción

$C_f$  = Coeficiente de forma o aerodinámico

La torre se encuentra ubicada en la zona oriental del país donde el valor de presión básica establecido es  $q_{10} = 0.9 \text{ kN/m}^2$ .

El tipo de terreno seleccionado según la NC 285-2003 el tipo de terreno seleccionado fue Tipo A por lo que el coeficiente de sitio ( $C_s$ ) será 1.

Los coeficientes de altura ( $C_h$ ) están referidos a los puntos medios de cada tramo en los que fueron divididas las torres para su cálculo, dependen del tipo de terreno seleccionado

y del Gradiente del coeficiente de altura ( $Z$ ) (Normalización, 2003), siendo la expresión para su cálculo la siguiente:

$$(Z/10)^{0,32}$$

El período de recurrencia seleccionado fue 50 años y le corresponde un coeficiente de recurrencia ( $C_t$ ) igual a 1.

El coeficiente de forma o aerodinámico ( $C_f$ ) para torres de celosías espaciales, se transforma en coeficiente de forma espacial ( $C_{fe}$ ), y se determina según la ecuación siguiente.

$$C_{fe} = C_f(1 + N)$$

El valor del coeficiente de forma será  $C_f=1.9$  que corresponde al caso de angulares de alas iguales de la Tabla 11 de la NC 285:2003. El valor de  $N$  se establece en dependencia de la relación entre el área neta y el área bruta ( $A_{neta}/A_{bruta}$ ) y entre la dimensión de la base y la altura de la torre ( $b/h$ ).

La carga concentrada en cada nudo que se tuvo en cuenta se calcula según el valor de la presión básica del viento multiplicado por el área neta ( $A_n$ ) de los perfiles. Como no se conoce el área de la sección de estos, en este caso, el valor de  $A_n$  es desconocido, por lo que para el cálculo de este valor se toma en consideración según los resultados del cálculo inicial (ver tabla 2.3) una proporción con respecto al área bruta del tramo en consideración.

Luego, para el cálculo de la carga concentrada se asume un valor de área neta tomando en cuenta esta proporción.

$$P_c = A_n \times q$$
$$P_c = 0,14 \times A_b \times q$$

Tabla 2.3 Valores de áreas de la torre original. (Martín, 2010)

$A_{bruta} (m^2)$	$A_{neta} (m^2)$	
	Área	$A_b/A_n$
32,45	4,27	0,13
29,30	3,52	0,12
17,87	2,36	0,13
14,42	1,77	0,12
13,24	1,67	0,13
12,00	1,69	0,14
12,61	1,54	0,12
8,34	1,26	0,15
6,23	0,97	0,16

Donde  $A_b$  es el área bruta de la sección donde se considera la carga (ver figura 2.8).

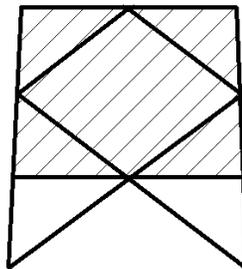


Figura 2.8 Área bruta de una sección (Fuente: Elaboración propia)

## 2.4 Proceso de optimización con AG.

Luego de conocidas las propiedades fundamentales de la torre, de las cargas a las que está sometida, de las condiciones de apoyo y de la configuración de su estructura, se procede a definición de los métodos y parámetros a optimizar.

Al ser la torre de base triangular está compuesta por tres armaduras planas que conforman las caras de la misma. El proceso seguido para la optimización parte de la hipótesis de que optimizando una de estas armaduras, sometiendo está a la carga más desfavorable, se

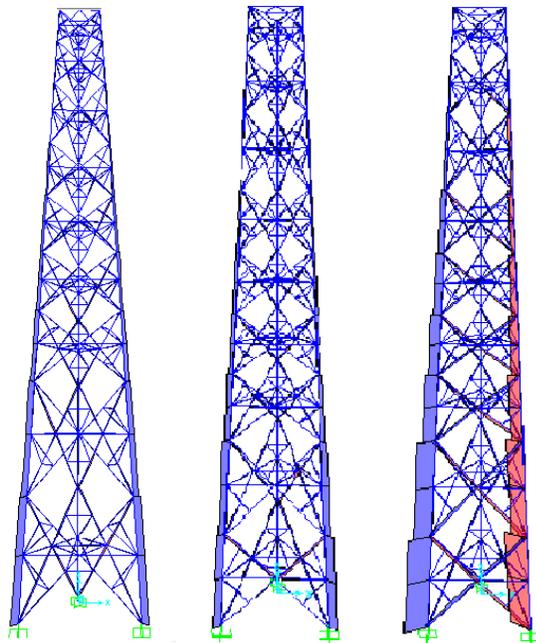
logrará obtener una configuración más óptima con respecto al diseño original. Como la torre tiene una base de 6 metros y una altura de 36, al proyectar una cara de la torre en el plano ZX para su análisis como armadura plana con la altura queda como sigue:

$$36^2 + \left(\frac{6}{2} - \frac{2,54}{2}\right)^2 = h_{real}^2$$

$$\therefore h_{real} = 30,045 \text{ m}$$

Por lo que se consideró despreciable este aumento en la altura de la torre.

La dirección del viento a considerar será la de  $90^\circ$ , debido a que es en esta dirección donde una de las caras recibe directamente las solicitaciones, mientras tanto en las demás direcciones de viento en las caras reciben componentes de las cargas y no su totalidad (ver figura 2.7). Además, teniendo en cuenta el modelo existente de la torre en SAP2000, se revisa los resultados de este para las tres direcciones de cargas, buscando en estos cual será la cara más cargada.



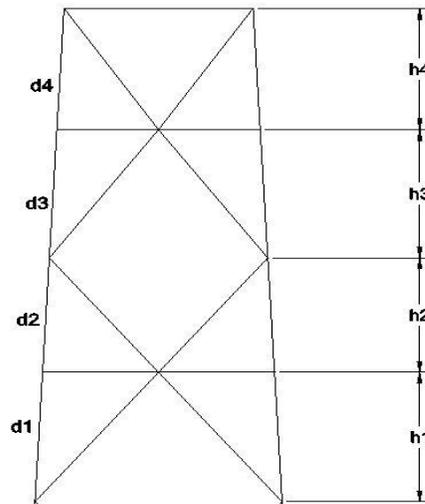
*Figura 2.9 Modelo sometido a las combinaciones de cargas a) Cargas  $0^\circ$ , b) Cargas  $60^\circ$ , Cargas  $90^\circ$ . (Martín, 2010)*

Para los casos de a carga en 90 y 60 grados la carga axial máxima en una de las barras es de 46 y 18 kN respectivamente, mientras que para la dirección de 0 grados la carga en la cara es casi despreciable. Se escoge entonces la dirección de 90 grados para el análisis.

Todos los elementos estructurales de la torre tienen un sistema de riostras (que no se puntualizan en el trabajo), cuyo propósito general es la prevención del pandeo en la estructura, este sistema no se tiene en cuenta en el análisis estructural por un doble motivo: su contribución es despreciable desde el punto de vista resistente y en segundo lugar su inclusión implicaría que el cálculo estructural se complejizara.

### Variables

Para la optimización de la distribución de los nodos, es decir, para encontrar la distancia óptima de los perfiles de acero, se asignaron dos tipos de variables fundamentales. Primeramente, las que representan la altura a la que se encuentra cada nudo con respecto a los del nivel inferior ( $h_1, h_2, h_3 \dots h_{18}$ ) y en segundo lugar las que representan el corrimiento que tiene cada nodo hacia el centro de la torre con respecto a los del nivel inferior ( $x_1, x_2, x_3 \dots x_{18}$ ).



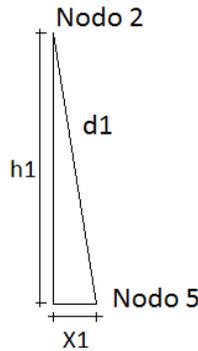
*Fig. 2.3 Variables. (Elaboración propia)*

Partiendo de que la ubicación de los apoyos, y de los nodos superiores de la estructura, se mantuvo fija, se mantienen entonces las pendientes de los perfiles columna de sección

tubular de la estructura, por lo que todas las variables para la optimización de la misma se pueden expresar en función de las alturas  $h_n$ , quedando entonces las expresiones siguientes para cada una de las variables:

$$x_n = (h_n \times 1,73)/36$$

$$d_n = \sqrt{h_n^2 + x_n^2}$$

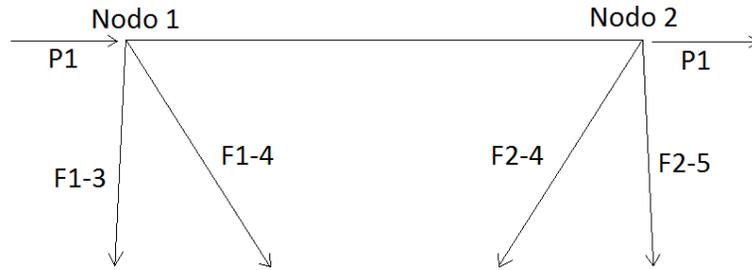


*Figura 2.10 Ejemplo de la distribución las variables. (Elaboración propia)*

### **Función Objetivo.**

La función por optimizar será la tensión máxima (max) que brindará alturas necesarias de los bloques para disminuir al mínimo posible la tensión máxima en cada una de las barras.

La parametrización de la armadura plana se logró mediante el método de las secciones para el cálculo, (ver Figura 2.11) obteniéndose las funciones de las tensiones en cada una de las barras realizando la sumatoria de fuerza en cada uno de los ejes de coordenadas y la sumatoria de momentos con respecto a cada nudo, lo cual proporciona un sistema de 4x4 ecuaciones en base a las variables de la estructura, pudiendo hallar de esta manera, una expresión para cada una de las tensiones en las barras de la estructura, parámetros fundamentales en el algoritmo.



*Figura 2.11 Ejemplo de una sección tomada en cuenta para la parametrización de las fuerzas. (Elaboración propia)*

Otro de los parámetros fundamentales tomados en cuenta en la optimización es la restricción que se tuvo en cuenta, que en este caso no fue otra que mantener fija la altura de la torre, es decir:  $h_1 + h_2 + \dots + h_{18} = 36m$ .

## 2.5 Parámetros tomados en cuenta en la optimización.

Para la realización del proceso de optimización en Matlab se tienen en cuenta diversos parámetros. Para el caso de estudio que nos ocupa se utilizaron los que usa por defecto el programa. Algunos de estos parámetros, fundamentalmente los tomados en cuenta son los siguientes, así como la función para la implementación de estos. Los comandos encerrados en paréntesis: Ejemplo ('doubleVector') son los utilizados para este caso.

- PopulationType: El tipo de Población de entrada.

[ 'bitstring' | 'custom' | ('doubleVector') ]

- PopulationSize: Valor escalar positivo que indica el número de individuos.

[ escalar positivo ]

- CrossoverFcn: Función usada para el cruzamiento.

[ @crossoverheuristic | @crossoverintermediate | (@crossoversinglepoint) | @crossovertwopoint | @crossoverarithmetic | @crossoverscattered ]

- MutationFcn: Función usada para la mutación de genes.

[ @mutationuniform | (@mutationadaptfeasible) |@mutationgaussian]

- Display: Niveles a mostrar.

['off' | ('iter') | 'diagnose' | 'final']

## **Conclusiones parciales**

- La dirección del viento a considerar será la de  $90^\circ$ , debido a que es en esta dirección donde una de las caras recibe directamente las solicitaciones, mientras tanto en las demás direcciones de viento las caras reciben componentes de las cargas y no su totalidad.
- Para la realización del algoritmo se realizará el análisis de la estructura, optimizando una de las caras de la estructura, utilizando para su cálculo y parametrización el método de las secciones y los nodos.

## **CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.**

En este capítulo se exponen los resultados obtenidos luego de la implementación del algoritmo utilizado para la optimización de la torre. Posteriormente se procede a la validación de los resultados, mediante la modelación de la estructura utilizando el software SAP2000, verificando su comportamiento ante las cargas actuantes. Se comprueba, la eficiencia de la optimización con el AG utilizado, mediante la comparación del peso de la estructura optimizada, con el de la estructura original. Además, se muestra la configuración final obtenida, en cuanto a la distribución de los perfiles seleccionados del Manual AISC para la torre optimizada.

### **3.1 Resultados de la optimización con el AG.**

El tamaño de población escogido fue de 50. Las poblaciones pequeñas corren el riesgo de no cubrir adecuadamente el espacio de búsqueda, mientras que al trabajar con poblaciones de gran tamaño puede acarrear problemas relacionados con el excesivo costo computacional (Alcazar, 2016). En cuanto a la cantidad de generaciones seleccionadas se selecciona una cantidad de 200 generaciones para el algoritmo, arribando a que el programa (Matlab) llegó a un resultado luego de la generación número 10, por lo que se decide disminuir el número de generaciones. Teniendo en cuenta estos aspectos, para la optimización en cuestión se tuvo en cuenta un tamaño de población de 50 y 100 generaciones.

Los valores óptimos de las variables,  $(h_1, h_2, \dots, h_{18})$  luego de aplicado el algoritmo a la estructura responden a los siguientes resultados:

Tabla 3.1 Valores óptimos de las alturas de cada tramo. (Fuente: elaboración propia)

Tramos	H	Tramos	h
1	1,86	10	1,36
2	2,21	11	1,81
3	2,53	12	1,37
4	1,12	13	1,21
5	1,16	14	1,22
6	2,94	15	1,88
7	1,52	16	3,13
8	1,61	17	3,95
9	1,14	18	3,99

Entonces la configuración de la armadura bidimensional obtenida es la mostrada en la Figura 3.1.

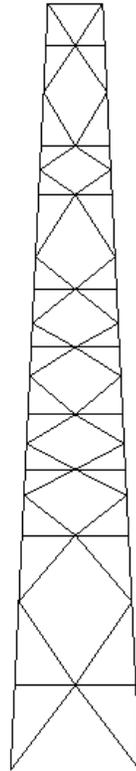


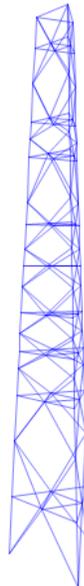
Figura 3.1 Configuración óptima de la torre arrojada por el algoritmo. (Elaboración propia)

A partir de esta configuración y respetando la distribución inicial que tenían los perfiles de acero de la torre, se realiza una nueva distribución de estos, utilizando los perfiles del Manual del AISC. Los perfiles utilizados son los mostrados en la Tabla 3.2.

Para la modelación de la torre en SAP2000, se respetaron las condiciones de apoyo empotradas de la torre original, además de las articulaciones existentes en cada uno de los nudos de la estructura. La Figura 3.2 muestra la torre luego de la optimización.

*Tabla 3.2 perfiles utilizados para la torre optimizada. (Fuente: elaboración propia)*

Denominación	Tipo de perfil	Área (cm <sup>2</sup> )	Ubicación por Tramo
L 70 x 70 x 6	Angular	8,13	1
T6	Tubular	5,58	
L 50 x 50 x 5	Angular	4,8	2
T3	Tubular	2,23	
L 50 x 50 x 4	Angular	3,89	3
T2,75	Tubular	1,7	
L 40 x 40 x 5	Angular	3,79	Tranques



*Figura 3.2 Modelo en SAP2000 de la torre optimizada (Elaboración propia)*

Las combinaciones de carga utilizadas para la modelación en SAP2000 fueron las siguientes:

$$1,2CP + 0,9CV$$

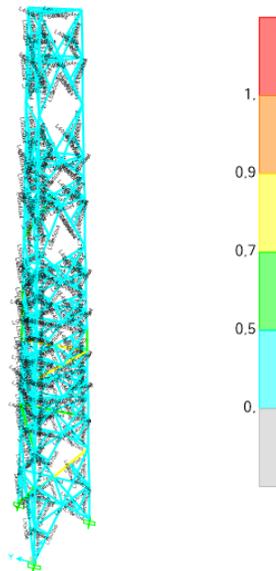
$$1,2CP + 1,4CV$$

Donde:

CP: Carga permanente

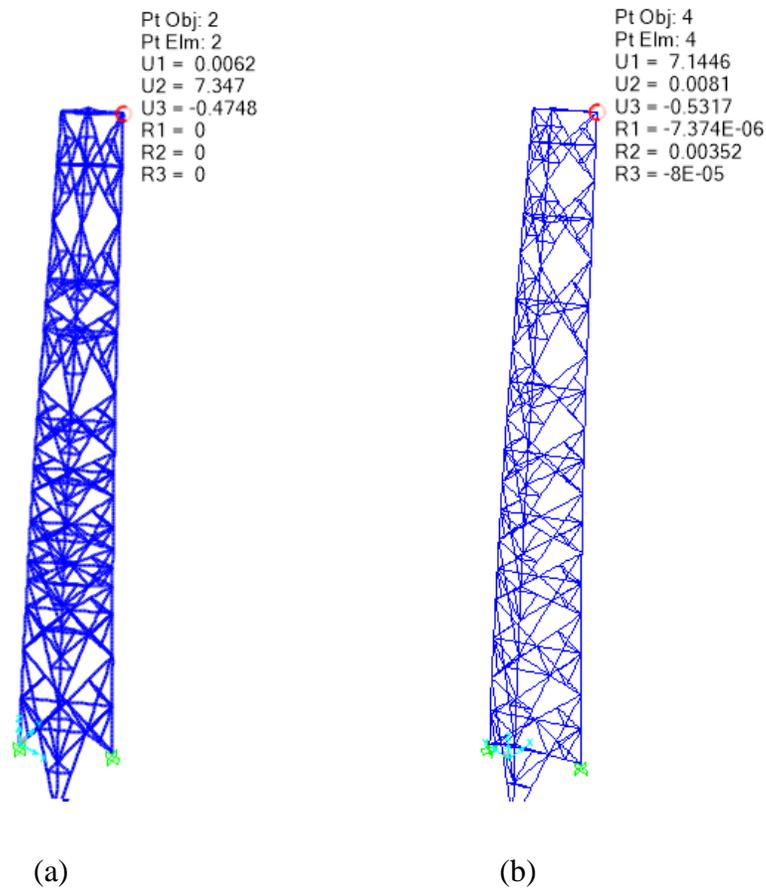
CV: Carga de viento.

Una vez idealizado el modelo con los perfiles de acero correspondientes a cada uno de los bloques que conforman el objeto en cuestión, se chequean cada una de estas secciones con el módulo de diseño y cheque de perfiles metálicos, con que cuenta el software SAP2000, se decide utilizar como normativa de diseño y revisión la AISC 360 del 2010, verificando que la capacidad sobre la demanda (Ratio) que experimentan estas secciones no debe sobrepasar un valor de 0.95 bajo las combinaciones de cargas mostradas anteriormente, valor propuesto por dicha normativa para lograr la aceptación de los perfiles de acero para el objeto de estudio en cuanto a resistencia y estabilidad.



*Figura 3.3 Valor de los ratio de cada perfil de la torre. (Elaboración propia)*

Además de chequear la capacidad de resistencia como de estabilidad de los perfiles que conforman la torre, se evaluó el desplazamiento o deriva máximos que experimenta la misma en su tope comparándose con el desplazamiento medido en el modelo original, observándose desplazamientos similares entre los 7.3 y 7.1 cm, los cuales debe ser controlados en dependencia de la funcionalidad a la que es destinada la estructura.



*Figura 3.4 Desplazamientos máximos en el tope de la torre (a) Modelo optimizado. (b) Modelo original. (Elaboración propia)*

Mediante el cálculo de cada uno de los elementos de la torre y de su longitud, luego de definidas las áreas a utilizar y de comprobados los esfuerzos en cada elemento, se procede al cálculo del peso total de la estructura. Mediante este es posible establecer una comparación con la de la anterior, que era de 4,2 toneladas. Para la realización de este cálculo se parte de la ecuación:

$$m = \delta \times V$$

Donde:

$\delta$ : Densidad del acero (kg/m<sup>3</sup>), en este caso acero A-36 para el cual  $\delta = 7850 \text{ kg/m}^3$

$m$ : Masa (kg)

$V$ : Volumen en m<sup>3</sup>

Para el cálculo del volumen basta con multiplicar el área real de la sección transversal de cada perfil, por su longitud. Para la realización de estos cálculos se utiliza una hoja de Excel que facilita los mismos. También es de considerar que el cálculo del peso de la estructura se debe tener en cuenta el peso de los tranques no considerados para la optimización de la misma. La tabla con estos cálculos se muestra en el Anexo 3 del trabajo y el resultado final arroja a que la torre tiene un peso 2,8 t lo que representa un ahorro del 34 % en acero para la construcción de la estructura.

### **Conclusiones parciales.**

- El modelo optimizado arroja a una configuración óptima en cuanto al área de los perfiles a utilizar en la torre, ya que este llega a la definición de las longitudes mínimas donde las tensiones en las barras son máximas.
- La configuración optimizada realizada de la torre alcanza resultados que disminuyen en gran medida el consumo de materiales de la torre, optimizando con ello el costo total para la construcción de la misma.

## CONCLUSIONES

1. En la actualidad la optimización es un proceso que tiene grandes aplicaciones en prácticamente cualquier área, con lo cual se logra una mejora de procesos y por tanto reducción de costos, tiempo, etc. La optimización en el campo de las estructuras es un tema de vital importancia ya que ayuda a la obtención de estructuras más económicas y con mejores propiedades.
2. La utilización de Algoritmos Genéticos como técnica para la optimización de armaduras espaciales, arroja a resultados óptimos para la obtención de factores como el área de la sección, longitud de los elementos y configuración de las cerchas.
3. Se obtiene una configuración óptima de una armadura, la cual conduce a valores de área de sección de los elementos mucho menores a los existentes en la estructura original, demostrando que los algoritmos genéticos son herramientas de gran utilidad para los ingenieros en el cálculo de estructuras de este tipo.
4. La optimización de la armadura tridimensional, caso de estudio, considerando para esta solo la de la armadura plana que compone una de sus caras, arroja resultados satisfactorios, con respecto al peso de la estructura y en consecuencia el costo de la misma.

## RECOMENDACIONES

1. Realizar la optimización de la torre como armadura espacial en futuras investigaciones, lo cual puede proporcionar una estructura más óptima aún ya que se tendrá en cuenta esta como estructura en su conjunto.
2. Analizar las otras direcciones del viento tomadas en cuenta para la modelación de la torre.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBA, E. & TOMASSINI, M. 2002. *Parallelism and evolutionary algorithms*.
- ALCAZAR, Y. 2016. *Aplicación de los algoritmos genéticos en la optimización de funciones*. Universidad de Matanzas Sede “Camilo Cienfuegos”.
- BAQUELA, E. G. & REDCHUK, A. 2013. *Optimización Matemática con R*, Madrid.
- BENITEZ, D. 2010. *Sistema de evaluación de la condición física para el mantenimiento de torres Autosoportadas de Telecomunicaciones*. Instituto Politécnico Superior José Antonio Echeverría.
- BORDA, J. L. & RODRÍGUEZ, G. 2010. Optimización de Secciones Transversales de Pórticos de Hormigón Armado Mediante Uso de la Técnica de Programación Cuadrática Secuencial SQP. *Mecánica Computacional*, Vol. XXIX, 9719-9738.
- CARRASCO, A. 2009. *Optimización del Diseño de una Torre de Celosía de 40 Metros Portadora de Antenas*. Universidad Carlos III de Madrid.
- COELLO, C. A. 1995. *Introducción a los Algoritmos Genéticos y sus Aplicaciones. Soluciones Avanzadas. Tecnologías de Información y Estrategias de Negocios*.
- ECHEVERRÍA, S. R. 2014. *Metodología basada en Algoritmos Genéticos y Programación en Paralelo para el Diseño Óptimo de Armaduras de Acero*. Pontificia Universidad Javeriana.
- ELENA, V. 2008. Fallas Estructurales en Torres Reticuladas Para Telecomunicaciones. *Arquitectura y Urbanismo*, Vol. XXIX, 57-63.
- GOLDBERG, D. E. 1989. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*, U.S.A., Addison-Wesley.
- KOZA, J. R. 1992. *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*, Massachusetts Institute of Technology.
- MARTÍN, P. 2010. Informe del Proyecto Vulnerabilidad Sísmica de Santiago de Cuba. La Habana: Laboratorio de Análisis y Modelación de Torres de Telecomunicaciones.
- MARTÍN, P. 2012. *Evaluación de la Vulnerabilidad Estructural de Torres Autosoportadas de Telecomunicaciones Bajo Cargas de Viento y Sismo*. Tesis de Maestría en Reducción de Desastres, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría.
- MARTÍN, P. & ELENA, V. 2012. Análisis sísmico de modelos cubanos de torres autosoportadas de telecomunicaciones. *Revista Cubana de Ingeniería*, Vol. III, 25-34.
- MOHAMMED, A., ÖZAKÇA, M. & TAYŞI, N. 2012. Optimal Design of Transmission Towers Using Genetic Algorithm 115-123.
- NICOLÁS, M. V. 2006. *OPTIMIZACIÓN DE FORMA Y TOPOLOGÍA CON MALLA FIJA Y ALGORITMOS GENÉTICOS*. UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA.

- NORMALIZACIÓN, O. N. D. N. 2003. Carga De Viento. Método de Calculo. *In:* NORMALIZACIÓN, O. N. D. (ed.). Ciudad de La Habana.
- PÉREZ, C. 2001. Torres Para Antenas.
- PRENDES, B., BELLO, A. & DELCOZ, J. J. 2002. Entorno Gráfico Para la Optimización de Estructuras Metálicas en Base a Algoritmos Genéticos.
- RODRÍGUEZ, P. T. 2011. Introducción a los algoritmos genéticos y sus aplicaciones
- TORRANO, S. & MARTÍ, P. 2003. *Diseño óptimo de geometría y de propiedades de estructuras de hormigón armado*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales Universidad de Murcia
- VIDAL, R. 2011. *Estudio comparativo de dos tipologías estructurales para soporte de antenas de telefonía móvil*. Universidad Carlos III de Madrid.
- VILLANUEVA, E. 2014. *Análisis Estructural de una Torre de Alta Tensión*. Proyecto de Fin de Carrera, Universidad Carlos III de Madrid.

## ANEXOS

### Anexo 1 Procedimiento para el cálculo de la armadura.

```
function y = Cabon(x)

%Definición de las variables. Alturas de la torre

h1=x(:, 1);
h2=x(:, 2);
h3=x(:, 3);
h4=x(:, 4);
h5=x(:, 5);
h6=x(:, 6);
h7=x(:, 7);
h8=x(:, 8);
h9=x(:, 9);
h10=x(:, 10);
h11=x(:, 11);
h12=x(:, 12);
h13=x(:, 13);
h14=x(:, 14);
h15=x(:, 15);
h16=x(:, 16);
h17=x(:, 17);
h18=x(:, 18);
x=x(:, 19);

%Disminución del ancho de la torre

x1=(h1*1.73)/(36);
x2=(h2*1.73)/(36);
x3=(h3*1.73)/(36);
x4=(h4*1.73)/(36);
x5=(h5*1.73)/(36);
x6=(h6*1.73)/(36);
x7=(h7*1.73)/(36);
x8=(h8*1.73)/(36);
x9=(h9*1.73)/(36);
x10=(h10*1.73)/(36);
x11=(h11*1.73)/(36);
x12=(h12*1.73)/(36);
x13=(h13*1.73)/(36);
x14=(h14*1.73)/(36);
x15=(h15*1.73)/(36);
x16=(h16*1.73)/(36);
x17=(h17*1.73)/(36);

%Largo de las diagonales de las columnas de la torre

d1=sqrt((h1^2)+(x1^2));
d3=sqrt((h3^2)+(x3^2));
d5=sqrt((h5^2)+(x5^2));
```

```

d7=sqrt((h7^2)+(x7^2));
d9=sqrt((h9^2)+(x9^2));
d11=sqrt((h11^2)+(x11^2));
d13=sqrt((h13^2)+(x13^2));
d15=sqrt((h15^2)+(x15^2));
d17=sqrt((h17^2)+(x17^2));

%Largo de los tranques

X_1=1.27+x1;
X_2=1.27+x1+x2;
X_3=1.27+x1+x2+x3;
X_4=1.27+x1+x2+x3+x4;
X_5=1.27+x1+x2+x3+x4+x5;
X_6=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6;
X_7=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7;
X_8=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8;
X_9=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9;
X_10=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10;
X_11=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11;
X_12=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12;
X_13=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13;
X_14=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14;
X_15=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15;
X_16=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15+x16;
X_17=1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15+x16+x17;

%largo de los perfiles de angulares diagonales

t1=sqrt((X_1^2)+(h1^2));
t3=sqrt((X_3^2)+(h3^2));
t5=sqrt((X_5^2)+(h5^2));
t7=sqrt((X_7^2)+(h7^2));
t9=sqrt((X_9^2)+(h9^2));
t11=sqrt((X_11^2)+(h11^2));
t13=sqrt((X_13^2)+(h13^2));
t15=sqrt((X_15^2)+(h15^2));
t17=sqrt((X_17^2)+(h17^2));

%Cálculo de las cargas
%Presión básica del viento

q10=0.9;

%Coeficiente de sitio

Cs=1.1;

%Coeficiente de reducción

Cra=1;

%Coeficiente de forma o aerodinámico

```

```

Ct=1;

%Gradiente del coeficiente de altura

Z1=h1+h2+h3+h4+h5+h6+h7+h8+h9+h10+h11+h12+h13+h14+h15+h16+h17+h18;
Z2=h1+h2+h3+h4+h5+h6+h7+h8+h9+h10+h11+h12+h13+h14+h15+h16;
Z3=h1+h2+h3+h4+h5+h6+h7+h8+h9+h10+h11+h12+h13+h14;
Z4=h1+h2+h3+h4+h5+h6+h7+h8+h9+h10+h11+h12;
Z5=h1+h2+h3+h4+h5+h6+h7+h8+h9+h10;
Z6=h1+h2+h3+h4+h5+h6+h7+h8;
Z7=h1+h2+h3+h4+h5+h6;
Z8=h1+h2+h3+h4;
Z9=h1+h2;

%Coeficiente de altura

Ch1=(Z1/10)^0.32;
Ch2=(Z2/10)^0.32;
Ch3=(Z3/10)^0.32;
Ch4=(Z4/10)^0.32;
Ch5=(Z5/10)^0.32;
Ch6=(Z6/10)^0.32;
Ch7=(Z7/10)^0.32;
Ch8=(Z8/10)^0.32;
Ch9=(Z9/10)^0.32;

%Coeficiente de ráfaga

Cr=1.11;

%Coeficiente de forma

Cf1=1.9;
Cf2=1.9;
Cf3=1.9;
Cf4=1.9;
Cf5=1.9;
Cf6=1.9;
Cf7=1.9;
Cf8=1.9;
Cf9=1.9;

%Coeficiente de recurrencia

Ct=1;

%Componente estática del viento

q1=q10*Cs*Ch1*Cra*Ct*Cf1*Cr;
q2=q10*Cs*Ch2*Cra*Ct*Cf2*Cr;
q3=q10*Cs*Ch3*Cra*Ct*Cf3*Cr;
q4=q10*Cs*Ch4*Cra*Ct*Cf4*Cr;
q5=q10*Cs*Ch5*Cra*Ct*Cf5*Cr;
q6=q10*Cs*Ch6*Cra*Ct*Cf6*Cr;

```

```

q7=q10*Cs*Ch7*Cra*Ct*Cf7*Cr;
q8=q10*Cs*Ch8*Cra*Ct*Cf8*Cr;
q9=q10*Cs*Ch9*Cra*Ct*Cf9*Cr;

```

%Área bruta de la sección bajo la carga estática

```

Ab1=(((1.27)+(1.27+x1))/2)*(h1);
Ab2=(((1.27+x1)+(1.27+x1+x2+x3))/2)*(h2+h3);
Ab3=(((1.27+x1+x2+x3)+(1.27+x1+x2+x3+x4+x5))/2)*(h4+h5);
Ab4=(((1.27+x1+x2+x3+x4+x5)+(1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7))/2)*(h6+h7);
Ab5=(((1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7)+(1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9))/2)
*(h8+h9);
Ab6=(((1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9)+(1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x
9+x10+x11))/2)*(h10+h11);
Ab7=(((1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11)+(1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6
+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13))/2)*(h12+h13);
Ab8=(((1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13)+(1.27+x1+x2+x3+
x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15))/2)*(h14+h15);
Ab9=(((1.27+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15)+(1.27+x
1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15+x16+x17))/2)*(h16+h17
);

```

%Área neta de la sección bajo la carga estática

```

An1=0.15*Ab1;
An2=0.15*Ab2;
An3=0.15*Ab3;
An4=0.15*Ab4;
An5=0.15*Ab5;
An6=0.15*Ab6;
An7=0.15*Ab7;
An8=0.15*Ab8;
An9=0.15*Ab9;

```

%Carga concentrada

```

P_1=An1*q1;
P_2=An2*q2;
P_3=An3*q3;
P_4=An4*q4;
P_5=An5*q5;
P_6=An6*q6;
P_7=An7*q7;
P_8=An8*q8;
P_9=An9*q9;

```

%Carga concentrada en cada nodo

```

P1=P_1/3;
P2=P_2/3;
P3=P_3/3;
P4=P_4/3;
P5=P_5/3;
P6=P_6/3;
P7=P_7/3;

```

P8=P\_8/3;  
P9=P\_9/3;

%Fuerzas en cada barra

```
F_1_3=(127*d1*x + 200*P1*d1*t1 + 100*t1*x*x1)/(127*d1 + 100*t1*x1);  
F_1_4=-(127*d1*x + 200*P1*d1*t1 + 100*t1*x*x1)/(127*d1 + 100*t1*x1);  
F_2_4=-x;  
F_2_5=x;  
F_3_4=0;  
F_5_4=0;  
F_3_6=F_1_3;  
F_4_6=F_1_4;  
F_4_7=F_2_4;  
F_5_7=F_2_5;  
F_6_8=(12700*X_2^2*d3*h3*x + 12700*P1*d3*h1*t3 + 12700*P1*d3*h2*t3 +  
16129*X_2*d3*h3*x + 10000*P1*X_2*d3*h1*t3 + 10000*P1*X_2*d3*h2*t3 +  
25400*P1*X_2*d3*h3*t3 + 25400*P2*X_2*d3*h3*t3 +  
12700*X_2*h3*t3*x*x3)/(127*X_2*h3*(127*d3 + 100*X_2*d3 + 100*t3*x3));  
F_6_9=-(12700*X_2^2*d3*h3*x - 5000*P1*h1*t3^2*x3 - 5000*P1*h2*t3^2*x3 +  
6350*P1*d3*h1*t3 + 6350*P1*d3*h2*t3 + 16129*X_2*d3*h3*x +  
5000*P1*X_2*d3*h1*t3 + 5000*P1*X_2*d3*h2*t3 +25400*P1*X_2*d3*h3*t3 +  
25400*P2*X_2*d3*h3*t3 + 12700*X_2*h3*t3*x*x3)/(127*X_2*h3*(127*d3 +  
100*X_2*d3 + 100*t3*x3));  
F_7_9=-(50*P1*h1*t3 + 50*P1*h2*t3 + 127*X_2*h3*x)/(127*X_2*h3);  
F_7_10=x;  
F_8_9=0;  
F_10_9=0;  
F_8_11=F_6_8;  
F_9_11=F_6_9;  
F_9_12=F_7_9;  
F_10_12=F_7_10;  
F_11_13=(12700*X_4^2*d5*h5*x + 12700*P2*d5*h1*t5 + 12700*P2*d5*h2*t5 +  
25400*P2*d5*h3*t5 + 25400*P2*d5*h4*t5 + 16129*X_4*d5*h5*x +  
10000*P2*X_4*d5*h1*t5 + 10000*P2*X_4*d5*h2*t5 + 20000*P2*X_4*d5*h3*t5 +  
25400*P1*X_4*d5*h5*t5 + 20000*P2*X_4*d5*h4*t5 + 25400*P2*X_4*d5*h5*t5 +  
25400*P3*X_4*d5*h5*t5 + 12700*X_4*h5*t5*x*x5)/(127*X_4*h5*(127*d5 +  
100*X_4*d5 + 100*t5*x5));  
F_11_14=-(12700*X_4^2*d5*h5*x - 5000*P2*h1*t5^2*x5 - 5000*P2*h2*t5^2*x5 -  
10000*P2*h3*t5^2*x5 - 10000*P2*h4*t5^2*x5 + 6350*P2*d5*h1*t5 +  
6350*P2*d5*h2*t5 + 12700*P2*d5*h3*t5 + 12700*P2*d5*h4*t5 +  
16129*X_4*d5*h5*x + 5000*P2*X_4*d5*h1*t5 + 5000*P2*X_4*d5*h2*t5 +  
10000*P2*X_4*d5*h3*t5 + 25400*P1*X_4*d5*h5*t5 + 10000*P2*X_4*d5*h4*t5 +  
25400*P2*X_4*d5*h5*t5 + 25400*P3*X_4*d5*h5*t5 +  
12700*X_4*h5*t5*x*x5)/(127*X_4*h5*(127*d5 + 100*X_4*d5 + 100*t5*x5));  
F_12_14=-(50*P2*h1*t5 + 50*P2*h2*t5 + 100*P2*h3*t5 + 100*P2*h4*t5 +  
127*X_4*h5*x)/(127*X_4*h5);  
F_12_15=x;  
F_13_14=0;  
F_15_14=0;  
F_13_16=F_11_13;  
F_14_16=F_11_14;  
F_14_17=F_12_14;  
F_15_17=F_12_15;  
F_16_18=(12700*X_6^2*d7*h7*x + 12700*P3*d7*h1*t7 + 12700*P2*d7*h3*t7 +  
12700*P3*d7*h2*t7 + 12700*P2*d7*h4*t7 + 12700*P3*d7*h3*t7 +
```



6350\*P4\*d9\*h5\*t9 + 6350\*P2\*d9\*h8\*t9 + 6350\*P3\*d9\*h7\*t9 +  
6350\*P4\*d9\*h6\*t9 + 6350\*P3\*d9\*h8\*t9 + 12700\*P4\*d9\*h7\*t9 +  
12700\*P4\*d9\*h8\*t9 + 16129\*X\_8\*d9\*h9\*x + 5000\*P4\*X\_8\*d9\*h1\*t9 +  
5000\*P3\*X\_8\*d9\*h3\*t9 + 5000\*P4\*X\_8\*d9\*h2\*t9 + 5000\*P2\*X\_8\*d9\*h5\*t9 +  
5000\*P3\*X\_8\*d9\*h4\*t9 + 5000\*P4\*X\_8\*d9\*h3\*t9 + 5000\*P2\*X\_8\*d9\*h6\*t9 +  
5000\*P3\*X\_8\*d9\*h5\*t9 + 5000\*P4\*X\_8\*d9\*h4\*t9 + 5000\*P2\*X\_8\*d9\*h7\*t9 +  
5000\*P3\*X\_8\*d9\*h6\*t9 + 5000\*P4\*X\_8\*d9\*h5\*t9 + 25400\*P1\*X\_8\*d9\*h9\*t9 +  
5000\*P2\*X\_8\*d9\*h8\*t9 + 5000\*P3\*X\_8\*d9\*h7\*t9 + 5000\*P4\*X\_8\*d9\*h6\*t9 +  
25400\*P2\*X\_8\*d9\*h9\*t9 + 5000\*P3\*X\_8\*d9\*h8\*t9 + 10000\*P4\*X\_8\*d9\*h7\*t9 +  
25400\*P3\*X\_8\*d9\*h9\*t9 + 10000\*P4\*X\_8\*d9\*h8\*t9 + 25400\*P4\*X\_8\*d9\*h9\*t9 +  
25400\*P5\*X\_8\*d9\*h9\*t9 + 12700\*X\_8\*h9\*t9\*x\*x9)/(127\*X\_8\*h9\*(127\*d9 +  
100\*X\_8\*d9 + 100\*t9\*x9));  
F\_22\_24=-(50\*P4\*h1\*t9 + 50\*P3\*h3\*t9 + 50\*P4\*h2\*t9 + 50\*P2\*h5\*t9 +  
50\*P3\*h4\*t9 + 50\*P4\*h3\*t9 + 50\*P2\*h6\*t9 + 50\*P3\*h5\*t9 + 50\*P4\*h4\*t9 +  
50\*P2\*h7\*t9 + 50\*P3\*h6\*t9 + 50\*P4\*h5\*t9 + 50\*P2\*h8\*t9 + 50\*P3\*h7\*t9 +  
50\*P4\*h6\*t9 + 50\*P3\*h8\*t9 + 100\*P4\*h7\*t9 + 100\*P4\*h8\*t9 +  
127\*X\_8\*h9\*x)/(127\*X\_8\*h9);  
F\_22\_25=x;  
F\_23\_24=0;  
F\_25\_24=0;  
F\_23\_26=F\_21\_23;  
F\_24\_26=F\_21\_24;  
F\_24\_27=F\_22\_24;  
F\_25\_27=F\_22\_25;  
F\_26\_28=(12700\*X\_10^2\*d11\*h11\*x + 12700\*P5\*d11\*h1\*t11 +  
12700\*P4\*d11\*h3\*t11 + 12700\*P5\*d11\*h2\*t11 + 12700\*P3\*d11\*h5\*t11 +  
12700\*P4\*d11\*h4\*t11 + 12700\*P5\*d11\*h3\*t11 + 12700\*P2\*d11\*h7\*t11 +  
12700\*P3\*d11\*h6\*t11 + 12700\*P4\*d11\*h5\*t11 + 12700\*P5\*d11\*h4\*t11 +  
12700\*P2\*d11\*h8\*t11 + 12700\*P3\*d11\*h7\*t11 + 12700\*P4\*d11\*h6\*t11 +  
12700\*P5\*d11\*h5\*t11 + 12700\*P2\*d11\*h9\*t11 + 12700\*P3\*d11\*h8\*t11 +  
12700\*P4\*d11\*h7\*t11 + 12700\*P5\*d11\*h6\*t11 + 12700\*P2\*d11\*h10\*t11 +  
12700\*P3\*d11\*h9\*t11 + 12700\*P4\*d11\*h8\*t11 + 12700\*P5\*d11\*h7\*t11 +  
12700\*P3\*d11\*h10\*t11 + 12700\*P4\*d11\*h9\*t11 + 12700\*P5\*d11\*h8\*t11 +  
12700\*P4\*d11\*h10\*t11 + 25400\*P5\*d11\*h9\*t11 + 25400\*P5\*d11\*h10\*t11 +  
16129\*X\_10\*d11\*h11\*x + 10000\*P5\*X\_10\*d11\*h1\*t11 +  
10000\*P4\*X\_10\*d11\*h3\*t11 + 10000\*P5\*X\_10\*d11\*h2\*t11 +  
10000\*P3\*X\_10\*d11\*h5\*t11 + 10000\*P4\*X\_10\*d11\*h4\*t11 +  
10000\*P5\*X\_10\*d11\*h3\*t11 + 10000\*P2\*X\_10\*d11\*h7\*t11 +  
10000\*P3\*X\_10\*d11\*h6\*t11 + 10000\*P4\*X\_10\*d11\*h5\*t11 +  
10000\*P5\*X\_10\*d11\*h4\*t11 + 10000\*P2\*X\_10\*d11\*h8\*t11 +  
10000\*P3\*X\_10\*d11\*h7\*t11 + 10000\*P4\*X\_10\*d11\*h6\*t11 +  
10000\*P5\*X\_10\*d11\*h5\*t11 + 10000\*P2\*X\_10\*d11\*h9\*t11 +  
10000\*P3\*X\_10\*d11\*h8\*t11 + 10000\*P4\*X\_10\*d11\*h7\*t11 +  
10000\*P5\*X\_10\*d11\*h6\*t11 + 25400\*P1\*X\_10\*d11\*h11\*t11 +  
10000\*P2\*X\_10\*d11\*h10\*t11 + 10000\*P3\*X\_10\*d11\*h9\*t11 +  
10000\*P4\*X\_10\*d11\*h8\*t11 + 10000\*P5\*X\_10\*d11\*h7\*t11 +  
25400\*P2\*X\_10\*d11\*h11\*t11 + 10000\*P3\*X\_10\*d11\*h10\*t11 +  
10000\*P4\*X\_10\*d11\*h9\*t11 + 10000\*P5\*X\_10\*d11\*h8\*t11 +  
25400\*P3\*X\_10\*d11\*h11\*t11 + 10000\*P4\*X\_10\*d11\*h10\*t11 +  
20000\*P5\*X\_10\*d11\*h9\*t11 + 25400\*P4\*X\_10\*d11\*h11\*t11 +  
20000\*P5\*X\_10\*d11\*h10\*t11 + 25400\*P5\*X\_10\*d11\*h11\*t11 +  
25400\*P6\*X\_10\*d11\*h11\*t11 +  
12700\*X\_10\*h11\*t11\*x\*x11)/(127\*X\_10\*h11\*(127\*d11 + 100\*X\_10\*d11 +  
100\*t11\*x11));  
F\_26\_29=-(12700\*X\_10^2\*d11\*h11\*x - 5000\*P5\*h1\*t11^2\*x11 -  
5000\*P4\*h3\*t11^2\*x11 - 5000\*P5\*h2\*t11^2\*x11 - 5000\*P3\*h5\*t11^2\*x11 -  
5000\*P4\*h4\*t11^2\*x11 - 5000\*P5\*h3\*t11^2\*x11 - 5000\*P2\*h7\*t11^2\*x11 -

$$\begin{aligned}
& 5000*P3*h6*t11^2*x11 - 5000*P4*h5*t11^2*x11 - 5000*P5*h4*t11^2*x11 - \\
& 5000*P2*h8*t11^2*x11 - 5000*P3*h7*t11^2*x11 - 5000*P4*h6*t11^2*x11 - \\
& 5000*P5*h5*t11^2*x11 - 5000*P2*h9*t11^2*x11 - 5000*P3*h8*t11^2*x11 - \\
& 5000*P4*h7*t11^2*x11 - 5000*P5*h6*t11^2*x11 - 5000*P2*h10*t11^2*x11 - \\
& 5000*P3*h9*t11^2*x11 - 5000*P4*h8*t11^2*x11 - 5000*P5*h7*t11^2*x11 - \\
& 5000*P3*h10*t11^2*x11 - 5000*P4*h9*t11^2*x11 - 5000*P5*h8*t11^2*x11 - \\
& 5000*P4*h10*t11^2*x11 - 10000*P5*h9*t11^2*x11 - 10000*P5*h10*t11^2*x11 \\
& + 6350*P5*d11*h1*t11 + 6350*P4*d11*h3*t11 + 6350*P5*d11*h2*t11 + \\
& 6350*P3*d11*h5*t11 + 6350*P4*d11*h4*t11 + 6350*P5*d11*h3*t11 + \\
& 6350*P2*d11*h7*t11 + 6350*P3*d11*h6*t11 + 6350*P4*d11*h5*t11 + \\
& 6350*P5*d11*h4*t11 + 6350*P2*d11*h8*t11 + 6350*P3*d11*h7*t11 + \\
& 6350*P4*d11*h6*t11 + 6350*P5*d11*h5*t11 + 6350*P2*d11*h9*t11 + \\
& 6350*P3*d11*h8*t11 + 6350*P4*d11*h7*t11 + 6350*P5*d11*h6*t11 + \\
& 6350*P2*d11*h10*t11 + 6350*P3*d11*h9*t11 + 6350*P4*d11*h8*t11 + \\
& 6350*P5*d11*h7*t11 + 6350*P3*d11*h10*t11 + 6350*P4*d11*h9*t11 + \\
& 6350*P5*d11*h8*t11 + 6350*P4*d11*h10*t11 + 12700*P5*d11*h9*t11 + \\
& 12700*P5*d11*h10*t11 + 16129*X_10*d11*h11*x + 5000*P5*X_10*d11*h1*t11 + \\
& 5000*P4*X_10*d11*h3*t11 + 5000*P5*X_10*d11*h2*t11 + \\
& 5000*P3*X_10*d11*h5*t11 + 5000*P4*X_10*d11*h4*t11 + \\
& 5000*P5*X_10*d11*h3*t11 + 5000*P2*X_10*d11*h7*t11 + \\
& 5000*P3*X_10*d11*h6*t11 + 5000*P4*X_10*d11*h5*t11 + \\
& 5000*P5*X_10*d11*h4*t11 + 5000*P2*X_10*d11*h8*t11 + \\
& 5000*P3*X_10*d11*h7*t11 + 5000*P4*X_10*d11*h6*t11 + \\
& 5000*P5*X_10*d11*h5*t11 + 5000*P2*X_10*d11*h9*t11 + \\
& 5000*P3*X_10*d11*h8*t11 + 5000*P4*X_10*d11*h7*t11 + \\
& 5000*P5*X_10*d11*h6*t11 + 25400*P1*X_10*d11*h11*t11 + \\
& 5000*P2*X_10*d11*h10*t11 + 5000*P3*X_10*d11*h9*t11 + \\
& 5000*P4*X_10*d11*h8*t11 + 5000*P5*X_10*d11*h7*t11 + \\
& 25400*P2*X_10*d11*h11*t11 + 5000*P3*X_10*d11*h10*t11 + \\
& 5000*P4*X_10*d11*h9*t11 + 5000*P5*X_10*d11*h8*t11 + \\
& 25400*P3*X_10*d11*h11*t11 + 5000*P4*X_10*d11*h10*t11 + \\
& 10000*P5*X_10*d11*h9*t11 + 25400*P4*X_10*d11*h11*t11 + \\
& 10000*P5*X_10*d11*h10*t11 + 25400*P5*X_10*d11*h11*t11 + \\
& 25400*P6*X_10*d11*h11*t11 + \\
& 12700*X_10*h11*t11*x*x11)/(127*X_10*h11*(127*d11 + 100*X_10*d11 + \\
& 100*t11*x11)); \\
& F_{27\_29} = -(50*P5*h1*t11 + 50*P4*h3*t11 + 50*P5*h2*t11 + 50*P3*h5*t11 + \\
& 50*P4*h4*t11 + 50*P5*h3*t11 + 50*P2*h7*t11 + 50*P3*h6*t11 + \\
& 50*P4*h5*t11 + 50*P5*h4*t11 + 50*P2*h8*t11 + 50*P3*h7*t11 + \\
& 50*P4*h6*t11 + 50*P5*h5*t11 + 50*P2*h9*t11 + 50*P3*h8*t11 + \\
& 50*P4*h7*t11 + 50*P5*h6*t11 + 50*P2*h10*t11 + 50*P3*h9*t11 + \\
& 50*P4*h8*t11 + 50*P5*h7*t11 + 50*P3*h10*t11 + 50*P4*h9*t11 + \\
& 50*P5*h8*t11 + 50*P4*h10*t11 + 100*P5*h9*t11 + 100*P5*h10*t11 + \\
& 127*X_10*h11*x)/(127*X_10*h11); \\
& F_{27\_30} = x; \\
& F_{28\_29} = 0; \\
& F_{30\_29} = 0; \\
& F_{28\_31} = F_{26\_28}; \\
& F_{29\_31} = F_{26\_29}; \\
& F_{29\_32} = F_{27\_29}; \\
& F_{30\_32} = F_{27\_30}; \\
& F_{31\_33} = (12700*X_12^2*d13*h13*x + 12700*P6*d13*h1*t13 + \\
& 12700*P5*d13*h3*t13 + 12700*P6*d13*h2*t13 + 12700*P4*d13*h5*t13 + \\
& 12700*P5*d13*h4*t13 + 12700*P6*d13*h3*t13 + 12700*P3*d13*h7*t13 + \\
& 12700*P4*d13*h6*t13 + 12700*P5*d13*h5*t13 + 12700*P6*d13*h4*t13 + \\
& 12700*P2*d13*h9*t13 + 12700*P3*d13*h8*t13 + 12700*P4*d13*h7*t13 + \\
& 12700*P5*d13*h6*t13 + 12700*P6*d13*h5*t13 + 12700*P2*d13*h10*t13 +
\end{aligned}$$

12700\*P3\*d13\*h9\*t13 + 12700\*P4\*d13\*h8\*t13 + 12700\*P5\*d13\*h7\*t13 +  
12700\*P6\*d13\*h6\*t13 + 12700\*P2\*d13\*h11\*t13 + 12700\*P3\*d13\*h10\*t13 +  
12700\*P4\*d13\*h9\*t13 + 12700\*P5\*d13\*h8\*t13 + 12700\*P6\*d13\*h7\*t13 +  
12700\*P2\*d13\*h12\*t13 + 12700\*P3\*d13\*h11\*t13 + 12700\*P4\*d13\*h10\*t13 +  
12700\*P5\*d13\*h9\*t13 + 12700\*P6\*d13\*h8\*t13 + 12700\*P3\*d13\*h12\*t13 +  
12700\*P4\*d13\*h11\*t13 + 12700\*P5\*d13\*h10\*t13 + 12700\*P6\*d13\*h9\*t13 +  
12700\*P4\*d13\*h12\*t13 + 12700\*P5\*d13\*h11\*t13 + 12700\*P6\*d13\*h10\*t13 +  
12700\*P5\*d13\*h12\*t13 + 25400\*P6\*d13\*h11\*t13 + 25400\*P6\*d13\*h12\*t13 +  
16129\*X\_12\*d13\*h13\*x + 10000\*P6\*X\_12\*d13\*h1\*t13 +  
10000\*P5\*X\_12\*d13\*h3\*t13 + 10000\*P6\*X\_12\*d13\*h2\*t13 +  
10000\*P4\*X\_12\*d13\*h5\*t13 + 10000\*P5\*X\_12\*d13\*h4\*t13 +  
10000\*P6\*X\_12\*d13\*h3\*t13 + 10000\*P3\*X\_12\*d13\*h7\*t13 +  
10000\*P4\*X\_12\*d13\*h6\*t13 + 10000\*P5\*X\_12\*d13\*h5\*t13 +  
10000\*P6\*X\_12\*d13\*h4\*t13 + 10000\*P2\*X\_12\*d13\*h9\*t13 +  
10000\*P3\*X\_12\*d13\*h8\*t13 + 10000\*P4\*X\_12\*d13\*h7\*t13 +  
10000\*P5\*X\_12\*d13\*h6\*t13 + 10000\*P6\*X\_12\*d13\*h5\*t13 +  
10000\*P2\*X\_12\*d13\*h10\*t13 + 10000\*P3\*X\_12\*d13\*h9\*t13 +  
10000\*P4\*X\_12\*d13\*h8\*t13 + 10000\*P5\*X\_12\*d13\*h7\*t13 +  
10000\*P6\*X\_12\*d13\*h6\*t13 + 10000\*P2\*X\_12\*d13\*h11\*t13 +  
10000\*P3\*X\_12\*d13\*h10\*t13 + 10000\*P4\*X\_12\*d13\*h9\*t13 +  
10000\*P5\*X\_12\*d13\*h8\*t13 + 10000\*P6\*X\_12\*d13\*h7\*t13 +  
25400\*P1\*X\_12\*d13\*h13\*t13 + 10000\*P2\*X\_12\*d13\*h12\*t13 +  
10000\*P3\*X\_12\*d13\*h11\*t13 + 10000\*P4\*X\_12\*d13\*h10\*t13 +  
10000\*P5\*X\_12\*d13\*h9\*t13 + 10000\*P6\*X\_12\*d13\*h8\*t13 +  
25400\*P2\*X\_12\*d13\*h13\*t13 + 10000\*P3\*X\_12\*d13\*h12\*t13 +  
10000\*P4\*X\_12\*d13\*h11\*t13 + 10000\*P5\*X\_12\*d13\*h10\*t13 +  
10000\*P6\*X\_12\*d13\*h9\*t13 + 25400\*P3\*X\_12\*d13\*h13\*t13 +  
10000\*P4\*X\_12\*d13\*h12\*t13 + 10000\*P5\*X\_12\*d13\*h11\*t13 +  
10000\*P6\*X\_12\*d13\*h10\*t13 + 25400\*P4\*X\_12\*d13\*h13\*t13 +  
10000\*P5\*X\_12\*d13\*h12\*t13 + 20000\*P6\*X\_12\*d13\*h11\*t13 +  
25400\*P5\*X\_12\*d13\*h13\*t13 + 20000\*P6\*X\_12\*d13\*h12\*t13 +  
25400\*P6\*X\_12\*d13\*h13\*t13 + 25400\*P7\*X\_12\*d13\*h13\*t13 +  
12700\*X\_12\*h13\*t13\*x\*x13)/(127\*X\_12\*h13\*(127\*d13 + 100\*X\_12\*d13 +  
100\*t13\*x13));  
F\_31\_34=-(12700\*X\_12^2\*d13\*h13\*x - 5000\*P6\*h1\*t13^2\*x13 -  
5000\*P5\*h3\*t13^2\*x13 - 5000\*P6\*h2\*t13^2\*x13 - 5000\*P4\*h5\*t13^2\*x13 -  
5000\*P5\*h4\*t13^2\*x13 - 5000\*P6\*h3\*t13^2\*x13 - 5000\*P3\*h7\*t13^2\*x13 -  
5000\*P4\*h6\*t13^2\*x13 - 5000\*P5\*h5\*t13^2\*x13 - 5000\*P6\*h4\*t13^2\*x13 -  
5000\*P2\*h9\*t13^2\*x13 - 5000\*P3\*h8\*t13^2\*x13 - 5000\*P4\*h7\*t13^2\*x13 -  
5000\*P5\*h6\*t13^2\*x13 - 5000\*P6\*h5\*t13^2\*x13 - 5000\*P2\*h10\*t13^2\*x13 -  
5000\*P3\*h9\*t13^2\*x13 - 5000\*P4\*h8\*t13^2\*x13 - 5000\*P5\*h7\*t13^2\*x13 -  
5000\*P6\*h6\*t13^2\*x13 - 5000\*P2\*h11\*t13^2\*x13 - 5000\*P3\*h10\*t13^2\*x13 -  
5000\*P4\*h9\*t13^2\*x13 - 5000\*P5\*h8\*t13^2\*x13 - 5000\*P6\*h7\*t13^2\*x13 -  
5000\*P2\*h12\*t13^2\*x13 - 5000\*P3\*h11\*t13^2\*x13 - 5000\*P4\*h10\*t13^2\*x13 -  
5000\*P5\*h9\*t13^2\*x13 - 5000\*P6\*h8\*t13^2\*x13 - 5000\*P3\*h12\*t13^2\*x13 -  
5000\*P4\*h11\*t13^2\*x13 - 5000\*P5\*h10\*t13^2\*x13 - 5000\*P6\*h9\*t13^2\*x13 -  
5000\*P4\*h12\*t13^2\*x13 - 5000\*P5\*h11\*t13^2\*x13 - 5000\*P6\*h10\*t13^2\*x13 -  
5000\*P5\*h12\*t13^2\*x13 - 10000\*P6\*h11\*t13^2\*x13 - 10000\*P6\*h12\*t13^2\*x13  
+ 6350\*P6\*d13\*h1\*t13 + 6350\*P5\*d13\*h3\*t13 + 6350\*P6\*d13\*h2\*t13 +  
6350\*P4\*d13\*h5\*t13 + 6350\*P5\*d13\*h4\*t13 + 6350\*P6\*d13\*h3\*t13 +  
6350\*P3\*d13\*h7\*t13 + 6350\*P4\*d13\*h6\*t13 + 6350\*P5\*d13\*h5\*t13 +  
6350\*P6\*d13\*h4\*t13 + 6350\*P2\*d13\*h9\*t13 + 6350\*P3\*d13\*h8\*t13 +  
6350\*P4\*d13\*h7\*t13 + 6350\*P5\*d13\*h6\*t13 + 6350\*P6\*d13\*h5\*t13 +  
6350\*P2\*d13\*h10\*t13 + 6350\*P3\*d13\*h9\*t13 + 6350\*P4\*d13\*h8\*t13 +  
6350\*P5\*d13\*h7\*t13 + 6350\*P6\*d13\*h6\*t13 + 6350\*P2\*d13\*h11\*t13 +  
6350\*P3\*d13\*h10\*t13 + 6350\*P4\*d13\*h9\*t13 + 6350\*P5\*d13\*h8\*t13 +  
6350\*P6\*d13\*h7\*t13 + 6350\*P2\*d13\*h12\*t13 + 6350\*P3\*d13\*h11\*t13 +





$$\begin{aligned}
& 5000 * P4 * h13 * t15^2 * x15 - 5000 * P5 * h12 * t15^2 * x15 - 5000 * P6 * h11 * t15^2 * x15 - \\
& 5000 * P7 * h10 * t15^2 * x15 - 5000 * P4 * h14 * t15^2 * x15 - 5000 * P5 * h13 * t15^2 * x15 - \\
& 5000 * P6 * h12 * t15^2 * x15 - 5000 * P7 * h11 * t15^2 * x15 - 5000 * P5 * h14 * t15^2 * x15 - \\
& 5000 * P6 * h13 * t15^2 * x15 - 5000 * P7 * h12 * t15^2 * x15 - 5000 * P6 * h14 * t15^2 * x15 - \\
& 10000 * P7 * h13 * t15^2 * x15 - 10000 * P7 * h14 * t15^2 * x15 + 6350 * P7 * d15 * h1 * t15 + \\
& 6350 * P6 * d15 * h3 * t15 + 6350 * P7 * d15 * h2 * t15 + 6350 * P5 * d15 * h5 * t15 + \\
& 6350 * P6 * d15 * h4 * t15 + 6350 * P7 * d15 * h3 * t15 + 6350 * P4 * d15 * h7 * t15 + \\
& 6350 * P5 * d15 * h6 * t15 + 6350 * P6 * d15 * h5 * t15 + 6350 * P7 * d15 * h4 * t15 + \\
& 6350 * P3 * d15 * h9 * t15 + 6350 * P4 * d15 * h8 * t15 + 6350 * P5 * d15 * h7 * t15 + \\
& 6350 * P6 * d15 * h6 * t15 + 6350 * P7 * d15 * h5 * t15 + 6350 * P2 * d15 * h11 * t15 + \\
& 6350 * P3 * d15 * h10 * t15 + 6350 * P4 * d15 * h9 * t15 + 6350 * P5 * d15 * h8 * t15 + \\
& 6350 * P6 * d15 * h7 * t15 + 6350 * P7 * d15 * h6 * t15 + 6350 * P2 * d15 * h12 * t15 + \\
& 6350 * P3 * d15 * h11 * t15 + 6350 * P4 * d15 * h10 * t15 + 6350 * P5 * d15 * h9 * t15 + \\
& 6350 * P6 * d15 * h8 * t15 + 6350 * P7 * d15 * h7 * t15 + 6350 * P2 * d15 * h13 * t15 + \\
& 6350 * P3 * d15 * h12 * t15 + 6350 * P4 * d15 * h11 * t15 + 6350 * P5 * d15 * h10 * t15 + \\
& 6350 * P6 * d15 * h9 * t15 + 6350 * P7 * d15 * h8 * t15 + 6350 * P2 * d15 * h14 * t15 + \\
& 6350 * P3 * d15 * h13 * t15 + 6350 * P4 * d15 * h12 * t15 + 6350 * P5 * d15 * h11 * t15 + \\
& 6350 * P6 * d15 * h10 * t15 + 6350 * P7 * d15 * h9 * t15 + 6350 * P3 * d15 * h14 * t15 + \\
& 6350 * P4 * d15 * h13 * t15 + 6350 * P5 * d15 * h12 * t15 + 6350 * P6 * d15 * h11 * t15 + \\
& 6350 * P7 * d15 * h10 * t15 + 6350 * P4 * d15 * h14 * t15 + 6350 * P5 * d15 * h13 * t15 + \\
& 6350 * P6 * d15 * h12 * t15 + 6350 * P7 * d15 * h11 * t15 + 6350 * P5 * d15 * h14 * t15 + \\
& 6350 * P6 * d15 * h13 * t15 + 6350 * P7 * d15 * h12 * t15 + 6350 * P6 * d15 * h14 * t15 + \\
& 12700 * P7 * d15 * h13 * t15 + 12700 * P7 * d15 * h14 * t15 + 16129 * X_14 * d15 * h15 * x + \\
& 5000 * P7 * X_14 * d15 * h1 * t15 + 5000 * P6 * X_14 * d15 * h3 * t15 + \\
& 5000 * P7 * X_14 * d15 * h2 * t15 + 5000 * P5 * X_14 * d15 * h5 * t15 + \\
& 5000 * P6 * X_14 * d15 * h4 * t15 + 5000 * P7 * X_14 * d15 * h3 * t15 + \\
& 5000 * P4 * X_14 * d15 * h7 * t15 + 5000 * P5 * X_14 * d15 * h6 * t15 + \\
& 5000 * P6 * X_14 * d15 * h5 * t15 + 5000 * P7 * X_14 * d15 * h4 * t15 + \\
& 5000 * P3 * X_14 * d15 * h9 * t15 + 5000 * P4 * X_14 * d15 * h8 * t15 + \\
& 5000 * P5 * X_14 * d15 * h7 * t15 + 5000 * P6 * X_14 * d15 * h6 * t15 + \\
& 5000 * P7 * X_14 * d15 * h5 * t15 + 5000 * P2 * X_14 * d15 * h11 * t15 + \\
& 5000 * P3 * X_14 * d15 * h10 * t15 + 5000 * P4 * X_14 * d15 * h9 * t15 + \\
& 5000 * P5 * X_14 * d15 * h8 * t15 + 5000 * P6 * X_14 * d15 * h7 * t15 + \\
& 5000 * P7 * X_14 * d15 * h6 * t15 + 5000 * P2 * X_14 * d15 * h12 * t15 + \\
& 5000 * P3 * X_14 * d15 * h11 * t15 + 5000 * P4 * X_14 * d15 * h10 * t15 + \\
& 5000 * P5 * X_14 * d15 * h9 * t15 + 5000 * P6 * X_14 * d15 * h8 * t15 + \\
& 5000 * P7 * X_14 * d15 * h7 * t15 + 5000 * P2 * X_14 * d15 * h13 * t15 + \\
& 5000 * P3 * X_14 * d15 * h12 * t15 + 5000 * P4 * X_14 * d15 * h11 * t15 + \\
& 5000 * P5 * X_14 * d15 * h10 * t15 + 5000 * P6 * X_14 * d15 * h9 * t15 + \\
& 5000 * P7 * X_14 * d15 * h8 * t15 + 25400 * P1 * X_14 * d15 * h15 * t15 + \\
& 5000 * P2 * X_14 * d15 * h14 * t15 + 5000 * P3 * X_14 * d15 * h13 * t15 + \\
& 5000 * P4 * X_14 * d15 * h12 * t15 + 5000 * P5 * X_14 * d15 * h11 * t15 + \\
& 5000 * P6 * X_14 * d15 * h10 * t15 + 5000 * P7 * X_14 * d15 * h9 * t15 + \\
& 25400 * P2 * X_14 * d15 * h15 * t15 + 5000 * P3 * X_14 * d15 * h14 * t15 + \\
& 5000 * P4 * X_14 * d15 * h13 * t15 + 5000 * P5 * X_14 * d15 * h12 * t15 + \\
& 5000 * P6 * X_14 * d15 * h11 * t15 + 5000 * P7 * X_14 * d15 * h10 * t15 + \\
& 25400 * P3 * X_14 * d15 * h15 * t15 + 5000 * P4 * X_14 * d15 * h14 * t15 + \\
& 5000 * P5 * X_14 * d15 * h13 * t15 + 5000 * P6 * X_14 * d15 * h12 * t15 + \\
& 5000 * P7 * X_14 * d15 * h11 * t15 + 25400 * P4 * X_14 * d15 * h15 * t15 + \\
& 5000 * P5 * X_14 * d15 * h14 * t15 + 5000 * P6 * X_14 * d15 * h13 * t15 + \\
& 5000 * P7 * X_14 * d15 * h12 * t15 + 25400 * P5 * X_14 * d15 * h15 * t15 + \\
& 5000 * P6 * X_14 * d15 * h14 * t15 + 10000 * P7 * X_14 * d15 * h13 * t15 + \\
& 25400 * P6 * X_14 * d15 * h15 * t15 + 10000 * P7 * X_14 * d15 * h14 * t15 + \\
& 25400 * P7 * X_14 * d15 * h15 * t15 + 25400 * P8 * X_14 * d15 * h15 * t15 + \\
& 12700 * X_14 * h15 * t15 * x * x15) / (127 * X_14 * h15 * (127 * d15 + 100 * X_14 * d15 + \\
& 100 * t15 * x15));
\end{aligned}$$



10000\*P4\*X\_16\*d17\*h11\*t17 + 10000\*P5\*X\_16\*d17\*h10\*t17 +  
10000\*P6\*X\_16\*d17\*h9\*t17 + 10000\*P7\*X\_16\*d17\*h8\*t17 +  
10000\*P8\*X\_16\*d17\*h7\*t17 + 10000\*P2\*X\_16\*d17\*h14\*t17 +  
10000\*P3\*X\_16\*d17\*h13\*t17 + 10000\*P4\*X\_16\*d17\*h12\*t17 +  
10000\*P5\*X\_16\*d17\*h11\*t17 + 10000\*P6\*X\_16\*d17\*h10\*t17 +  
10000\*P7\*X\_16\*d17\*h9\*t17 + 10000\*P8\*X\_16\*d17\*h8\*t17 +  
10000\*P2\*X\_16\*d17\*h15\*t17 + 10000\*P3\*X\_16\*d17\*h14\*t17 +  
10000\*P4\*X\_16\*d17\*h13\*t17 + 10000\*P5\*X\_16\*d17\*h12\*t17 +  
10000\*P6\*X\_16\*d17\*h11\*t17 + 10000\*P7\*X\_16\*d17\*h10\*t17 +  
10000\*P8\*X\_16\*d17\*h9\*t17 + 25400\*P1\*X\_16\*d17\*h17\*t17 +  
10000\*P2\*X\_16\*d17\*h16\*t17 + 10000\*P3\*X\_16\*d17\*h15\*t17 +  
10000\*P4\*X\_16\*d17\*h14\*t17 + 10000\*P5\*X\_16\*d17\*h13\*t17 +  
10000\*P6\*X\_16\*d17\*h12\*t17 + 10000\*P7\*X\_16\*d17\*h11\*t17 +  
10000\*P8\*X\_16\*d17\*h10\*t17 + 25400\*P2\*X\_16\*d17\*h17\*t17 +  
10000\*P3\*X\_16\*d17\*h16\*t17 + 10000\*P4\*X\_16\*d17\*h15\*t17 +  
10000\*P5\*X\_16\*d17\*h14\*t17 + 10000\*P6\*X\_16\*d17\*h13\*t17 +  
10000\*P7\*X\_16\*d17\*h12\*t17 + 10000\*P8\*X\_16\*d17\*h11\*t17 +  
25400\*P3\*X\_16\*d17\*h17\*t17 + 10000\*P4\*X\_16\*d17\*h16\*t17 +  
10000\*P5\*X\_16\*d17\*h15\*t17 + 10000\*P6\*X\_16\*d17\*h14\*t17 +  
10000\*P7\*X\_16\*d17\*h13\*t17 + 10000\*P8\*X\_16\*d17\*h12\*t17 +  
25400\*P4\*X\_16\*d17\*h17\*t17 + 10000\*P5\*X\_16\*d17\*h16\*t17 +  
10000\*P6\*X\_16\*d17\*h15\*t17 + 10000\*P7\*X\_16\*d17\*h14\*t17 +  
10000\*P8\*X\_16\*d17\*h13\*t17 + 25400\*P5\*X\_16\*d17\*h17\*t17 +  
10000\*P6\*X\_16\*d17\*h16\*t17 + 10000\*P7\*X\_16\*d17\*h15\*t17 +  
10000\*P8\*X\_16\*d17\*h14\*t17 + 25400\*P6\*X\_16\*d17\*h17\*t17 +  
10000\*P7\*X\_16\*d17\*h16\*t17 + 20000\*P8\*X\_16\*d17\*h15\*t17 +  
25400\*P7\*X\_16\*d17\*h17\*t17 + 20000\*P8\*X\_16\*d17\*h16\*t17 +  
25400\*P8\*X\_16\*d17\*h17\*t17 + 25400\*P9\*X\_16\*d17\*h17\*t17 +  
12700\*X\_16\*h17\*t17\*x\*x17)/(127\*X\_16\*h17\*(127\*d17 + 100\*X\_16\*d17 +  
100\*t17\*x17));  
F\_41\_44=-(12700\*X\_16^2\*d17\*h17\*x - 5000\*P8\*h1\*t17^2\*x17 -  
5000\*P7\*h3\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h2\*t17^2\*x17 - 5000\*P6\*h5\*t17^2\*x17 -  
5000\*P7\*h4\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h3\*t17^2\*x17 - 5000\*P5\*h7\*t17^2\*x17 -  
5000\*P6\*h6\*t17^2\*x17 - 5000\*P7\*h5\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h4\*t17^2\*x17 -  
5000\*P4\*h9\*t17^2\*x17 - 5000\*P5\*h8\*t17^2\*x17 - 5000\*P6\*h7\*t17^2\*x17 -  
5000\*P7\*h6\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h5\*t17^2\*x17 - 5000\*P3\*h11\*t17^2\*x17 -  
5000\*P4\*h10\*t17^2\*x17 - 5000\*P5\*h9\*t17^2\*x17 - 5000\*P6\*h8\*t17^2\*x17 -  
5000\*P7\*h7\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h6\*t17^2\*x17 - 5000\*P2\*h13\*t17^2\*x17 -  
5000\*P3\*h12\*t17^2\*x17 - 5000\*P4\*h11\*t17^2\*x17 - 5000\*P5\*h10\*t17^2\*x17 -  
5000\*P6\*h9\*t17^2\*x17 - 5000\*P7\*h8\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h7\*t17^2\*x17 -  
5000\*P2\*h14\*t17^2\*x17 - 5000\*P3\*h13\*t17^2\*x17 - 5000\*P4\*h12\*t17^2\*x17 -  
5000\*P5\*h11\*t17^2\*x17 - 5000\*P6\*h10\*t17^2\*x17 - 5000\*P7\*h9\*t17^2\*x17 -  
5000\*P8\*h8\*t17^2\*x17 - 5000\*P2\*h15\*t17^2\*x17 - 5000\*P3\*h14\*t17^2\*x17 -  
5000\*P4\*h13\*t17^2\*x17 - 5000\*P5\*h12\*t17^2\*x17 - 5000\*P6\*h11\*t17^2\*x17 -  
5000\*P7\*h10\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h9\*t17^2\*x17 - 5000\*P2\*h16\*t17^2\*x17 -  
5000\*P3\*h15\*t17^2\*x17 - 5000\*P4\*h14\*t17^2\*x17 - 5000\*P5\*h13\*t17^2\*x17 -  
5000\*P6\*h12\*t17^2\*x17 - 5000\*P7\*h11\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h10\*t17^2\*x17 -  
5000\*P3\*h16\*t17^2\*x17 - 5000\*P4\*h15\*t17^2\*x17 - 5000\*P5\*h14\*t17^2\*x17 -  
5000\*P6\*h13\*t17^2\*x17 - 5000\*P7\*h12\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h11\*t17^2\*x17 -  
5000\*P4\*h16\*t17^2\*x17 - 5000\*P5\*h15\*t17^2\*x17 - 5000\*P6\*h14\*t17^2\*x17 -  
5000\*P7\*h13\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h12\*t17^2\*x17 - 5000\*P5\*h16\*t17^2\*x17 -  
5000\*P6\*h15\*t17^2\*x17 - 5000\*P7\*h14\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h13\*t17^2\*x17 -  
5000\*P6\*h16\*t17^2\*x17 - 5000\*P7\*h15\*t17^2\*x17 - 5000\*P8\*h14\*t17^2\*x17 -  
5000\*P7\*h16\*t17^2\*x17 - 10000\*P8\*h15\*t17^2\*x17 - 10000\*P8\*h16\*t17^2\*x17  
+ 6350\*P8\*d17\*h1\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h3\*t17 + 6350\*P8\*d17\*h2\*t17 +  
6350\*P6\*d17\*h5\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h4\*t17 + 6350\*P8\*d17\*h3\*t17 +  
6350\*P5\*d17\*h7\*t17 + 6350\*P6\*d17\*h6\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h5\*t17 +

6350\*P8\*d17\*h4\*t17 + 6350\*P4\*d17\*h9\*t17 + 6350\*P5\*d17\*h8\*t17 +  
6350\*P6\*d17\*h7\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h6\*t17 + 6350\*P8\*d17\*h5\*t17 +  
6350\*P3\*d17\*h11\*t17 + 6350\*P4\*d17\*h10\*t17 + 6350\*P5\*d17\*h9\*t17 +  
6350\*P6\*d17\*h8\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h7\*t17 + 6350\*P8\*d17\*h6\*t17 +  
6350\*P2\*d17\*h13\*t17 + 6350\*P3\*d17\*h12\*t17 + 6350\*P4\*d17\*h11\*t17 +  
6350\*P5\*d17\*h10\*t17 + 6350\*P6\*d17\*h9\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h8\*t17 +  
6350\*P8\*d17\*h7\*t17 + 6350\*P2\*d17\*h14\*t17 + 6350\*P3\*d17\*h13\*t17 +  
6350\*P4\*d17\*h12\*t17 + 6350\*P5\*d17\*h11\*t17 + 6350\*P6\*d17\*h10\*t17 +  
6350\*P7\*d17\*h9\*t17 + 6350\*P8\*d17\*h8\*t17 + 6350\*P2\*d17\*h15\*t17 +  
6350\*P3\*d17\*h14\*t17 + 6350\*P4\*d17\*h13\*t17 + 6350\*P5\*d17\*h12\*t17 +  
6350\*P6\*d17\*h11\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h10\*t17 + 6350\*P8\*d17\*h9\*t17 +  
6350\*P2\*d17\*h16\*t17 + 6350\*P3\*d17\*h15\*t17 + 6350\*P4\*d17\*h14\*t17 +  
6350\*P5\*d17\*h13\*t17 + 6350\*P6\*d17\*h12\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h11\*t17 +  
6350\*P8\*d17\*h10\*t17 + 6350\*P3\*d17\*h16\*t17 + 6350\*P4\*d17\*h15\*t17 +  
6350\*P5\*d17\*h14\*t17 + 6350\*P6\*d17\*h13\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h12\*t17 +  
6350\*P8\*d17\*h11\*t17 + 6350\*P4\*d17\*h16\*t17 + 6350\*P5\*d17\*h15\*t17 +  
6350\*P6\*d17\*h14\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h13\*t17 + 6350\*P8\*d17\*h12\*t17 +  
6350\*P5\*d17\*h16\*t17 + 6350\*P6\*d17\*h15\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h14\*t17 +  
6350\*P8\*d17\*h13\*t17 + 6350\*P6\*d17\*h16\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h15\*t17 +  
6350\*P8\*d17\*h14\*t17 + 6350\*P7\*d17\*h16\*t17 + 12700\*P8\*d17\*h15\*t17 +  
12700\*P8\*d17\*h16\*t17 + 16129\*X\_16\*d17\*h17\*x + 5000\*P8\*X\_16\*d17\*h1\*t17 +  
5000\*P7\*X\_16\*d17\*h3\*t17 + 5000\*P8\*X\_16\*d17\*h2\*t17 +  
5000\*P6\*X\_16\*d17\*h5\*t17 + 5000\*P7\*X\_16\*d17\*h4\*t17 +  
5000\*P8\*X\_16\*d17\*h3\*t17 + 5000\*P5\*X\_16\*d17\*h7\*t17 +  
5000\*P6\*X\_16\*d17\*h6\*t17 + 5000\*P7\*X\_16\*d17\*h5\*t17 +  
5000\*P8\*X\_16\*d17\*h4\*t17 + 5000\*P4\*X\_16\*d17\*h9\*t17 +  
5000\*P5\*X\_16\*d17\*h8\*t17 + 5000\*P6\*X\_16\*d17\*h7\*t17 +  
5000\*P7\*X\_16\*d17\*h6\*t17 + 5000\*P8\*X\_16\*d17\*h5\*t17 +  
5000\*P3\*X\_16\*d17\*h11\*t17 + 5000\*P4\*X\_16\*d17\*h10\*t17 +  
5000\*P5\*X\_16\*d17\*h9\*t17 + 5000\*P6\*X\_16\*d17\*h8\*t17 +  
5000\*P7\*X\_16\*d17\*h7\*t17 + 5000\*P8\*X\_16\*d17\*h6\*t17 +  
5000\*P2\*X\_16\*d17\*h13\*t17 + 5000\*P3\*X\_16\*d17\*h12\*t17 +  
5000\*P4\*X\_16\*d17\*h11\*t17 + 5000\*P5\*X\_16\*d17\*h10\*t17 +  
5000\*P6\*X\_16\*d17\*h9\*t17 + 5000\*P7\*X\_16\*d17\*h8\*t17 +  
5000\*P8\*X\_16\*d17\*h7\*t17 + 5000\*P2\*X\_16\*d17\*h14\*t17 +  
5000\*P3\*X\_16\*d17\*h13\*t17 + 5000\*P4\*X\_16\*d17\*h12\*t17 +  
5000\*P5\*X\_16\*d17\*h11\*t17 + 5000\*P6\*X\_16\*d17\*h10\*t17 +  
5000\*P7\*X\_16\*d17\*h9\*t17 + 5000\*P8\*X\_16\*d17\*h8\*t17 +  
5000\*P2\*X\_16\*d17\*h15\*t17 + 5000\*P3\*X\_16\*d17\*h14\*t17 +  
5000\*P4\*X\_16\*d17\*h13\*t17 + 5000\*P5\*X\_16\*d17\*h12\*t17 +  
5000\*P6\*X\_16\*d17\*h11\*t17 + 5000\*P7\*X\_16\*d17\*h10\*t17 +  
5000\*P8\*X\_16\*d17\*h9\*t17 + 25400\*P1\*X\_16\*d17\*h17\*t17 +  
5000\*P2\*X\_16\*d17\*h16\*t17 + 5000\*P3\*X\_16\*d17\*h15\*t17 +  
5000\*P4\*X\_16\*d17\*h14\*t17 + 5000\*P5\*X\_16\*d17\*h13\*t17 +  
5000\*P6\*X\_16\*d17\*h12\*t17 + 5000\*P7\*X\_16\*d17\*h11\*t17 +  
5000\*P8\*X\_16\*d17\*h10\*t17 + 25400\*P2\*X\_16\*d17\*h17\*t17 +  
5000\*P3\*X\_16\*d17\*h16\*t17 + 5000\*P4\*X\_16\*d17\*h15\*t17 +  
5000\*P5\*X\_16\*d17\*h14\*t17 + 5000\*P6\*X\_16\*d17\*h13\*t17 +  
5000\*P7\*X\_16\*d17\*h12\*t17 + 5000\*P8\*X\_16\*d17\*h11\*t17 +  
25400\*P3\*X\_16\*d17\*h17\*t17 + 5000\*P4\*X\_16\*d17\*h16\*t17 +  
5000\*P5\*X\_16\*d17\*h15\*t17 + 5000\*P6\*X\_16\*d17\*h14\*t17 +  
5000\*P7\*X\_16\*d17\*h13\*t17 + 5000\*P8\*X\_16\*d17\*h12\*t17 +  
25400\*P4\*X\_16\*d17\*h17\*t17 + 5000\*P5\*X\_16\*d17\*h16\*t17 +  
5000\*P6\*X\_16\*d17\*h15\*t17 + 5000\*P7\*X\_16\*d17\*h14\*t17 +  
5000\*P8\*X\_16\*d17\*h13\*t17 + 25400\*P5\*X\_16\*d17\*h17\*t17 +  
5000\*P6\*X\_16\*d17\*h16\*t17 + 5000\*P7\*X\_16\*d17\*h15\*t17 +  
5000\*P8\*X\_16\*d17\*h14\*t17 + 25400\*P6\*X\_16\*d17\*h17\*t17 +

```

5000*P7*X_16*d17*h16*t17 + 10000*P8*X_16*d17*h15*t17 +
25400*P7*X_16*d17*h17*t17 + 10000*P8*X_16*d17*h16*t17 +
25400*P8*X_16*d17*h17*t17 + 25400*P9*X_16*d17*h17*t17 +
12700*X_16*h17*t17*x*x17)/(127*X_16*h17*(127*d17 + 100*X_16*d17 +
100*t17*x17));
F_42_44=-(50*P8*h1*t17 + 50*P7*h3*t17 + 50*P8*h2*t17 + 50*P6*h5*t17 +
50*P7*h4*t17 + 50*P8*h3*t17 + 50*P5*h7*t17 + 50*P6*h6*t17 +
50*P7*h5*t17 + 50*P8*h4*t17 + 50*P4*h9*t17 + 50*P5*h8*t17 +
50*P6*h7*t17 + 50*P7*h6*t17 + 50*P8*h5*t17 + 50*P3*h11*t17 +
50*P4*h10*t17 + 50*P5*h9*t17 + 50*P6*h8*t17 + 50*P7*h7*t17 +
50*P8*h6*t17 + 50*P2*h13*t17 + 50*P3*h12*t17 + 50*P4*h11*t17 +
50*P5*h10*t17 + 50*P6*h9*t17 + 50*P7*h8*t17 + 50*P8*h7*t17 +
50*P2*h14*t17 + 50*P3*h13*t17 + 50*P4*h12*t17 + 50*P5*h11*t17 +
50*P6*h10*t17 + 50*P7*h9*t17 + 50*P8*h8*t17 + 50*P2*h15*t17 +
50*P3*h14*t17 + 50*P4*h13*t17 + 50*P5*h12*t17 + 50*P6*h11*t17 +
50*P7*h10*t17 + 50*P8*h9*t17 + 50*P2*h16*t17 + 50*P3*h15*t17 +
50*P4*h14*t17 + 50*P5*h13*t17 + 50*P6*h12*t17 + 50*P7*h11*t17 +
50*P8*h10*t17 + 50*P3*h16*t17 + 50*P4*h15*t17 + 50*P5*h14*t17 +
50*P6*h13*t17 + 50*P7*h12*t17 + 50*P8*h11*t17 + 50*P4*h16*t17 +
50*P5*h15*t17 + 50*P6*h14*t17 + 50*P7*h13*t17 + 50*P8*h12*t17 +
50*P5*h16*t17 + 50*P6*h15*t17 + 50*P7*h14*t17 + 50*P8*h13*t17 +
50*P6*h16*t17 + 50*P7*h15*t17 + 50*P8*h14*t17 + 50*P7*h16*t17 +
100*P8*h15*t17 + 100*P8*h16*t17 + 127*X_16*h17*x)/(127*X_16*h17);
F_42_45=x;
F_43_44=0;
F_45_44=0;
F_43_46=F_41_43;
F_44_46=F_41_44;
F_44_47=F_42_44;
F_45_47=F_42_45;

```

```

y = max ([F_1_3, F_1_4, F_2_4, F_2_5, F_3_4, F_5_4, F_3_6, F_4_6,
F_4_7, F_5_7, F_6_8, F_6_9, F_7_9, F_7_10, F_8_9, F_10_9, F_8_11,
F_9_11, F_9_12, F_10_12, F_11_13, F_11_14, F_12_14, F_12_15, F_13_14,
F_15_14, F_13_16, F_14_16, F_14_17, F_15_17, F_16_18, F_16_19, F_17_19,
F_17_20, F_18_19, F_20_19, F_18_21, F_19_21, F_19_22, F_20_22, F_21_23,
F_21_24, F_22_24, F_22_25, F_23_24, F_25_24, F_23_26, F_24_26, F_24_27,
F_25_27, F_26_28, F_26_29, F_27_29, F_27_30, F_28_29, F_30_29, F_28_31,
F_29_31, F_29_32, F_30_32, F_31_33, F_31_34, F_32_34, F_32_35, F_33_34,
F_35_34, F_33_36, F_34_36, F_34_37, F_35_37, F_36_38, F_36_39, F_37_39,
F_37_40, F_38_39, F_40_39, F_38_41, F_39_41, F_39_42, F_40_42, F_41_43,
F_41_44, F_42_44, F_42_45, F_43_44, F_45_44, F_43_46, F_44_46, F_44_47,
F_45_47]);

```



**Anexo 3 Área, longitud y tipo de perfil a utilizar en cada una de las barras de la torre.**

Barra	Perfil a utilizar	Areal (cm <sup>2</sup> )	Longitud de cada elemento (m)	Masa	Masa total
F_1_3	T2.75	1,7	1,86	2,49	3,73
F_1_4	L 50 x 50 x 4	3,89	2,25	6,88	20,64
F_2_4	L 50 x 50 x 4	3,89	2,25	6,88	20,64
F_2_5	T2.75	1,7	1,86	2,49	3,73
F_3_4	L 40 x 40 x 5	3,79	1,36	4,04	12,13
F_5_4	L 40 x 40 x 5	3,79	1,36	4,04	12,13
F_3_6	T2.75	1,7	2,21	2,95	4,42
F_4_6	L 50 x 50 x 4	3,89	2,59	7,91	23,73
F_4_7	L 50 x 50 x 4	3,89	2,59	7,91	23,73
F_5_7	T2.75	1,7	2,21	2,95	4,42
F_6_8	T2.75	1,7	1,47	1,96	2,93
F_6_9	L 50 x 50 x 4	3,89	2,92	8,92	26,77
F_7_9	L 50 x 50 x 4	3,89	2,92	8,92	26,77
F_7_10	T2.75	1,7	1,47	1,96	2,93
F_8_9	L 40 x 40 x 5	3,79	1,59	4,72	14,16
F_10_9	L 40 x 40 x 5	3,79	1,59	4,72	14,16
F_8_11	T2.75	1,7	1,12	1,49	2,24
F_9_11	L 50 x 50 x 4	3,89	1,94	5,92	17,77
F_9_12	L 50 x 50 x 4	3,89	1,94	5,92	17,77
F_10_12	T2.75	1,7	1,12	1,49	2,24
F_11_13	T2.75	1,7	1,17	1,55	2,33
F_11_14	L 50 x 50 x 4	3,89	2,01	6,14	18,43
F_12_14	L 50 x 50 x 4	3,89	2,01	6,14	18,43
F_12_15	T2.75	1,7	1,17	1,55	2,33
F_13_14	L 40 x 40 x 5	3,79	1,70	5,05	15,14
F_15_14	L 40 x 40 x 5	3,79	1,70	5,05	15,14
F_13_16	T2.75	1,7	2,94	3,93	5,89
F_14_16	L 50 x 50 x 4	3,89	3,39	10,36	31,09
F_14_17	L 50 x 50 x 4	3,89	3,39	10,36	31,09
F_15_17	T2.75	1,7	2,94	3,93	5,89
F_16_18	T2.75	1,7	1,52	2,04	3,05
F_16_19	L 50 x 50 x 4	3,89	2,39	7,29	21,87
F_17_19	L 50 x 50 x 4	3,89	2,39	7,29	21,87
F_17_20	T2.75	1,7	1,52	2,04	3,05
F_18_19	L 40 x 40 x 5	3,79	1,91	5,69	17,06

F_20_19	L 40 x 40 x 5	3,79	1,91	5,69	17,06
F_18_21	T3	2,23	1,61	2,82	4,23
F_19_21	L 50 x 50 x 5	4,8	2,50	9,41	28,23
F_19_22	L 50 x 50 x 5	4,8	2,50	9,41	28,23
F_20_22	T3	2,23	1,61	2,82	4,23
F_21_23	T3	2,23	1,99	3,48	5,22
F_21_24	L 50 x 50 x 5	4,8	2,29	8,63	25,89
F_22_24	L 50 x 50 x 5	4,8	2,29	8,63	25,89
F_22_25	T3	2,23	1,99	3,48	5,22
F_23_24	L 40 x 40 x 5	3,79	2,04	6,08	18,23
F_25_24	L 40 x 40 x 5	3,79	2,04	6,08	18,23
F_23_26	T3	2,23	1,37	2,39	3,58
F_24_26	L 50 x 50 x 5	4,8	2,46	9,25	27,76
F_24_27	L 50 x 50 x 5	4,8	2,46	9,25	27,76
F_25_27	T3	2,23	1,37	2,39	3,58
F_26_28	T3	2,23	2,11	3,69	5,54
F_26_29	L 50 x 50 x 5	4,8	2,78	10,48	31,43
F_27_29	L 50 x 50 x 5	4,8	2,78	10,48	31,43
F_27_30	T3	2,23	2,11	3,69	5,54
F_28_29	L 40 x 40 x 5	3,79	2,20	6,53	19,59
F_30_29	L 40 x 40 x 5	3,79	2,20	6,53	19,59
F_28_31	T6	5,58	1,37	6,01	9,02
F_29_31	L 70 x 70 x 6	8,13	2,59	16,52	49,55
F_29_32	L 70 x 70 x 6	8,13	2,59	16,52	49,55
F_30_32	T6	5,58	1,37	6,01	9,02
F_31_33	T6	5,58	2,26	9,90	14,86
F_31_34	L 70 x 70 x 6	8,13	2,56	16,36	49,09
F_32_34	L 70 x 70 x 6	8,13	2,56	16,36	49,09
F_32_35	T6	5,58	2,26	9,90	14,86
F_33_34	L 40 x 40 x 5	3,79	2,32	6,90	20,70
F_35_34	L 40 x 40 x 5	3,79	2,32	6,90	20,70
F_33_36	T6	5,58	1,22	5,35	8,02
F_34_36	L 70 x 70 x 6	8,13	2,62	16,72	50,17
F_34_37	L 70 x 70 x 6	8,13	2,62	16,72	50,17
F_35_37	T6	5,58	1,22	5,35	8,02
F_36_38	T6	5,58	1,88	8,24	12,37
F_36_39	L 70 x 70 x 6	8,13	3,03	19,35	58,04
F_37_39	L 70 x 70 x 6	8,13	3,03	19,35	58,04
F_37_40	T6	5,58	1,88	8,24	12,37
F_38_39	L 40 x 40 x 5	3,79	2,47	7,34	22,03
F_40_39	L 40 x 40 x 5	3,79	2,47	7,34	22,03

F_38_41	T6	5,58	3,13	13,71	20,56
F_39_41	L 70 x 70 x 6	8,13	3,98	25,42	76,25
F_39_42	L 70 x 70 x 6	8,13	3,98	25,42	76,25
F_40_42	T6	5,58	3,13	13,71	20,56
F_41_43	T6	5,58	2,62	11,47	17,20
F_41_44	L 70 x 70 x 6	8,13	4,74	30,24	90,71
F_42_44	L 70 x 70 x 6	8,13	4,74	30,24	90,71
F_42_45	T6	5,58	2,62	11,47	17,20
F_43_44	L 40 x 40 x 5	3,79	2,81	8,35	25,06
F_45_44	L 40 x 40 x 5	3,79	2,81	8,35	25,06
F_43_46	T6	5,58	4,00	17,51	26,26
F_44_46	L 70 x 70 x 6	8,13	4,88	31,15	93,45
F_44_47	L 70 x 70 x 6	8,13	4,88	31,15	93,45
F_45_47	T6	5,58	4,00	17,51	26,26
				805,22	2778,08

\*Se tiene en cuenta para esta suma total el área de los tranques y diagonales secundarias.