

**UNIVERSIDAD DE MATANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS TÉCNICAS
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA**



**PROPUESTA DE UN PERFIL ÓPTIMO DE ALETAS PARA LA
INTENSIFICACION DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN
AEROCONDENSADORES**

Trabajo de diploma presentado en opción al título de Ingeniero Mecánico.

DELVYS MONTES DE OCA OJEDA

Matanzas, 2020

**UNIVERSIDAD DE MATANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS TÉCNICAS
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA**



PROPUESTA DE UN PERFIL ÓPTIMO DE ALETAS PARA LA
INTENSIFICACION DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN
AEROCONDENSADORES

Trabajo de diploma presentado en opción al título de Ingeniero Mecánico.

Autor: DELVYS MONTES DE OCA OJEDA

Tutores: Dr.C. Yanán Camaraza Medina
Dr.C. Oscar Miguel Cruz Fonticiella

Matanzas, 2020

“No intente convertirse en un hombre de éxito, sino más bien intente convertirse en un hombre de principios.”

Albert Einstein

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTOS

Hoja de Firmas

Este trabajo de diploma ha sido revisado y aprobado por las instancias correspondientes y para que así conste se firma la presente.

Tutor:

Nombre: _____

Firma: _____

Fecha: _____

Organismo: _____

Oponente:

Nombre: _____

Firma: _____

Fecha: _____

Organismo: _____

Presidente.:

Nombre: _____

Firma: _____

Fecha: _____

Organismo: _____

Vocal.:

Nombre: _____

Firma: _____

Fecha: _____

Organismo: _____

Vocal:

Nombre: _____

Firma: _____

Fecha: _____

Organismo: _____

Declaración jurada

Declaro que soy el único autor de este trabajo de diploma y autorizo a la Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos” para que haga de este trabajo de diploma el uso que estime pertinente.

Firma: _____

Delvys Montes de Oca Ojeda

RESUMEN

Debido a sus innumerables aplicaciones industriales tales como los radiadores automotrices, el aire acondicionado, la refrigeración de componentes electrónicos, entre otras, y a variables críticas para su diseño, tales como las limitaciones de peso o del espacio disponible para la destinación de las aletas, es de sumo interés, obtener expresiones analíticas y/o gráficas de eficiencia y dimensiones óptimas, para lograr en el menor espacio o con el menor peso, la máxima disipación de calor. En esta investigación se ha analizado la transferencia de calor en aletas planas (aquella en la cual su longitud medida en la dirección normal al plano de la hoja, es pequeña comparada con su altura y espesor) mediante el uso de modelos unidimensionales. Tal análisis ha sido efectuado para cuatro geometrías seleccionadas. El aporte de este trabajo a la generación de nuevo conocimiento es la obtención de expresiones analíticas para la distribución de temperatura, el flujo de calor y la eficiencia de la aleta. Además, se han explorado algunos comportamientos óptimos en las superficies extendidas analizadas. La metodología utilizada en el análisis consistió en la solución de la ecuación diferencial general para las aletas planas para la función perfil correspondiente a cada geometría para las condiciones de frontera establecidas, obteniendo de esta forma la distribución de temperaturas, el calor disipado y su eficiencia. Para el proceso de optimización, la altura y el espesor de la aleta óptimas son aquellas para las cuales se disipa la máxima cantidad de calor. El hallazgo principal en el análisis efectuado está relacionado con la eficiencia de las distintas geometrías, que, para este análisis, difieren de los reportados en la literatura bajo el enfoque clásico, mostrando que los resultados aceptados por la comunidad especializada en el tema no pueden emplearse indistintamente a todas las aplicaciones de las aletas a nivel práctico.

Palabras clave: Aleta plana, eficiencia, transferencia de calor, optimización, número de Biot.

ABSTRACT

Due to its numerous industrial applications such as automotive radiators, air conditioning, refrigeration of electronics components, among others, and critical design variables such as weight limitations or space available for the destination of the fins, it is of great interest to obtain analytical expressions and/or graphic efficiency, optimal size, to achieve in the shortest space or the least weight, the maximum heat dissipation. In this research project the heat transfer in flat plate fins (that fin in which the length measured in the normal direction to the plane of the sheet is smaller compared with its height and thickness) using one-dimensional models, has been analyzed. Such analysis has been carried out for 4 selected geometries. The project's contribution to the creation of new knowledge is to obtain analytical expressions for the temperature distribution, the heat flow and the efficiency of the fin. Thus, certain optimum behaviors in the analyzed extended surface geometries were determined. The methodology for meeting the objectives proposed in the analysis consisted of solving the general differential equation for flat plate fins for the profile function corresponding for each geometry for the established boundary conditions, thus obtaining the distribution of temperatures, the dissipated heat and its efficiency. For the optimization process, the optimum fin height and fin thickness are those for which the maximum quantity of heat is dissipate. The main result in the analysis carried out is related to the efficiency of the different geometries, which, for this analysis, differ from the reports in the literature under the classical approach, showing in this way, the results accepted by the specialized community in the subject, cannot be used interchangeably with all fin applications at the practical level.

Keywords: Flat plate fin, efficiency, heat transfer, optimization, Biot number

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1 MARCO DE REFERENCIA PARA EL ANÁLISIS TÉRMICO DE LAS SUPERFICIES EXTENDIDAS	5
1.1 Evolución histórica del desarrollo de métodos para el análisis térmico para aletas	5
1.2 Antecedentes al desarrollo de un perfil óptimo de aletas	10
1.2.1 Discusión breve de los principales resultados	11
1.3 Ecuación diferencial generalizada en el análisis de una aleta recta	12
1.3.1 Terminología y sistema coordenado empleado	12
1.3.2 Ecuación diferencial generalizada de Garder	13
1.4 Aleta plana de perfil rectangular	15
1.5 Aleta plana de perfil triangular	16
1.6 Aleta plana de perfil parabólico cóncavo	18
1.7 Aleta plana de perfil parabólico convexo	19
1.8 Aleta de plana de perfil rectangular	22
1.9 Aleta plana de perfil parabólico cóncavo	24
1.10 Aleta plana de perfil parabólico convexo	25
CAPÍTULO 2 METODOLOGÍA DE CÁLCULO PARA LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN SUPERFICIES EXTENDIDAS	27
2.1 Introducción	27
2.2 Superficies extendidas de sección transversal constante	27
2.2.1 Aletas muy largas	31
2.2.2 Aleta con su extremo libre térmicamente aislado	32
2.2.3 Aleta con convección desde su extremo libre	33
2.2.4 Aleta entre dos paredes a temperaturas distintas T_B y T_L	36
2.3 Campo de aplicación de las aletas rectas de perfil uniforme	38
2.4 Perfil óptimo para una superficie extendida rectas y de perfil uniforme	40
CAPÍTULO 3 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	44
3.1 Introducción	44
3.2 Hipótesis de cálculo	44

3.3	Propiedades de los tubos	44
3.4	Propiedades de los fluidos de trabajo	46
3.4.1	Propiedades del vapor de agua	46
3.4.2	Propiedades del aire de entrada al aerocondensador	47
3.5	Cálculos y resultados	51
3.5.1	Cálculo de la potencia térmica a disipar	51
3.5.2	Cálculo del área de transferencia de calor	51
3.5.3	Cálculo del coeficiente de transferencia de calor en el interior de los tubos	52
3.5.4	Cálculo del coeficiente de transferencia de calor exterior	54
3.5.5	Cálculo del rendimiento de las aletas	56
3.5.6	Factores de ensuciamiento	57
3.5.7	Cálculo del coeficiente global de transferencia de calor	57
3.5.8	Iteraciones	58
3.6	Análisis operativo del diseño.	60
3.6.1	Condiciones operativas del invierno	60
3.6.2	Condiciones operativas de verano	62
	CONCLUSIONES	66
	RECOMENDACIONES	67

INTRODUCCIÓN

El uso de las superficies extendidas como mecanismo que permite aumentar la transferencia de calor entre un fluido y una superficie sólida es una técnica bien conocida y ampliamente usada en la transferencia de calor para aplicaciones tan diversas como los radiadores automotrices, el aire acondicionado, la refrigeración de componentes electrónicos, los intercambiadores de calor, entre otras. Actualmente cualquier texto o curso de transferencia de calor incluye una sección representativa en donde se aborda la teoría elemental de aletas y se dan algunas indicaciones para la selección y uso de estas [1-2].

Debido a sus innumerables aplicaciones industriales y a variables críticas para su diseño, tales como las limitaciones de peso o del espacio disponible para la destinación de las aletas, es de sumo interés, obtener expresiones analíticas y/o gráficas de eficiencia, dimensiones óptimas, e incluso, la disposición óptima de las aletas dentro del arreglo, para lograr en el menor espacio o con el menor peso, la máxima disipación de calor. Estos resultados pueden ser de gran importancia y aplicación en el campo del diseño térmico de equipos y sistemas en donde el uso de aletas planas ha tomado gran importancia en los últimos años.

Para este propósito, muchos investigadores han adoptado para estudio óptimo de las aletas diferentes suposiciones atribuidas a Murray, en 1938 y Gardner, en 1945, y citadas por [4-5]. En este estudio se suponen que el flujo es estacionario y que además el flujo de calor y la distribución de la temperatura a través de la aleta son independientes del tiempo, además se supone que el flujo de calor hacia o desde la superficie de la aleta en cualquier punto, es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre la superficie en ese punto y el fluido circundante, El coeficiente convectivo de transferencia de calor es el mismo sobre toda la superficie de la aleta.

En el campo investigativo, se ha convertido en una costumbre puesto que la casi totalidad de literatura disponible incluye en su material los primeros resultados obtenidos por Gardner, en 1945, sobre el comportamiento de aletas unidimensionales, de tal manera que las mismas gráficas se repiten casi sin variación tratamiento tras

tratamiento. Al respecto, es conveniente hacer una lectura de la crítica efectuada por Razelos [3] acerca de la necesidad de reexaminar el tratamiento clásico de la transferencia de calor en superficies extendidas que aparece en los textos relacionados con la materia.

Numerosos estudios se han realizado desde hace más de ocho décadas, algunos de los cuales han sido citados por [5] buscando el perfil óptimo de una aleta longitudinal, uno de cuyos primeros trabajos fue realizado en 1926 por Schmidt. Otros Investigadores han profundizado en el estudio de aletas en sistemas de enfriamiento contando entre ellos con: Murray-Gardner, Bobaru, Nguyen, Osorio, Camaraza-Medina, entre otros, enfocando sus investigaciones con empleo de nuevos cálculos en optimizar los sistemas de enfriamiento para un uso más eficiente teniendo en cuenta las nuevas condiciones a las que estos son sometidos con los nuevos avances científicos.

En la actualidad, la necesidad de optimizar los sistemas de enfriamiento en los ACC, está determinado por factores que complejizan los métodos tradicionales que hasta hoy se venían empleando; La disminución de disponibilidad de los recursos hídricos. En China por ejemplo, ya no es necesario ubicar un sitio de planta cerca de una fuente de agua si se selecciona ACC. Las autoridades de este país, están muy preocupadas por seguir haciendo hincapié en sus suministros de agua y han adoptado el enfriamiento en seco para muchas de sus nuevas plantas de energía. De hecho, China ha instalado condensadores enfriados por aire en más de 75 000 MW de su floreciente flota de nuevas plantas y ha dominado el mercado en instalaciones durante los últimos años. Este país ha comprado un promedio de un nuevo ACC por mes para las nuevas centrales eléctricas de carbón, con capacidades típicas de 2 x 300 MW o 2 x 600 MW.

La disminución de disponibilidad de los recursos hídricos no es una cuestión ajena para Cuba, por tanto, es necesario y urge realizar un uso racional y adecuado de los mismos. Estudios recientes llevados a cabo por el Instituto Nacional de Recursos Hidráulicos (INRH) confirman que desde el 2009 al 2016 el déficit de agua ha crecido en un 27,2 %, teniéndose que la carencia del vital líquido ascendía al cierre del 2016 a 1 420 Mm³. (TVC, 2017) Para lograr una disminución del consumo de los recursos hídricos es de vital importancia tener en cuenta los sistemas de enfriamiento que actualmente se están empleando.

Una alternativa tecnológica a tener en cuenta para afrontar la situación expuesta anteriormente, lo constituye la instalación de aerocondensadores (ACC por sus siglas en

idioma inglés) como sistemas de enfriamiento en las plantas de energías eléctricas instaladas en Cuba. Estos tienen el potencial de disminuir el uso del agua de la planta de energía en casi un 95% pues emplean aire ambiente como agente refrigerante. El aire permite bajos coeficientes medios de transferencia de calor, por lo que en instalaciones ACC se acude al uso de aletas para elevar la transferencia de calor.

Entre los diferentes tipos de aletas conocidas, son las aletas rectas uniformes las que se emplean en los ACC. Sin embargo, una limitante que enfrenta en la actualidad este tipo de instalación en la actualidad es el elevado costo, debido a la alta presencia de aletas en su superficie de transferencia de calor.

Por lo tanto, se requiere un perfil de aletas óptimo para las principales geometrías establecidas, que permita un máximo de transferencia de calor y que en consecuencia, use el mínimo de material, abaratando el proceso de manufactura. Los perfiles de aletas existentes en la actualidad no son capaces de optimizar el proceso de transferencia de calor y de minimizar los costos de fabricación o de manufactura.

Los elementos planteados anteriormente indican que el presente trabajo enfrenta el siguiente **problema científico**:

Las aletas empleadas en la actualidad en el ACC requieren ser perfeccionadas para lograr un perfil óptimo que maximice el proceso de transferencia de calor y reduzca el consumo de material en su diseño.

Mientras el **objetivo general** del presente trabajo consiste en *determinar el perfil óptimo de una aleta recta unidimensional que permita la intensificación de la transferencia de calor en los aerocondensadores con costo mínimo de fabricación.*

Este objetivo general se desglosa en los siguientes **objetivos específicos**:

- Realizar una revisión bibliográfica acerca del perfil óptimo de una aleta recta unidimensional para la intensificación de la transferencia de calor en los ACC.
- Confeccionar el diseño conceptual acerca de cálculo del perfil óptimo de una aleta recta.
- Obtener los parámetros principales para la obtención del perfil óptimo de una aleta recta unidimensional.
- Efectuar un estudio comparativo del coeficiente global de transferencia de calor mostrado por un ACC que opere con sistemas de aletas convencionales y con las propuestas en el presente trabajo.

Para la realización del presente trabajo se formuló la siguiente **hipótesis de investigación**: *La obtención del valor óptimo del número adimensional de Biot, permite el desarrollo de una aleta de sección uniforme que garantice un máximo en la transferencia de calor para valores mínimos permisibles de espesor, altura y área de transferencia de calor.*

CAPÍTULO 1. MARCO DE REFERENCIA PARA EL ANÁLISIS TÉRMICO DE LAS SUPERFICIES EXTENDIDAS.

1.1 Evolución histórica del desarrollo de métodos para el análisis térmico para aletas.

Desde hace varias décadas, se ha intentado proveer un análisis matemático de la interacción entre convección y conducción en y sobre una superficie extendida. Harper y Brown [6] determinaron soluciones analíticas para el modelo bidimensional para aletas longitudinales rectangulares y trapezoidales y la aleta circunferencial de espesor uniforme. Otras soluciones analíticas para problemas de optimización de aletas de enfriamiento longitudinales bidimensionales fueron obtenidas por [7], eliminando las suposiciones clásicas de temperatura del fluido circundante constante y flujo de calor proporcional a la diferencia de temperatura entre el medio y la aleta.

Gardner en 1945, derivó ecuaciones generales para el perfil de la diferencia de temperatura y eficiencia de la aleta para cualquier forma de superficie extendida para la cual las suposiciones de Murray-Gardner son aplicables y cuyos espesores varían como alguna potencia de la distancia medida a lo largo del eje normal a la base o superficie base (la altura de la aleta). Numerosos estudios se han realizado desde hace más de ocho décadas, algunos de los cuales han sido citados por [5] buscando el perfil óptimo de una aleta longitudinal, uno de cuyos primeros trabajos fue realizado en 1926 por el ingeniero eléctrico Schmidt, quien concluyó que este debería ser parabólico cóncavo.

Posteriormente Weining corrigiendo el razonamiento de Schmidt, afirmó que el perfil debía ser circular. Maday, en 1974, obtuvo la longitud de aleta unitaria universal, lo cual reabrió la pregunta de si la aleta de Schmidt es realmente la aleta óptima. Estudios numéricos realizados por Maday en dicho año, indicaron que el perfil óptimo era ondulado. Snider [8], a través de un riguroso razonamiento matemático, concluyó que dicho perfil se asemeja más a una onda.

En los últimos años, muchos otros trabajos se han elaborado empleando análisis teórico-numéricos, técnicas de aproximación tales como el método del ánulo y del sector y técnicas semi-analíticas utilizadas por [9-10]; otros han considerado la dependencia con la

temperatura del coeficiente convectivo de transferencia de calor [11-12], y además, el análisis efectuado por [13] desde el punto de vista de la minimización de la generación de la entropía y la utilización de los algoritmos genéticos para la solución del problema de optimización asociado. Fabbri [14], utilizó un algoritmo genético para optimización del perfil de la aleta, aplicándolo al caso de aletas de perfil polinomial, determinando los valores de los parámetros polinomiales que optimizan la efectividad de la aleta.

Taufiq *et al.* [15] también abordaron el problema de la geometría óptima para un arreglo de aletas para convección forzada, por medio de un análisis analítico de segunda ley que implica la realización de un balance entre la generación de entropía consecuencia de la transferencia de calor y la generación de entropía debido a la fricción en el fluido.

Otros autores [16-18] han analizado el desempeño y la optimización de aletas longitudinales y tipo pin con transferencia de calor y de masa simultánea. Razelos *et al.* [19] analizaron y optimizaron aletas tipo pin de perfil trapezoidal convectivas con generación interna de calor, y Das & Razelos [20] se ocuparon de las carentes de generación interna de calor.

Yeh [21], considerando un coeficiente de transferencia de calor dependiente de la temperatura, presentó métodos de diseño de un arreglo óptimo de aletas rectangulares longitudinales. El sistema es optimizado maximizando la disipación de calor del arreglo de aletas en un volumen total fijo de la aleta. Mokheimer [22], mostró en su estudio de la transferencia de calor en aletas anulares sujetas a coeficiente de transferencia de calor variable localmente, que la suposición de dicho coeficiente constante a lo largo de la aleta conduce a una subestimación significativa de la eficiencia de la aleta, incrementándose dicha desviación con el parámetro adimensional definido en su análisis y la relación de radios de la aleta.

Yeh [23] también obtuvo analíticamente las dimensiones óptimas de aletas rectangulares y tipo pin, considerando coeficientes de transferencia de calor dependientes de la temperatura y transferencia de calor desde la punta de la aleta. Su análisis concluyó que siempre existe una relación de aspecto óptima para una aleta de punta aislada. Zubair *et al.* [24] obtuvieron las dimensiones óptimas de aletas circulares, asumiendo conducción unidimensional, con perfil variable y conductividad térmica dependiente de la temperatura.

Yu [25] estudiaron la optimización de aletas circulares de perfil rectangular con coeficientes de transferencia de calor y conductividad térmica variables. Bobaru [26] presentaron una aproximación numérica para determinar la dependencia de los perfiles de aletas óptimos con los parámetros de conductividad. Kader *et al.* [27] obtuvieron la solución general exacta de la ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden que gobierna la transferencia de calor en una aleta rectangular con conductividad térmica variable.

Aznan *et al.* [28] analizaron numéricamente la transferencia de calor no lineal unidimensional en aletas rectangulares rectas con conductividad térmica en función de la temperatura. Mosayebidorcheh *et al.* [29] investigaron, a través de una técnica analítica basada en el método de los mínimos cuadrados, el desempeño y el diseño óptimo de aletas rectas con convección y radiación con generación de calor interna para cuatro tipos de geometrías, para obtener la máxima velocidad de transferencia de calor para un volumen de la aleta constante.

Nguyen [30] utilizaron un método modificado de Newton-Raphson para analizar los problemas de diseño de aletas longitudinales no lineales para obtener el volumen mínimo de la aleta óptima. El método propuesto es eficiente y exacto para encontrar el volumen mínimo de la aleta óptima para un flujo de calor y una temperatura dados en la base.

Osorio *et al.* [31] estudiaron la optimización de forma de aletas planas con geometrías definidas por funciones lineales por tramos. Pasha *et al.* [32] estudiaron la transferencia de calor de aletas de diferente perfil en condiciones no estacionarias a través del método de transformación diferencial. Sobamowo [33] estudió la transferencia de calor en una aleta longitudinal rectangular con conductividad térmica dependiente de la temperatura y generación interna de calor a través del método de diferencias finitas. Los resultados obtenidos muestran que la distribución de temperatura, la transferencia de calor total y la eficiencia de la aleta, están fuertemente afectadas por los parámetros termo-geométricos de la aleta.

En las últimas décadas, como consecuencia del desarrollo de la tecnología nano y micro, el enfriamiento de los dispositivos electrónicos es un aspecto que ha recibido considerable atención en la comunidad científica, como puede verificarse en el trabajo efectuado por [34] en el cual se presenta un resumen de las investigaciones realizadas en el campo de la

optimización del diseño térmico de los disipadores de calor. Ambreen *et al.* [35] estudiaron la transferencia de calor en función de la forma de la aleta tipo pin en disipadores de calor enfriados por un nanofluido a través de un modelo Lagrangiano-Euleriano. Consideraron aletas tipo pin con secciones transversales cuadrada, circular y triangular, encontrando que la circular tiene el mejor desempeño térmico.

Boraey [36] determinó numéricamente, la separación geométrica y el número de Reynolds para un disipador de calor con tres filas de aletas alineadas tipo pin cuadrada, con el mejor desempeño térmico para un número de Prandtl de 0,7. Joo *et al.* [37] optimizaron térmicamente disipadores de calor con convección natural usando el método de optimización de topología tridimensional, introduciendo un modelo de convección dependiente de la forma para disminuir el costo computacional, por medio del cual la variación del coeficiente de transferencia de calor depende tanto de la forma local de la aleta como del desarrollo de la capa límite térmica. Yang *et al.* [38] optimizaron, con base en la teoría constructal, el costo de operación mínimo basados en la velocidad de generación de entropía, disipadores de calor con aletas tipo pin; encontrando los valores óptimos del diámetro, relación de aspecto altura a diámetro y cantidad de aletas tipo pin cilíndricas combinando métodos analíticos y numéricos.

Das [39] analizaron y obtuvieron las dimensiones óptimas de una aleta que involucra simultáneamente transferencia de calor y de masa, que maximiza la transferencia de calor para un volumen constante de la misma. Para ello utilizaron una metodología inversa a través de un algoritmo de búsqueda de evolución diferencial, a través del cual exploraron las múltiples combinaciones de los parámetros geométricos de la aleta para un volumen constante; las velocidades de transferencia de calor correspondientes a dichas combinaciones se calcularon por medio de un análisis directo basado en el método de transformación diferencial.

Los resultados obtenidos mostraron que el espesor de la aleta juega un papel fundamental en la velocidad de transferencia de calor en comparación del ancho y la longitud de esta. Además, encontraron para un volumen de la aleta dado, que el perfil parabólico cóncavo tiene la mayor área superficial, la mejor transferencia de calor y una distribución de temperatura superficial aproximadamente lineal. Das [40] y Hazarika [41] analizaron la optimización de una aleta tipo «T» con y sin transferencia simultánea de calor y de masa.

Zadhoush *et al.* [42] estudiaron la optimización geométrica de una aleta de placa rectangular bajo convección natural usando la teoría constructal. El resultado principal fue la determinación del efecto del tipo de disposición de las aletas en términos de la optimización geométrica para el enfriamiento de la lámina base. Se consideraron dos tipos de arreglos, longitudinal y transversal, siendo la disposición óptima aquella en la cual la lámina caliente tenía seis aletas dispuestas longitudinalmente. Deshamukhya *et al.* [43] estudiaron la distribución de temperatura, la eficiencia y la optimización de aletas porosas rectangulares, con generación interna de calor, para condiciones de convección en la punta y punta aislada a través de la utilización de técnicas analíticas aproximadas, el método de descomposición de Adomian y el método de transformación diferencial.

Dong *et al.* [44] presentaron los resultados a partir de la optimización simultánea de la eficiencia y el volumen total de la aleta, para aletas tipo pin cónicas con perfil curvo y flujo de calor en la base uniforme. Mann [45] modelaron numéricamente el flujo a través de un tubo con micro aletas helicoidales y utilizaron un algoritmo de optimización multiobjetivo (aumento mínimo de la fricción y aumento máximo de la transferencia de calor).

Wang [46] propusieron un algoritmo genético paso a paso para la optimización geométrica de aletas cónicas cuya función objetivo es la velocidad de transferencia de calor. Esta nueva clase de algoritmo propuesto podría ser aplicado a varios tipos de problemas de optimización de aletas con distribución de temperatura unidimensional y conducción de calor en estado estacionario. Algunos otros autores proponen mejoras en la transferencia de calor, ya sea introduciendo insertos de materiales altamente conductores dentro del material base de la aleta [47] o cambiando el diseño de los disipadores de calor [48] y [49].

Analizando todas las referencias citadas, muestran que la gran mayoría de análisis de superficies extendidas emplean un modelo de análisis de conducción de calor unidimensional. Este modelo ha probado ser adecuado para el diseño de aletas para una gran variedad de aplicaciones. Es más, Razelos y Georgiou, en 1992, argumentaron que si las aletas son diseñadas tales que el número de Biot transversal y la relación de aspecto son del orden de 0,1 y 1,0, respectivamente, el modelo unidimensional no introduce error apreciable.

Incluso estos criterios de diseño, aunque sean aplicables a muchas situaciones de ingeniería, no son aplicables en todos los casos [5]. En el mismo sentido, Yeh [50] cita en

su trabajo el resultado obtenido por Irey, y Lau & Tan, quienes mostraron que la suposición de conducción de calor unidimensional para una aleta es válida solamente para un número de Biot transversal mucho menor que la unidad.

1.2 Antecedentes al desarrollo de un perfil óptimo de aletas.

Para el análisis de las distintas geometrías conocidas (rectangular, triangular, parabólica convexa y parabólica cóncava) mostradas en la tabla 1.1, se emplea el método propuesto por Gardner y reportado por [5]. Inicialmente se parte de una aleta generalizada de perfil arbitrario. A continuación, se realiza un balance energético sobre un elemento diferencial de dicha aleta obteniéndose de esta forma la ecuación diferencial generalizada para las aletas planas rectas.

Tabla 1.1 Principales geometrías para las aletas planas.

<p>Aleta plana de perfil rectangular</p>	<p>Aleta plana de perfil parabólico convexo</p>
<p>Aleta plana de perfil parabólico cóncavo</p>	<p>Aleta plana de perfil parabólico convexo</p>

Fuente: Kraus *et al.* [5]

Posteriormente, se introduce en dicha ecuación, la función perfil $f_2(x)$, propuesta por Gardner y reportada por [5], correspondiente a cada geometría y se resuelve la ecuación diferencial resultante, obteniéndose así la solución particular sustituyendo las condiciones de frontera o las condiciones iniciales dentro de la solución general. Aplicando las condiciones de frontera dadas en la solución general, se obtiene la distribución de temperaturas para las distintas geometrías analizadas y, a partir de esta, la expresión que define el calor disipado por la aleta y su eficiencia.

Tomando como punto de partida estas expresiones, se obtuvieron representaciones gráficas de la distribución de temperaturas en función de la posición en la aleta y de la eficiencia en función del parámetro adimensional mb , en las cuales se comparan entre sí todos los resultados obtenidos para las diferentes geometrías.

1.2.1 Discusión breve de los principales resultados

Dong *et al.* [44], presentaron un balance energético sobre un elemento diferencial de aleta, a partir de la optimización simultánea de la eficiencia y su volumen total, para aletas tipo pin cónicas con perfil curvo y flujo de calor en la base uniforme. Mann [45] modelaron numéricamente el flujo a través de un tubo con micro aletas helicoidales y utilizaron un algoritmo de optimización multiobjetivo (aumento mínimo de la fricción y aumento máximo de la transferencia de calor).

Wang [46] propusieron un algoritmo genético paso a paso para la optimización geométrica de aletas cónicas cuya función objetivo es la velocidad de transferencia de calor. Esta nueva clase de algoritmo propuesto podría ser aplicado a varios tipos de problemas de optimización de aletas con distribución de temperatura unidimensional y conducción de calor en estado estacionario.

Algunos otros autores proponen mejoras en la transferencia de calor, ya sea introduciendo insertos de materiales altamente conductores dentro del material base de la aleta [47], o cambiando el diseño de los disipadores de calor [48-49]. Analizando todas las referencias citadas, muestran que la gran mayoría de análisis de superficies extendidas emplean un modelo de análisis de conducción de calor unidimensional. Este modelo ha probado ser adecuado para el diseño de aletas para una gran variedad de aplicaciones.

Razelos [3], argumenta que si las aletas son diseñadas tales que el número de Biot transversal y la relación de aspecto son del orden de 0,10 y 1,0 respectivamente, el modelo unidimensional no introduce error apreciable.

Incluso estos criterios de diseño, aunque sean aplicables a muchas situaciones de ingeniería, no son aplicables en todos los casos [5]. En el mismo sentido, Yeh [50] cita en su trabajo el resultado obtenido por Irey y Lau & Tan, quienes mostraron que la suposición de conducción de calor unidimensional para una aleta es válida solamente para un número de Biot transversal mucho menor que la unidad.

Dicha aleta obteniéndose de esta forma la ecuación diferencial generalizada para las aletas planas. Posteriormente, se introducirá en dicha ecuación, la función perfil $f_2(x)$ correspondiente a cada geometría y se resolverá la ecuación diferencial resultante, obteniendo la solución particular sustituyendo las condiciones de frontera o las condiciones iniciales dentro de la solución general.

1.3 Ecuación diferencial generalizada en el análisis de una aleta recta.

1.3.1 Terminología y sistema coordenado empleado.

Nótese que la dimensión x tiene su origen en la punta de la aleta y tiene dirección positiva desde la punta de la aleta hacia su base. Considérese la aleta longitudinal plana de perfil arbitrario mostrada en la figura 1.1 y asúmase que la aleta está disipando calor a sus alrededores.

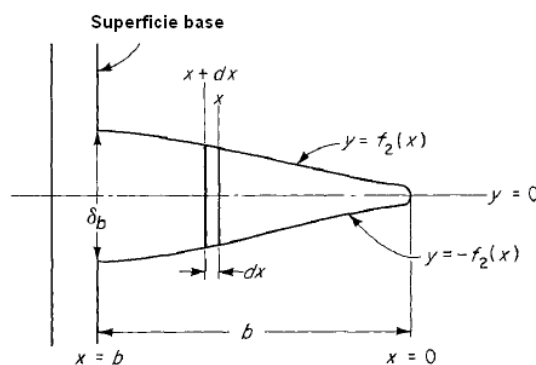


Figura 1.1 Aleta longitudinal plana de perfil arbitrario.

Fuente: Kraus *et al.* [5]

La dimensión x tiene su origen en la punta de la aleta, con dirección positiva desde la punta de la aleta hacia su base. El perfil de la aleta está confinado por las dos curvas, las

cuales son simétricas, $y=f_2(x)$ y $y=-f_2(x)$, así que el espesor de la aleta es $\delta(x)=2f_2(x)$.

La sección transversal de la aleta está dada por:

$$(x)=2Lf_2(x) \quad (1.1)$$

En la ecuación (1.1) L es la longitud de la aleta, la cual está dirigida en la dirección normal al plano de la hoja. Las propiedades en la base de la aleta, localizada en $x=b$, se designarán por el subíndice b .

1.3.2 Ecuación diferencial generalizada de Garder.

La ecuación diferencial para la distribución de temperatura a lo largo de la aleta se obtiene a partir de un balance de energía de estado estacionario sobre el elemento diferencial de altura dx mostrado en la figura 1.2.

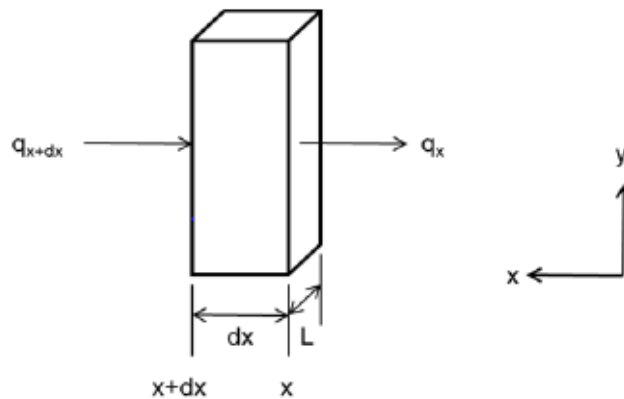


Figura 1.2 Balance de energía unidimensional para una superficie extendida plana.

Fuente: Elaboración propia

Si la temperatura de la superficie de la aleta es $T_{(x)}$, k es la conductividad térmica, h el coeficiente convectivo de transferencia de calor y P es el perímetro de la aleta, al aplicar el requerimiento de conservación de la energía al elemento diferencial de la figura 1.2 se obtiene:

$$q_{x+dx} - q_x - dq_{conv} = 0 \quad (1.2)$$

Como la dirección positiva del eje x es desde la punta de la aleta hacia su base y el flujo de calor es una cantidad direccional, se tiene que:

$$-(q_{x+dx} - q_x) - dq_{conv} = 0 \quad (1.3)$$

Por lo tanto:

$$q_x - q_{x+dx} - dq_{conv} = 0 \quad (1.3.a)$$

De la ley de Fourier se obtiene que:

$$q_x = -kAdT/dx \quad (1.4)$$

Reemplazando la ecuación (1.1) en la (1.4) se tiene que:

$$q_x = -2kLf_2(x)dT/dx \quad (1.5)$$

La conducción de calor en $x+dx$ se expresa como:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \quad (1.6)$$

El calor disipado por convección al fluido circundante, el cual se encuentra a T_∞ , está dado por:

$$dq_{conv} = hdA_s(T - T_\infty) \quad (1.7)$$

Donde el área superficial del elemento diferencial está dada por:

$$dA_s = Pdx = 2[L + 2f_2(x)]dx \quad (1.8)$$

Sin embargo, por la definición de aleta plana (y contradiciendo la novena suposición de Murray-Gardner), la longitud de la aleta debe ser pequeña en comparación con su altura y espesor, es decir $L \ll 2f_2(x)$, por lo tanto:

$$dq_{conv} = 4hf_2(x)(T - T_\infty)dx \quad (1.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.5), (1.6) y (1.9) en la relación (1.3) se obtiene:

$$f_2(x) \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{df_2(x)}{dx} \frac{dT}{dx} - \frac{2h}{kL} f_2(x)(T - T_\infty) = 0 \quad (1.10)$$

Para simplificar la forma de la ecuación (1.10), se transforma la variable dependiente definiendo un exceso de temperatura θ como:

$$\theta(x) = T(x) - T_\infty \quad (1.11)$$

Como la temperatura del medio T_∞ se supone constante, entonces:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

Sustituyendo la ecuación (1.11) en la (1.10):

$$f_2(x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{df_2(x)}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \theta \frac{2hf_2(x)}{kL} = 0 \quad (1.12)$$

Definiendo el factor de desempeño de la aleta como, Razelos [3]:

$$m^2 = \frac{2h}{kL}$$

Sustituyendo el factor de desempeño de la aleta en la ecuación (1.12)

$$f_2(x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{df_2(x)}{dx} \frac{d\theta}{dx} - m^2 f_2(x) \theta = 0 \quad (1.13)$$

La función perfil $f_2(x)$ para aletas longitudinales tomará la forma propuesta por Gardner y reportada por [5].

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^{(1-2n)/(1-n)} \quad (1.14)$$

Donde δ_b es el espesor de la aleta en su base. La solución particular puede ser obtenida sustituyendo las condiciones de frontera dentro de la solución general para eliminar las constantes arbitrarias, que en el caso de este análisis están dadas por:

$$\theta(x=b) = \theta_b \quad (1.15)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (1.16)$$

1.4 Aleta plana de perfil rectangular.

Para la aleta longitudinal plana de perfil rectangular mostrada en la tabla 1.1, el exponente que satisface esta geometría en la ecuación (1.14) (14) es $n = 0,5$. La función perfil para esta aleta es:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} = \frac{\delta}{2} \quad (1.16.a)$$

La ecuación (1.16) se debe a que en este tipo de aletas se cumple que:

$$\frac{df_2(x)}{dx} = 0 \quad ; \quad \delta_b = \delta \quad (1.16.b)$$

Sustituyendo la ecuación (1.16.b) en la (1.13) se obtiene que:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (1.17)$$

La ecuación (1.17) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes y su solución general está dada por:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (1.18)$$

Al aplicar las condiciones de frontera dadas en las ecuaciones (1.15) y (1.16) en la solución general (1.18), es posible obtener la distribución de temperaturas para la aleta plana rectangular, la cual viene dada por:

$$\theta(x) = \frac{\cosh(mx)}{\cosh(mb)} \theta_b \quad (1.19)$$

Debido a que la orientación de la altura coordenada x es opuesta a la dirección del flujo de calor en la aleta, el flujo de calor a través de la base de esta, q_b , está dado por:

$$q_b = kA \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} \quad (1.20)$$

El área de la sección transversal de la aleta está dada por $A = L\delta_b$, derivando la expresión dada por la ecuación (1.19) y evaluándola en $x=b$, se obtiene el calor disipado por la aleta plana rectangular.

$$q_b = k\delta_b L \theta_b m \tanh(mb) = \frac{2h\delta_b \theta_b \tanh(mb)}{m} \quad (1.21)$$

La definición de la eficiencia de la aleta es adimensional, [1]:

$$\eta_f = \frac{q_f}{q_{ideal}} = \frac{q_f}{hA_f \theta_b} \quad (1.22)$$

Donde A_f es el área de la superficie de la aleta y q_f es el flujo de calor real disipado por la aleta. Para la aleta longitudinal plana de perfil rectangular, el flujo de calor real está dado por la ecuación (1.21), mientras el flujo de calor ideal vendrá dado por:

$$q_{ideal} = hA_{total} \theta_b = 2h\delta b \theta_b \quad (1.23)$$

Reemplazando la ecuación (1.21) y (1.22) en la relación (1.22), y empleando el factor de desempeño m^2 , es posible entonces obtener la eficiencia de la aleta plana rectangular, la cual viene dada por:

$$\eta = \frac{\tanh(mb)}{(mb)} \quad (1.24)$$

1.5 Aleta plana de perfil triangular.

Para la aleta longitudinal plana de perfil triangular mostrada en la tabla 1.1, el exponente que satisface esta geometría en la ecuación (1.14) (14) es $n=0$. La función perfil para esta aleta es:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b x}{2b} ; \quad \frac{df_2(x)}{dx} = \frac{\delta_b}{2b} \quad (1.24.a)$$

Sustituyendo la ecuación (1.24.a) en la relación (1.13), la ecuación diferencial gobernante se reduce a:

$$x \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - m^2 x \theta = 0 \quad (1.25)$$

La ecuación (1.25) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes variables y su solución general está dada por:

$$\theta(x) = C_1 I_0(mx) + C_2 K_0(mx) \quad (1.26)$$

Donde I_0 y K_0 son las funciones de Bessel modificadas de primera y de segunda especie de orden cero, respectivamente.

Para tener una diferencia de temperatura finita en la punta de la aleta (donde $x=0$), genera que $C_2 = 0$, debido a que $K_0(0)$ no está definido, esto simplifica la ecuación (1.26) a la siguiente:

$$\theta(x) = C_1 I_0(mx) \quad (1.27)$$

Para hallar C_1 , se sustituye la condición de frontera dada en la ecuación (1.15) en la solución general (1.27), obteniendo la distribución de temperaturas para la aleta plana triangular:

$$\theta(x) = \frac{I_0(mx)}{I_0(mb)} \theta_b \quad (1.28)$$

Debido a que la orientación de la altura coordenada x es opuesta a la dirección del flujo de calor en la aleta, el flujo de calor a través de la base de esta, q_b , está dado por:

$$q_b = kA \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} \quad (1.29)$$

El área de la sección transversal de la aleta está dada por $A = L\delta_b$, derivando la expresión dada por la ecuación (1.28) y evaluándola en $x=b$, se obtiene el calor disipado por la aleta plana triangular.

$$q_b = \frac{k\delta_b L \theta_b m I_1(mb)}{I_0(mb)} = \frac{2h\delta_b \theta_b I_1(mb)}{m I_0(mb)} \quad (1.30)$$

Para la aleta longitudinal plana de perfil triangular, el flujo de calor real está dado por (1.30). El flujo de calor ideal esta dado por:

$$q_{ideal} = hA_{total}\theta_b = h\delta_b b\theta_b \quad (1.31)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.30) y (1.31) en la relación (1.22), se obtiene la eficiencia de la aleta plana triangular, la cual viene dada por

$$\eta = \frac{2I_1(mb)}{(mb)I_0(mb)} \quad (1.32)$$

1.6 Aleta plana de perfil parabólico cóncavo.

Para la aleta longitudinal plana de perfil parabólico cóncavo mostrada en la tabla 1.1, el exponente que satisface esta geometría en la relación (1.14) es 2 cuando n tiende a infinito. La función perfil para esta aleta es:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left(\frac{x}{b}\right)^2 \quad ; \quad \frac{df_2(x)}{dx} = \frac{\delta_b}{b} \frac{x}{b} \quad (1.32.a)$$

Al sustituir la ecuación (1.32.a) en la expresión (1.13) la ecuación diferencial gobernante se reduce a:

$$x^2 = \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2x \frac{d\theta}{dx} - m^2 x^2 \theta = 0 \quad (1.33)$$

La ecuación (1.33) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes variables y su solución general está dada por:

$$\theta(x) = x^{1/2} [C_1 I_{1/2}(mx) + C_2 I_{-1/2}(mx)] \quad (1.34)$$

Donde $I_{1/2}$ y $I_{-1/2}$ son las funciones de Bessel modificadas de primera clase de orden $1/2$ y $-1/2$ respectivamente.

Aplicando las condiciones de frontera dadas en las ecuaciones (1.15) y (1.16) en la solución general (1.34), se obtiene la distribución de temperaturas para la aleta plana parabólica cóncava:

$$\theta(x) = \left(\frac{b}{x}\right)^{1/2} \frac{I_{1/2}(mx)}{I_{1/2}(mb)} \theta_b \quad (1.35)$$

Debido a que la orientación de la altura coordenada x es opuesta a la dirección del flujo de calor en la aleta, el flujo de calor a través de la base de esta, q_b , esta dado por:

$$q_b = kA \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} \quad (1.36)$$

El área de la sección transversal de la aleta está dada por $A = L\delta_b$, derivando la expresión (1.35) y evaluándola en $x = b$, se obtiene el calor disipado por la aleta plana parabólica cóncava:

$$q_b = \frac{kL\delta_b\theta_b m I_{3/2}(mx)}{I_{1/2}(mx)} = \frac{2h\delta_b\theta_b I_{3/2}(mb)}{m I_{1/2}(mb)} \quad (1.37)$$

Para la aleta longitudinal plana de perfil parabólico cóncavo, el flujo de calor real está es obtenido por medio de la ecuación (1.37), mientras el flujo de calor ideal esta dado por:

$$q_{ideal} = hA_{total}\theta_b = \frac{2}{3}h\delta_b b\theta_b \quad (1.38)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.37) y (1.38) en la relación (1.22), se obtiene la eficiencia de la aleta plana parabólica cóncava, la cual viene dada por:

$$\eta = \frac{3I_{3/2}(mb)}{(mb)I_{1/2}(mb)} \quad (1.39)$$

1.7 Aleta plana de perfil parabólico convexo.

Para la aleta longitudinal plana de perfil parabólico convexo mostrada en la tabla 1.1, el exponente que satisface esta geometría en la ecuación (1.14) es $n = 1/3$. La función perfil para esta aleta es:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^{1/2} ; \quad \frac{df_2(x)}{dx} = \frac{\delta_b}{4\sqrt{bx}} \quad (1.39.a)$$

Sustituyendo la ecuación (1.39.a) en la relación (1.13), la ecuación diferencial gobernante del proceso se reduce a:

$$x^{1/2} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{2x^{1/2}} \frac{d\theta}{dx} - m^2 x^{1/2} \theta = 0 \quad (1.40)$$

La ecuación (1.39) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes variables y su solución general está dada por:

$$\theta(x) = x^{1/4} [C_1 I_{1/4}(mx) + C_2 I_{-1/4}(mx)] \quad (1.41)$$

Donde $I_{1/4}$ y $I_{-1/4}$ son las funciones de Bessel modificadas de primera clase de orden $1/4$ y $-1/4$, respectivamente.

Aplicando las condiciones de fronteras dadas por las ecuaciones (1.15) y (1.16) en la ecuación (1.41), se obtiene la distribución de temperaturas para la aleta plana parabólica convexa:

$$\theta(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{1/4} \frac{I_{-1/4}(mx)}{I_{-1/4}(mb)} \theta_b \quad (1.42)$$

Debido a que la orientación de la altura coordenada x es opuesta a la dirección del flujo de calor en la aleta, el flujo de calor a través de la base de esta, q_b esta dado por:

$$q_b = kA d\theta/dx \Big|_{x=0} \quad (1.43)$$

El área de la sección transversal de la aleta está dada por $A = L\delta_b$, derivando la expresión dada por la relación (1.42) y evaluándola en $x = b$, se obtiene el calor disipado por la aleta plana parabólica convexa:

$$q_b = \frac{kL\delta_b\theta_b m I_{3/4}(mb)}{I_{1/4}(mb)} = \frac{2h\delta_b\theta_b I_{3/4}(mb)}{m I_{-1/4}(mb)} \quad (1.44)$$

Para la aleta longitudinal plana de perfil parabólico convexo, el flujo de calor real está dado por la relación (1.43). El flujo de calor ideal está dado por:

$$q_{ideal} = hA_{total} \theta_b = \frac{4}{3} h\delta_b b \theta_b \quad (1.45)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.43) y (1.45) en la relación (1.22), se obtiene la eficiencia de la aleta plana parabólica convexa:

$$\eta = \frac{3I_{3/4}(mb)}{2(mb)I_{-1/4}(mb)} \quad (1.46)$$

La obtención detallada de todas las ecuaciones presentadas en esta sección puede consultarse en [51]. En la figura 1.3 se muestra la distribución de temperaturas para las distintas geometrías analizadas. La distribución de temperaturas obtenida corresponde a algunos valores arbitrarios asignados a los parámetros involucrados, tales como

$m = 17,738 \text{ m}^{-1}$, $b = 0,1 \text{ m}$ y $\theta_b = 40^\circ \text{ C}$. De esas distribuciones es evidente, para las mismas condiciones, que la geometría rectangular es la que menos transferencia de calor adicional aportaría asociada con un incremento en su longitud debido a que la temperatura de la punta tiende a igualarse a la temperatura del fluido circundante más rápidamente que las otras geometrías.

Esto es una consecuencia de la reducción en la transferencia de calor por conducción con la disminución de x , debido a las pérdidas por convección continuas de la superficie de la aleta. Es decir, el calor real disipado por la aleta rectangular plana es mayor que el disipado por cualquier otra geometría, y en consecuencia su gradiente de temperatura sería igualmente el mayor entre las geometrías estudiadas.

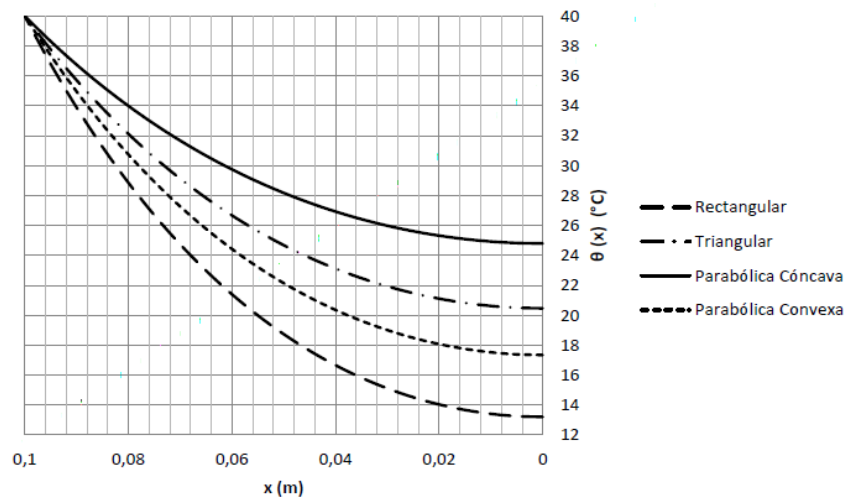


Figura 1.3 Distribución de temperaturas de aletas planas rectas unidimensionales.

Fuente: Das & Kundu [40].

En la figura 1.4 se presenta la eficiencia para distintas geometrías en función del parámetro (mb) . Es importante destacar que los resultados obtenidos para las aletas planas son completamente contrarios a los reportados por Gardner para las aletas longitudinales clásicas analizadas según las suposiciones de Murray- Gardner, según los cuales, la geometría con mayor eficiencia es la rectangular y la de menor es la parabólica cóncava.

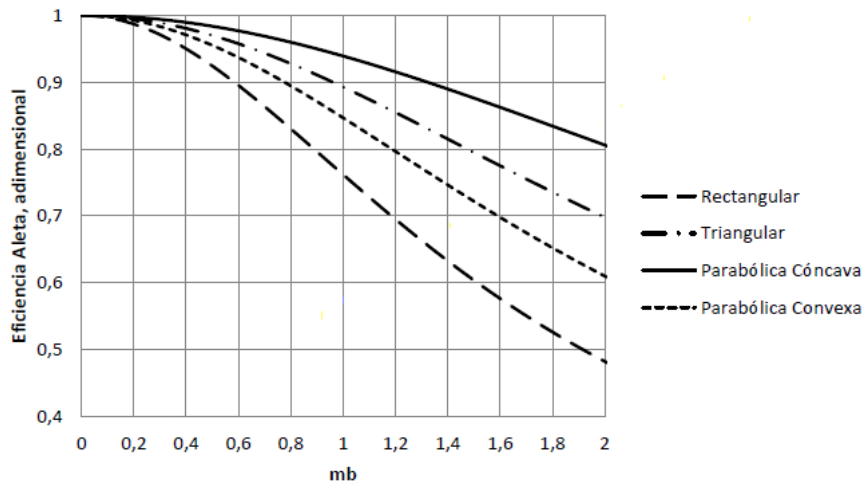


Figura 1.3 Eficiencia de aletas planas rectas unidimensionales.

Fuente: Das & Kundu [40].

Esto explica porque en el análisis clásico, el área total de la aleta en el cálculo del calor ideal disipado por esta es igual independientemente de la geometría, mientras que, en el análisis propuesto en esta investigación, el área total máxima se tiene cuando la aleta es rectangular y la mínima cuando es parabólica cóncava, y por la relación inversamente proporcional entre el calor ideal y la eficiencia, obtenemos la mínima y la máxima eficiencia respectivamente. Para el análisis de las distintas geometrías estudiadas, se va a emplear el método propuesto[5] para la optimización de las aletas longitudinales rectas clásicas, según el cual se buscan las dimensiones óptimas para los diferentes perfiles cuando se especifica el peso o una disipación de calor dada, siendo estos dos de los parámetros de optimización más comunes.

A través de este procedimiento, se pretende buscar la altura y el espesor de la aleta óptima, es decir aquellos para los cuales se disipa la máxima cantidad de calor, o lo que es equivalente, el calor que fluye por la base de la aleta es un máximo.

1.8 Aleta de plana de perfil rectangular.

Sea β_R el parámetro de optimización, el cual puede definirse en términos del área del perfil de la aleta, $A_p = b_0 \delta_0$

$$\beta_R = mb_0 = \frac{A_p m}{\delta_0} = \left(\frac{A_p}{\delta_0} \right)^{1/2} \quad (1.47)$$

Este flujo de calor a través de la base de la aleta está definido por medio de la relación (1.21) y puede ser expresado en términos del área del perfil de la aleta y el espesor de la aleta óptimo δ_0 como:

$$q_b = k\delta_0 L \theta_0 \left(\frac{2h}{kL} \right)^{1/2} \tanh \left[\frac{A_p}{\delta_0} \left(\frac{2h}{kL} \right)^{1/2} \right] \quad (1.48)$$

Diferenciando con respecto a δ_0 se obtiene:

$$\frac{dq_b}{d\delta_0} = kL\theta_0 \left(\frac{2h}{kL} \right)^{1/2} \left[\tanh(\beta_R) - \beta_R \operatorname{sech}^2(\beta_R) \right] \quad (1.49)$$

La expresión (1.49) se hace cero cuando

$$\tanh(\beta_R) - \beta_R \operatorname{sech}^2(\beta_R) = 0 \quad (1.50)$$

Comparando (50) son soluciones obtenidas para las aletas longitudinales clásicas analizadas en [5] tenemos que ambos estudios conducen a la ecuación general:

$$\tanh(\beta_R) - C\beta_R \operatorname{sech}^2(\beta_R) \quad (1.51)$$

Donde C es la constante que determina la existencia o no de máximos. En [40] se establece que, sin embargo en el trabajo [5] fue obtenido que $C = 3$.

Al estudiar el comportamiento de la relación (1.51) para distintos valores de C , se puede afirmar lo siguiente:

Si $C \leq 1$ No hay número crítico (sólo la solución trivial)

Si $C \geq 1$ Hay números críticos distintos de cero

Sea β_T el parámetro de optimización, el cual puede definirse en términos del área del perfil de la aleta, $A_p = b_o \delta_0 / 2$

$$\beta_T = m b_o = \frac{2A_p m}{\delta_0} = \frac{2A_p}{\delta_0} \left(\frac{2h}{kL} \right)^{1/2} \quad (1.52)$$

El flujo de calor a través de la base de la aleta está definido por la relación (1.30) y puede ser expresado en términos del área del perfil de la aleta y el espesor de la aleta óptimo δ_o como:

$$q_b = 4A_p h \theta_b \beta_T^{-1} \frac{I_1(\beta_T)}{I_0(\beta_0)} \quad (1.53)$$

Diferenciando con respecto a β_T se obtiene:

$$q_b = 4A_p h \theta_b \left\{ \beta_T^{-2} \left[\frac{\beta_T I_0(\beta_T) I_2(\beta_T) - \beta_T I_1^2(\beta_T)}{I_0^2(\beta_T)} \right] \right\} \quad (1.54)$$

Maximizando la expresión anterior se tienen dos situaciones:

$$\frac{\beta_T I_0(\beta_T) I_2(\beta_T) - \beta_T I_1^2(\beta_T)}{I_0^2(\beta_T)} = 0 \quad (1.55)$$

Como $I_0(0) = 1$ y $\beta_T \neq 0$, entonces la relación (1.55) es cero cuando:

$$I_0(\beta_T) I_2(\beta_T) - I_1^2(\beta_T) = 0 \quad (1.56)$$

1.9 Aleta plana de perfil parabólico cóncavo.

Sea β_{CV} el parámetro de optimización, el cual puede definirse en términos del área del perfil de la aleta $A_p = b_0 \delta_0 / 3$, entonces:

$$\beta_T = m b_0 = \frac{3A_p m}{\delta_0} = \frac{3A_p}{\delta_0} \left(\frac{2h}{kL} \right)^{1/2} \quad (1.57)$$

El flujo de calor a través de la base de la aleta está definido por (1.37), que puede ser expresado en términos del área del perfil de la aleta y el espesor de la aleta óptimo δ_0

$$q_b = 6A_p h \theta_b \beta_{cv}^{-1} \frac{I_{3/2}(\beta_{cv})}{I_{1/2}(\beta_{CV})} \quad (1.58)$$

Diferenciando con respecto a β_{cv} se obtiene:

$$\frac{dq_b}{d\beta_{cv}} = 6A_p h \theta_b \left\{ \beta_{cv}^{-2} \left[\frac{\beta_{cv} I_{1/2}(\beta_{cv}) I_{5/2}(\beta_{cv}) - \beta_{cv} I_{3/2}^2(\beta_{CV})}{I_{1/2}^2(\beta_{CV})} \right] \right\} = 0 \quad (1.59)$$

La expresión (1.60) se hace cuando

$$\frac{\beta_{cv} I_{1/2}(\beta_{CV}) I_{5/2}(\beta_{CV}) - \beta_{CV} I_{3/2}^2(\beta_{CV})}{I_{1/2}^2(\beta_{cv})} = 0 \quad (1.60)$$

Como $I_{1/2}(0) = 0$ y $\beta_{cv} \neq 0$, entonces la ecuación (1.60) es cero cuando:

$$\beta_{cv} I_{1/2}(\beta_{CV}) I_{5/2}(\beta_{CV}) - \beta_{CV} I_{3/2}^2(\beta_{CV}) = 0 \quad (1.61)$$

Esta es una ecuación que se puede resolver por ensayo y error. Aplicando tal procedimiento y teniendo en cuenta la restricción dada para β_{cv} , se tiene:

$$\beta_{cv} \rightarrow 0$$

El valor del espesor óptimo para la aleta correspondiente es:

$$\delta_0 = \frac{3A_p m}{\beta_{cv}} = \frac{3A_p m}{0} \delta_0 \rightarrow \infty$$

1.10 Aleta plana de perfil parabólico convexo.

Sea β_{cx} el parámetro de optimización, el cual puede definirse en términos del área del perfil de la aleta, $A_p = 2b_0\delta_0 / 3$

$$\beta_{cx} = mb_0 = \frac{3A_p m}{2\delta_0} = \frac{3A_p}{2\delta_0} \left(\frac{2h}{kL} \right)^{1/2} \quad (1.62)$$

El flujo de calor a través de la base de la aleta está definido por la relación (1.44), puede ser expresado en términos del área del perfil de la aleta y el espesor de la aleta óptimo δ_0 como:

$$q_b = 3A_p h \theta_b \beta_{cx}^{-1} \frac{I_{3/4}(\beta_{cx})}{I_{-1/4}(\beta_{cx})} \quad (1.63)$$

Diferenciando con respecto a β_{cx} se obtiene:

$$\frac{dq_b}{d\beta_{cx}} = 3A_p h \theta_b \left\{ \beta_{cx}^{-2} \left[\frac{\beta_{cx} I_{-1/4}(\beta_{cx}) I_{7/4}(\beta_{cx}) - \beta_{cx} I_{3/4}^2(\beta_{cx})}{I_{-1/4}^2(\beta_{cx})} \right] \right\} \quad (1.64)$$

Maximizando la expresión anterior se tienen dos situaciones:

$$\left(\frac{dq_b}{d\beta_{cx}} = 0 \right)$$

La expresión (1.65) se hace cero cuando:

$$\frac{\beta_{cx} I_{-1/4}(\beta_{cx}) I_{7/4}(\beta_{cx}) - \beta_{cx} I_{3/4}^2(\beta_{cx})}{I_{-1/4}^2(\beta_{cx})} \quad (1.65)$$

Como $I_{-1/4}(0) = \text{no existe}$ y $\beta_{cx} \neq 0$, entonces la ecuación (1.66) es igual a cero cuando:

$$\beta_{cx} I_{-1/4}(\beta_{cx}) I_{7/4}(\beta_{cx}) - \beta_{cx} I_{3/4}^2(\beta_{cx}) = 0 \quad (1.66)$$

En estos casos la comparación entre los dos estudios no tan directa como en las dos geometrías anteriores, y por lo tanto no se hará ningún intento por relacionar el comportamiento para distintos valores de C . Los resultados obtenidos en la optimización indican que la tendencia general para todas las geometrías es:

$$\delta_0 \rightarrow \infty \text{ y } b_0 = 0$$

Lo cual significa que, independiente de la geometría, la disipación de calor será máxima cuando la aleta tenga un espesor en la base muy grande y una altura lo más pequeña posible. El análisis y la optimización de la transferencia de calor en las principales geometrías de las aletas planas utilizando modelos unidimensionales, contribuye a mejorar el entendimiento de la disipación de calor en aletas, llenando así un vacío en la literatura especializada en el tema.

El hallazgo principal en el análisis unidimensional efectuado lo constituyen los relacionados con la eficiencia de las distintas geometrías, que para este análisis, difieren a los reportados en la literatura bajo el enfoque clásico, mostrando de esta forma, que los resultados aceptados por la comunidad especializada en el tema no pueden emplearse indistintamente a todas las aplicaciones de las aletas a nivel práctico.

CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA DE CÁLCULO PARA LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN SUPERFICIES EXTENDIDAS

2.1 Introducción.

Una de las formas de incrementar la transferencia de calor en un sistema es aumentando su área superficial por medio de superficies extendidas, estas superficies extendidas son conocidas como aletas en la práctica ingenieril. Las aletas se emplean fundamentalmente cuando el coeficiente pelicular de transferencia de calor por convección es bajo, lo cual sucede a menudo cuando el fluido operante es un gas, (por ejemplo, aire), y especialmente en condiciones de convección natural.

2.2 Superficies extendidas de sección transversal constante.

Los ejemplos más comunes son las aletas de enfriamiento de componentes electrónicos, o los cilindros de los motores de combustión interna de motocicletas y podadoras, o por ejemplo los tubos del condensador de un refrigerador doméstico. Aunque las aletas tienen un extenso campo de aplicaciones en problemas de transmisión de calor, por ejemplo, en los radiadores de automóviles, equipos de aire acondicionado, en los elementos combustibles de reactores nucleares refrigerados por gases, en la disipación de energía en vehículos espaciales y en los equipos de la industria química.

Antes de profundizar en la problemática que abarca la resolución de los problemas térmicos en superficies ampliadas específicas, resulta conveniente hacer una interpretación intuitiva de la necesidad de las aletas, así como de sus secciones transversales, laterales y perfiles (sección recta), que se corresponden con figuras geométricas con posibilidades de fabricación en serie, tales como las rectangulares, triangulares, trapezoidales, parabólicas e hiperbólicas, con dimensiones en las que la relación (longitud/espesor) es del orden de 5/1 a 50/1, siendo el espesor del orden de 0,5 mm a 10 mm.

Las aletas se pueden disponer sobre superficies planas o curvas. Si la disposición es de tipo longitudinal, se puede admitir que la superficie de encastre donde se apoya la aleta es plana, siempre que el radio del tubo sea elevado frente al espesor de la aleta. Cuando las aletas son

sólidos de revolución o paralelepípedos se denominan protuberancias y su disposición puede admitirse sobre superficies planas cuando la superficie de la protuberancia en la base sea pequeña frente a la superficie de esta última. Las protuberancias se tratan con distribución de temperatura constante para cada sección recta paralela a la base, lo que equivale a admitir que la relación entre la longitud L de la protuberancia y el diámetro o longitud equivalente en la base, es elevada, pudiéndose considerar la transmisión de calor como unidireccional; cuando esta hipótesis no se cumpla se estudia el fenómeno de la transmisión de calor en tres dimensiones.

Las aletas y las protuberancias se disponen en la superficie base constituyendo un conjunto, siendo el más frecuente un tubo en el que el número de aletas o protuberancias es variable, con una separación del orden de 1 a 6 centímetros para las aletas, y una distribución de retícula cuadrada o triangular para las protuberancias. Para satisfacer las necesidades térmicas, los elementos se acoplan en serie o en paralelo constituyendo un intercambiador de calor.

Cuando el fluido que circula por las aletas está confinado y se mueve mediante un sistema de bombeo, hay que tener en cuenta la energía necesaria para mantener el coeficiente pelicular de transferencia de calor a través de las aletas, procurando que la energía térmica extraída sea máxima frente a la energía utilizada en mover el fluido.

Esta situación conduce a un estudio de métodos y costes de fabricación, mantenimiento y rendimiento de los elementos de las aletas, cuyos valores óptimos pueden no coincidir con los óptimos térmicos, por lo que un análisis de estos últimos es importante desde el punto de vista de la fabricación de modelos normalizados, así como de la elección del modelo más adecuado para el usuario.

Los perfiles rectangulares sobre superficies planas constituyen el caso más simple de superficies ampliadas. Se pueden disponer en una pared plana, o sobre la longitud axial de un tubo en dirección longitudinal, con hélices de paso elevado o sobre superficies arbitrarias de gran radio de curvatura. El conjunto constituido con aletas longitudinales rectangulares es de fácil fabricación por extrusión, fundición, colada continua, etc.

En casos especiales, las aletas longitudinales se mecanizan sobre el material de aleación de la base. Las aletas unidas a la base sin discontinuidades, mediante soldadura o presión, no

tienen resistencias térmicas de contacto y son adecuadas para temperaturas elevadas dado que la base no se altera por dilataciones térmicas diferenciales siempre que no sufran efectos corrosivos o una excesiva deformación.

En régimen estacionario, el calor que se conduce a través de un sistema de aletas se elimina al exterior mediante un proceso de convección, siendo la energía disipada, en la unidad de tiempo, proporcional a su área superficial.

Para ir aportando una idea clara al respecto, se parte de considerar una aleta de sección transversal constante, la cual posee una longitud a y una sección transversal rectangular de altura L . vale destacar que aunque la sección transversal seleccionada es rectangular, el método que será descrito acá es válido para cualquier otra geometría, por la forma que toma el número de Biot. El calor se transmite por conducción a través del material de la aleta y posteriormente se cede por convección al medio fluido que le rodea. La temperatura de este fluido ambiente es T_F y el coeficiente pelicular de transferencia de calor por convección α posee un valor constante (véase la figura 2.1.a)

Analizando la figura 2.1.a, se aprecia que el balance de flujo térmico en una unidad de tiempo en el volumen elemental situado en la posición x , va a ser igual a la suma del calor conducido en dicho tiempo fuera del volumen de control $x + \Delta x$, adicionado al calor transferido por convección en dicho tiempo, desde la superficie del volumen elemental, matemáticamente esto viene descrito por:

$$Q_x - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x \right) - Q_c = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x + Q_c = 0 \quad (2.1.a)$$

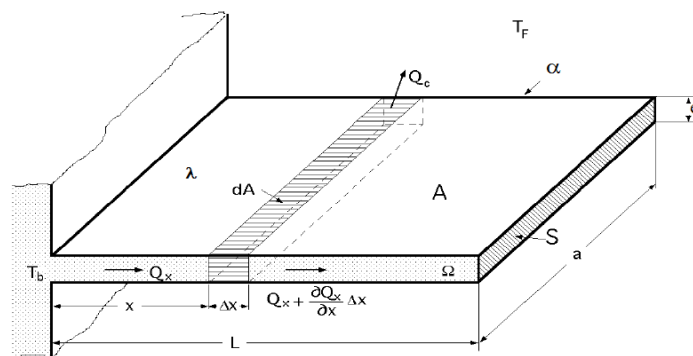


Figura 2.1.a Condiciones de contorno para una aleta con sección transversal constante.

Aplicando la ley de Fourier a la relación (2.1.a)

$$Q_x = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x ; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} = -\lambda S \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_x \quad (2.1.a.1)$$

Mediante el empleo de la ley de enfriamiento de Newton se llega a la relación que tiene en cuenta la disipación de calor convectivas de la superficie extendida la cual viene dada por:

$$Q_c = \alpha d A (T_x - T_F) - \alpha P \Delta X (T_x - T_F)_c = 0 \quad (2.1.a.2)$$

En la relación (2.1.a.2) y (2.1.a.1) las variables S y P son el área de la sección transversal y el perímetro respectivamente.

La ecuación diferencial del proceso de distribución de temperaturas vendrá dada por:

$$-\lambda S \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_x \Delta X + \alpha P \Delta X (T_x - T_F) = 0 ; \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_x - \frac{\alpha P}{\lambda S} (T_x - T_F) = 0 \quad (2.1.a.3)$$

Uno de los cambios que se pueden efectuar será de la forma:

$$\phi(\xi) = \frac{T_x - T_F}{T_B - T_F} ; \quad T_x = T_F + \phi(\xi) T_B - T_F \quad (2.1.a.4)$$

$$\text{Por lo que } \begin{cases} \frac{dt}{dx} = (T_B - T_F) \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \left| \xi = \frac{x}{L} ; \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \right| = \frac{T_B - T_F}{L} \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \\ \frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{T_B - T_F}{L} \frac{d^2 \phi(\xi)}{d\xi^2} \frac{d\xi}{dx} = \frac{T_B - T_F}{L^2} \frac{d^2 \phi(\xi)}{d\xi^2} \end{cases} \quad (2.1.a.5)$$

Obteniéndose definitivamente:

$$\frac{d^2 \phi(\xi)}{d\xi^2} - \frac{\alpha L^2 P}{\lambda S} \phi(\xi) = 0 \quad (2.1.a.6)$$

La distribución de temperaturas se puede expresar entonces en forma adimensional en función del número de Biot, teniendo en cuenta que el perímetro P multiplicado por la longitud L de la aleta analizada va a ser igual al área total de la superficie lateral, o sea:

$$A = PL \quad (2.1.a.7)$$

Por lo tanto de (2.1.a.7) resulta:

$$\frac{PL^2}{S} = \frac{AL}{S} = L^* \quad (2.1.a.8)$$

La relación (2.1.a.7) posee dimensiones de longitud por lo que L^* se puede considerar como la longitud característica de la aleta. El número adimensional de Biot se determinará entonces como:

$$Bi = \frac{\alpha PL^2}{S\lambda} = \frac{\alpha L^*}{\lambda} \quad (2.1.a.9)$$

La expresión de la ecuación diferencial de la distribución de temperaturas en forma adimensional, correspondiente a una aleta, en función del número adimensional de Biot viene dada por:

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} - Bi\phi = 0 \quad (2.1.b)$$

La solución general de la relación (2.1.b) viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d^2\phi(\xi)}{d\xi^2} = C_1 e^{-\sqrt{Bi}\xi} + C_2 e^{\sqrt{Bi}\xi} \quad (2.1.b.1)$$

Los valores de las constantes de integración C_1 y C_2 de la relación (2.1.b.1) se determinan a partir de que sean fijadas las condiciones de contorno. Para establecer estas condiciones de contorno se parte del criterio que la temperatura que se suele conocer inicialmente es la correspondiente a la base de la aleta, en la cual, $x=0$, $T_{x=0} = T_B$, lo que deviene en la primera condición de contorno, por lo que:

$$x=0 \quad ; \quad \xi=0 \quad ; \quad \phi(0) = \frac{T_B - T_F}{T_B - T_F} = 1 \quad ; \quad C_1 + C_2 = 1 \quad (2.1.b.1)$$

Lo expresado en (2.1.b.1) es común a los tipos de aletas de sección transversal constante. La segunda condición de contorno toma diversas formas de acuerdo al estado que se encuentre sometida la aleta, las cuales son:

2.2.1 Aletas muy largas.

La temperatura de su extremo libre es igual al del medio exterior del fluido que lo rodea

$$T_{x \rightarrow \infty} = T_F \quad ; \quad \xi = \frac{x}{L} = 1 \quad ; \quad \phi(1) = \frac{T_B - T_F}{T_B - T_F} = 0 = C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}} \quad (2.1.b.2)$$

Teniendo en cuenta en la relación (2.1.b.2) que L es muy grande y que el número adimensional de Biot es proporcional en este caso a la longitud elevada a la potencia orden dos, o sea a L^2 , se obtendrá entonces que:

$$0 + C_2 e^{\sqrt{Bi}} = 0 \quad ; \quad C_2 = 0 \quad ; \quad C_1 = 1 \quad (2.1.b.3)$$

La ecuación para determinar la distribución de temperaturas vendrá dada por:

$$\phi(\xi) = \frac{T_\xi - T_F}{T_B - T_F} = e^{-\sqrt{Bi}\xi} \quad ; \quad T_\xi = T_F + (T_B - T_F) e^{-\sqrt{Bi}\xi} \quad (2.1.b.4)$$

Para determinar la cantidad de calor disipada, se debe tener en cuenta que el calor que se elimina por convección va a ser igual a la cantidad de se incorpora a la aleta a través de su base $x = 0$, mediante un proceso de transferencia de calor por conducción, por lo que:

$$Q = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \left(\frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = -\frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} (C_1 - C_2) = \left| \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{matrix} \right| = -\frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \quad (2.1.b.5)$$

2.2.2 Aleta con su extremo libre térmicamente aislado.

Este tipo de aletas no disipa calor por el extremo libre a temperatura de su extremo libre, $x = L$ o $\xi = 1$, por lo que:

$$\left. \frac{dT}{dX} \right|_{x=L} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{dT}{dX} \right|_{x=L} = \frac{T_B - T_F}{L} \left. \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (2.1.b.5)$$

Las constantes C_1 y C_2 de la relación (2.1.b.1) se determinan en la forma:

$$\left. \frac{d\phi}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0 \Rightarrow -C_1 e^{-\sqrt{Bi}} \sqrt{Bi} + C_2 e^{\sqrt{Bi}} \sqrt{Bi} = 0 \quad (2.1.b.6)$$

Agрупando convenientemente en (2.1.b.6) se obtiene:

$$C_1 = C_2 \frac{e^{\sqrt{Bi}}}{e^{-\sqrt{Bi}}} \quad (2.1.b.7)$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

Combinando las expresiones presentes en (2.1.b.7) se llega a:

$$C_2 \frac{e^{\sqrt{Bi}}}{e^{-\sqrt{Bi}}} + C_2 = 1 \quad (2.1.b.8)$$

Transformado a (2.1.b.8) se llega a:

$$C_2 = \frac{e^{-\sqrt{Bi}}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} = \frac{e^{-\sqrt{Bi}}}{2\text{Cosh}\sqrt{Bi}} \quad (2.1.b.9)$$

$$C_1 = \frac{e^{\sqrt{Bi}}}{2\text{Cosh}\sqrt{Bi}}$$

Por lo tanto la solución general para la distribución de temperaturas vendrá dada por:

$$\phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_B - T_F} = \frac{e^{\sqrt{Bi}} + \xi e^{-\sqrt{Bi}} + \xi e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} \quad (2.1.c)$$

Agrupando convenientemente en (2.1.c)

$$\phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_B - T_F} = \frac{e^{\sqrt{Bi}}(1-\xi) + e^{-\sqrt{Bi}}(1-\xi)}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} = \frac{\cosh[\sqrt{Bi}(1-\xi)]}{\cosh[\sqrt{Bi}]} \quad (2.1.c.1)$$

La temperatura T_L en el extremo libre de la aleta, $\xi = 1$ será entonces:

$$\frac{T_L - T_F}{T_B - T_F} = \frac{1}{\cosh[\sqrt{Bi}]} \quad ; \quad T_L = T_F + \frac{T_B - T_F}{\cosh[\sqrt{Bi}]} \quad (2.1.c.2)$$

El calor disipado por la aleta en la unidad de tiempo, se puede determinar como en el caso anterior, considerando que la cantidad de calor que se elimina por convección, es la misma que entra por conducción por el entronque de la aleta, $x = 0$, es decir:

$$Q = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \left(\frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \right)_{\xi=0} = \frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} (C_1 - C_2) \quad (2.1.c.3)$$

Agrupando convenientemente en (2.1.c.3)

$$Q = \lambda S \frac{(T_B - T_F)}{L} \sqrt{Bi} \frac{e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}}}{2 \cosh \sqrt{Bi}} = \lambda S \frac{(T_B - T_F)}{L} \sqrt{Bi} \frac{\sinh \sqrt{Bi}}{2 \cosh \sqrt{Bi}} = \lambda S \frac{(T_B - T_F)}{L} \sqrt{Bi} \tanh(\sqrt{Bi}) \quad (2.1.c.3.a)$$

2.2.3 Aleta con convección desde su extremo libre.

En este tipo de aletas la condición de contorno se ubica en su extremo libre, para $\xi = 1$, y viene dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \frac{dT}{dX} \Big|_{X=L} = \alpha (T - T_F)_{X=L} = \alpha \phi(1) (T_B - T_F) \\ -\lambda \frac{dT}{dX} \Big|_{X=L} = -\lambda \frac{(T_B - T_F)}{L} \frac{d\phi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \end{array} \right. \quad (2.1.c.4)$$

Si se iguala la relación (2.1.c.4) a la solución diferencial (2.1.b.6) se puede obtener otra relación para la determinación de las constantes C_1 y C_2 , la cual viene dada por:

$$\frac{-\alpha L}{\lambda} (C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}}) = -C_1 \sqrt{Bi} e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 \sqrt{Bi} e^{\sqrt{Bi}} \quad (2.1.c.5)$$

Organizando convenientemente:

$$C_1 e^{-\sqrt{Bi}} \left(-\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right) + C_2 e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right) = 0 \quad (2.1.c.6)$$

Despejando C_1 en la expresión (2.1.c.6) se llega a:

$$C_1 = C_2 \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{e^{-\sqrt{Bi}} \left(-\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right)} = 0 \quad (2.1.c.6)$$

Anteriormente en (2.1.c.6) fue visto que $C_1 + C_2 = 1$, lo que permite obtener.

$$C_1 = \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{\sqrt{Bi} (e^{-\sqrt{Bi}} + e^{\sqrt{Bi}}) + \frac{\alpha L}{\lambda} (-e^{-\sqrt{Bi}} + e^{\sqrt{Bi}})} = \frac{1}{2} \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.c.7)$$

$$C_2 = \frac{e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{\sqrt{Bi} (e^{-\sqrt{Bi}} + e^{\sqrt{Bi}}) + \frac{\alpha L}{\lambda} (-e^{-\sqrt{Bi}} + e^{\sqrt{Bi}})} = \frac{1}{2} \frac{e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.c.8)$$

La distribución de temperaturas vendrá dada por:

$$\phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_B - T_F} = C_1 e^{-\xi \sqrt{Bi}} + C_2 e^{\xi \sqrt{Bi}} \quad (2.1.c.9)$$

Combinando las expresiones (2.1.c.8) y (2.1.c.7) con la distribución de temperaturas dada en (2.1.c.9) se obtiene que:

$$\phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_B - T_F} = \frac{1}{2} \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right) e^{-\xi \sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{\alpha L}{\lambda} \right) e^{\xi \sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.d)$$

Agrupando convenientemente:

$$\phi(\xi) = \frac{T_{(\xi)} - T_F}{T_B - T_F} = \frac{1}{2} \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right) e^{-\xi \sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{\alpha L}{\lambda} \right) e^{\xi \sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.d.1)$$

O lo que resulta idénticamente igual

$$\phi(\xi) = \frac{T_{(\xi)} - T_F}{T_B - T_F} = \frac{\cosh[(1-\xi)\sqrt{Bi}] + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh[(1-\xi)\sqrt{Bi}]}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.d.2)$$

En (2.1.d.1) se debe tener en cuenta que:

$$\left| \begin{array}{l} Bi = \frac{\alpha PL^2}{\lambda S} \\ \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{SBi}{PL} \end{array} \right| \quad (2.1.d.3)$$

Por lo que combinando las condicionantes dadas en (2.1.d.3) con la relación (2.1.d.2) se llega a:

$$\phi(\xi) = \frac{T_{(\xi)} - T_F}{T_B - T_F} = \frac{\cosh[(1-\xi)\sqrt{Bi}] + \frac{S\sqrt{Bi}}{PL} \sinh[(1-\xi)\sqrt{Bi}]}{\cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{S\sqrt{Bi}}{PL} \sinh(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.d.4)$$

El calor disipado en la unidad de tiempo viene dado por:

$$Q = \frac{-\lambda S}{L} (T_B - T_F) \left. \frac{d\phi}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} (C_1 - C_2) \quad (2.1.d.5)$$

Tomando como referencias los valores de las constantes C_1 y C_2 obtenidos en (2.1.c.8) y (2.1.c.7), sustituyéndolos posteriormente en (2.1.d.5).

$$Q = \frac{\lambda S}{2L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right) - e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.d.6)$$

Agrupando convenientemente

$$Q = \frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{\sqrt{Bi} \sinh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \cosh(\sqrt{Bi})}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})} = \frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{\tanh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda \sqrt{Bi}}}{1 + \frac{\alpha L}{\lambda \sqrt{Bi}} \tanh(\sqrt{Bi})}$$

(2.1.d.7)

Simplificando en función del número adimensional de Biot

$$Q = \frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{\tanh(\sqrt{Bi}) + \frac{S\sqrt{Bi}}{PL}}{1 + \frac{S\sqrt{Bi}}{PL} \tanh(\sqrt{Bi})} = \left| \begin{array}{l} Bi = \frac{\lambda PL^2}{\lambda S} = \frac{\alpha 2aL^2}{\lambda ae} = \frac{2\alpha L^2}{\lambda e} - m^2 L^2 \\ \sqrt{Bi} = mL \quad ; \quad m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e}} \end{array} \right| \quad (2.1.d.8)$$

En definitiva se obtiene para el calor disipado en la unidad de tiempo que:

$$Q = \lambda S (T_B - T_F) m \frac{\tanh(mL) + \frac{\alpha}{\lambda m}}{1 + \frac{\alpha}{\lambda m} \tanh(mL)} \quad (2.1.d.9)$$

2.2.4 Aleta entre dos paredes a temperaturas distintas T_B y T_L .

La condición de contorno en el extremo T_L es e , para $\xi = 1$, y viene dada por:

$$x = L \quad ; \quad T = T_L \quad ; \quad \xi = \frac{x}{L} = 1 \quad (2.1.e)$$

Por lo tanto la ecuación para determinar la distribución de temperaturas vendrá dada por:

$$\phi(1) = \frac{T_\xi - T_F}{T_B - T_F} = C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}} = (1 - C_2) e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}} \quad (2.1.e.1)$$

Como $|C_1 = 1 - C_2|$, sustituyendo en (2.1.e.1) se obtiene

$$\phi(1) = \frac{T_\xi - T_F}{T_B - T_F} = (1 - C_2) e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}} \quad (2.1.e.2)$$

Agrupando convenientemente en (2.1.e.2) se obtiene:

$$\phi(1) = \frac{T_\xi - T_F}{T_B - T_F} = e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 (e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}}) = e^{-\sqrt{Bi}} + 2C_2 \text{Senh}(\sqrt{Bi}) \quad (2.1.e.3)$$

Despejando la constante C_2 en (2.1.e.3) se obtiene:

$$C_2 = \frac{\phi(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2 \text{Senh}(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.e.4)$$

Como $|C_1 = 1 - C_2|$, tomado el valor de C_2 de (2.1.e.4) se llega a:

$$C_1 = 1 - C_2 = 1 - \frac{\phi(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2\text{Senh}(\sqrt{Bi})} = \frac{e^{\sqrt{Bi}} - \phi(1)}{2\text{Senh}(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.e.5)$$

En las expresiones desde la (2.1.e) hasta la (2.1.e.5) las temperaturas T_B, T_F y T_L son conocidas y $\phi(1)$ es un dato también conocido.

La distribución de temperaturas viene dada por:

$$\phi(\xi) = \frac{e^{\sqrt{Bi}} - \phi(1)}{2\text{Senh}(\sqrt{Bi})} e^{-\sqrt{Bi}\xi} + \frac{\phi(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2\text{Senh}(\sqrt{Bi})} e^{\sqrt{Bi}\xi} \quad (2.1.e.6)$$

Agrupando convenientemente en (2.1.e.6) se llega a:

$$\phi(\xi) = \frac{e^{\sqrt{Bi}}(1-\xi) - \phi(1)e^{-\sqrt{Bi}\xi} + \phi(1)e^{\sqrt{Bi}\xi}(1-\xi)}{2\text{Senh}(\sqrt{Bi})} = \frac{\text{Senh}[\sqrt{Bi}(1-\xi)] + \phi(1)\text{Senh}(\xi\sqrt{Bi})}{\text{Senh}(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.e.7)$$

Para la configuración dada la cantidad de calor Q para cualquier valor de ξ viene dada por la siguiente relación:

$$Q = -\lambda S \frac{dT}{dx} = \frac{-\lambda S}{L} (T_B - T_F) \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \quad (2.1.e.8)$$

Agrupando convenientemente se obtiene que:

$$Q = \frac{-\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{-\cosh[\sqrt{Bi}(1-\xi)] + \phi(1)\cosh[\xi\sqrt{Bi}]}{\text{senh}(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.e.9)$$

Finalmente, en este caso particular, el calor disipado por la aleta va a ser igual al calor entrante por la pared que se encuentra a una temperatura T_B , menos el calor saliente por la pared a una temperatura T_L , es decir:

$$Q = Q_{\xi=0} = Q_{\xi=1} = \frac{-\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{\phi(1) - \cosh(\sqrt{Bi}) - \phi(1)\cosh(\sqrt{Bi}) + 1}{\text{senh}(\sqrt{Bi})} \quad (4.1.f)$$

Arreglando convenientemente en (2.1.f) se llega a:

$$Q = Q_{\xi=0} = Q_{\xi=1} = \frac{-\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{[1 - \cosh(\sqrt{Bi})][\phi(1) + 1]}{\sinh(\sqrt{Bi})} \quad (2.1.f)$$

2.3 Campo de aplicación de las aletas rectas de perfil uniforme.

Si se aplica la derivada de la cantidad de calor transferido con respecto a la derivada de la longitud de la aleta, y se tiene en cuenta además que esta derivada será igual a cero, o sea $dQ/dL = 0$, y posteriormente se introduce esta derivada en la relación (2.1.d.9), se llega a:

$$\frac{dQ}{dL} = \lambda S (T_B - T_F) m \frac{\frac{m}{\cosh^2(mL)} \left[1 + \frac{\alpha}{m\lambda} \tanh(mL) \right] - \left[\tanh(mL) + \frac{\alpha}{m\lambda} \right] \frac{\alpha}{m\lambda} \frac{m\alpha}{\cosh^2(mL)}}{\left[1 + \frac{\alpha}{\lambda m} \tanh(mL) \right]^2} = 0 \quad (2.1.f.2)$$

Un agrupamiento de variables en (2.1.f.2) proporciona:

$$1 + \frac{\alpha}{\lambda m} \tanh(mL) = \left(\tanh(mL) + \frac{\alpha}{\lambda m} \right) \frac{\alpha}{\lambda m} \quad ; \quad 1 = \left(\frac{\alpha}{\lambda m} \right)^2 = \frac{\alpha e}{2\lambda} \quad (2.1.f.3)$$

La condición (2.1.f.3) se cumple para cualquier valor de L , e indica las condiciones técnicas a tener en cuenta para colocar aletas sobre una superficie y el efecto que estas producen. Esta ecuación muestra además que si la resistencia térmica por unidad de superficie frontal de la aleta es menor que la resistencia térmica correspondiente a la convección, hay que colocar aletas, mientras que en el caso contrario, las aletas producen un efecto refrigerante.

Al sustituir este valor en la segunda derivada se obtiene un punto de inflexión, que se corresponde con una evacuación de calor del tubo sin aletas. Por tanto se puede decir que:

- 1- Cuando $\frac{\alpha e}{2\lambda} > 1$ resulta que la adición de aletas produce un efecto aislante o refrigerante, por cuanto el calor que se elimina es inferior al del tubo sin aletas, llegando a ser, incluso, un calor negativo que se interpreta como el que las aletas absorben calor del medio ambiente y lo transmiten al fluido (por ejemplo, el vaporizador de una máquina frigorífica)
- 2- Cuando $\frac{\alpha e}{2\lambda} = 1$ las aletas no producen ningún efecto, y es equivalente al tubo sin aleta.

- 3- Cuando $\frac{\alpha e}{2\lambda} < 1$ la adición de aletas produce un incremento del flujo de calor al fluido ambiente.

En los procesos de calefacción o de intercambio térmico, por razones de carácter económico, es preferible que la superficie primaria no posea superficies extendidas, a menos que se cumpla que $\frac{\alpha e}{2\lambda} \ll 1$. Otro criterio de amplia difusión, plantea que por razones de espacio o de resistencia mecánica las aletas no deben ser muy largas.

Es importante resaltar que en el uso de aletas cortas, para que tenga interés la disipación de calor se tiene que cumplir que:

$$\frac{\alpha e}{2\lambda} \leq \frac{1}{5} ; \quad \frac{P}{S} = \frac{2(a+e)}{ae} = \frac{2}{e} ; \quad \frac{\alpha S}{P\lambda} \leq \frac{1}{5} \quad (2.1.f.4)$$

Si no se cumplen las condiciones establecidas en (2.1.f.4) no es factible el uso de superficies extendidas. Para que una aleta sea eficaz, debe tener un espesor e muy pequeño y estar construida de un material que posea una elevada conductividad térmica.

Con todo lo explicado acá se considera importante dar tres conclusiones básicas basadas en relación a la efectividad de las superficies extendidas, que pueden ser tomadas como referencias en el diseño y selección de aletas.

- 1- La conductividad térmica λ del material de la aleta debe ser tan alta como sea posible. Por ello, no es coincidencia que las aletas estén hechas de metales, siendo los más comunes el cobre, el aluminio y el acero. Quizás las aletas que se usan con mayor amplitud están hechas de aluminio debido a su costo y peso bajos y a su resistencia a la corrosión.
- 2- La razón entre el perímetro y el área de la sección transversal de la aleta, P/S debe ser tan alta como sea posible. Este criterio lo satisfacen las aletas de placa delgada y las de espiga esbelta.
- 3- El uso de aletas es más efectivo en aplicaciones que comprenden un bajo coeficiente de transferencia de calor por convección. Por tanto, el uso de las aletas se justifica con más facilidad cuando el medio es un gas en lugar de un líquido y la transferencia de calor es

por convección natural en lugar de por convección forzada. Por lo tanto, no es coincidencia que en los intercambiadores de calor de líquido a gas, como el radiador de un automóvil, las aletas se coloquen en el lado del gas.

2.4 Perfil óptimo para una superficie extendida rectas y de perfil uniforme.

En ingeniería un interés que se persigue es conseguir un valor óptimo de la cantidad de calor cedida para una superficie Ω dada, por unidad de longitud de tubo. El espesor óptimo cumple adicionalmente que $dQ/de = 0$; para el caso de una aleta con su extremo aislado, se dispone de la siguiente ecuación:

$$Q = \lambda S \frac{(T_B - T_F)}{L} \sqrt{Bi} \tanh(\sqrt{Bi}) = \lambda S (T_B - T_F) m \tanh(mL) = \left| m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e}} \right| \quad (2.1.f.5)$$

Agrupando en (2.1.f.5)

$$Q = \lambda S \frac{(T_B - T_F)}{L} \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e}} \sqrt{Bi} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e}} L\right) = \left| \begin{array}{l} S = ae \quad ; \quad a = 1 \\ S = e \quad ; \quad \Omega = Le \end{array} \right| = (T_B - T_F) \sqrt{2\alpha\lambda e} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e}} \Omega\right) \quad (2.1.f.5)$$

Para una aleta cuya masa sea fija o haya sido fijada previamente, entonces la superficie Ω es constante, por lo que esta ecuación indica la variación del flujo térmico en función del espesor e de la aleta. Derivando la cantidad de calor obtenida en (2.1.f.5) con respecto al espesor e de la aleta, y posteriormente igualando a cero, se obtiene entonces:

$$\frac{dQ}{de} = (T_B - T_F) \left[\frac{2\alpha\lambda}{2\sqrt{2\alpha e\lambda}} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega\right) - \frac{\sqrt{2\alpha e\lambda}}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega\right)} \frac{\Omega}{2\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}}} \frac{6\alpha}{\lambda e^4} \right] = 0 \quad (2.1.f.6)$$

Aplicando propiedades de funciones trigonométricas:

$$\tanh\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega\right) = 3 \left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega \right) \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega\right) \quad (2.1.f.7)$$

Como $\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega = \sqrt{Bi}$, sustituyendo en (2.1.f.7)

$$\tanh(\sqrt{Bi}) = 3(\sqrt{Bi}) \operatorname{sech}^2(\sqrt{Bi}) \quad (2.1.f.8)$$

Resolviendo la ecuación (2.1.f.8) se obtiene el número adimensional de Biot óptimo, el cual va a ser igual a 2,0142, dado con 4 cifras decimales por lo que el espesor y la longitud óptima serán:

$$\left. \begin{aligned} m^2 &= \frac{2\alpha}{\lambda e} \\ m^2 &= \frac{Bi}{L^2} = \frac{Bi e^2}{\Omega^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2\alpha}{\lambda e^3} = \frac{Bi e^2}{\Omega^2} \quad ; \quad e_{opt} = \sqrt[3]{\frac{2\alpha\Omega^2}{\lambda Bi_{Opt}}} = 0,9976 \sqrt[3]{\frac{\alpha\Omega^2}{\lambda}} \quad (2.1.f.9)$$

y la longitud óptima se determina entonces como:

$$L_{Opt} = \frac{\Omega}{e_{opt}} = \frac{\Omega}{0,9976 \sqrt[3]{\frac{\alpha\Omega^2}{\lambda}}} = 1,0023 \cdot \sqrt[3]{\frac{\lambda\Omega}{\alpha}} \quad (2.1.g)$$

Por lo general son conocidas las constantes físicas y las condiciones de funcionamiento de la aleta, entre ellas $\alpha, \lambda, Q, (T_B - T_F)$, por lo que se puede obtener otra formulación para las dimensiones óptimas, en función de estos parámetros y del número adimensional óptimo de Biot. Esta formulación, para el caso de la cantidad de calor viene dada por:

$$Q = (T_B - T_F) \cdot \sqrt{2\alpha e \lambda} \cdot \tanh(\sqrt{Bi_{Opt}}) \quad (2.1.g.1)$$

Despejando en (2.1.g.1) el espesor, entonces se puede tener el espesor óptimo para la máxima cantidad de calor transferida, lo cual quedará entonces dado por:

$$e_{opt} = \left(\frac{Q}{(T_B - T_F)} \right)^2 \frac{1}{2\alpha\lambda \tanh^2(\sqrt{Bi_{Opt}})} = \left(\frac{Q}{(T_B - T_F)} \right)^2 \frac{0,63203}{\alpha\lambda} \quad (2.1.g.2)$$

Si se igualan las expresiones (2.1.g.2) y (2.1.f.9), se obtienen las ecuaciones que se emplean en el diseño de aletas rectas de espesor constante, empleando para ello el mínimo de material.

$$e_{opt} = \left(\frac{Q}{(T_B - T_F)} \right)^2 \frac{0,63202}{\alpha\lambda} = 0,9976 \sqrt[3]{\frac{\alpha\Omega^2}{\lambda}} \quad (2.1.g.3)$$

La longitud óptima entonces como se aprecia en (2.1.g.3) viene dada acá como dos dependencias:

1- La primera es una función de la cantidad de calor transferido, relacionado a la vez con las temperaturas en la base T_B , del fluido circundante a la superficie extendida T_F , una constante que depende del número adimensional óptimo de Biot, determinada en (2.1.g.2), del coeficiente pelicular de transferencia de calor α de la aleta al fluido circundante y por último depende de la conductividad térmica λ del material de la aleta. Esta primera dependencia viene regida por

$$e_{opt} = \frac{0,63202}{\alpha\lambda} \left(\frac{Q}{(T_B - T_F)} \right)^2 \quad (2.1.g.3.a)$$

2- La segunda es una función del cuadrado de la superficie de intercambio térmico Ω , una constante que depende del número adimensional óptimo de Biot, determinada en (2.1.f.9), del coeficiente pelicular de transferencia de calor α de la aleta al fluido circundante y por último depende de la conductividad térmica λ del material de la aleta. Todas las variables exceptuando la constante están sometidas a la potencia 1/3. Esta segunda dependencia viene regida por

$$e_{opt} = 0,9976 \sqrt[3]{\frac{\alpha \Omega^2}{\lambda}} \quad (2.1.g.3.b)$$

Si (2.1.g.3.b) se iguala a (2.1.g.3.a), tal como fue mostrado en (2.1.g.3), y se despeja la superficie Ω , entonces se obtiene la superficie óptima para la aleta, la cual viene dada por:

$$\Omega_{opt} = \frac{0,5048}{\alpha^2 \lambda} \left(\frac{Q}{(T_B - T_F)} \right)^3 \quad (2.1.g.4)$$

En (2.1.g) fue visto que en una superficie extendida rectas de espesor constante, se cumple que $L_{opt} = \Omega/e_{opt}$, por tanto combinando (2.1.g.4) y (2.1.g.3.a) se obtiene el valor de L_{opt} buscado, o sea la longitud óptima de la superficie extendida. Esta viene dada por:

$$L_{opt} = \frac{Q}{(T_B - T_F)} \frac{0,7979}{\alpha} \quad (2.1.g.5)$$

Detalles importantes y en muchas ocasiones obviados, son los siguientes:

1- Las superficiales extendidas nunca deben ser utilizadas en los procesos de intercambio térmico cuando el coeficiente pelicular de transferencia de calor posea valores elevados.

- 2- Para aletas normales en las que se cumple que $e < 1,5mm$, construidas con materiales corrientes, como el acero o el aluminio, no se recomienda el empleo de superficies extendidas si el fluido es un líquido sometido a convección forzada o un vapor que se condensa, ya que en estas condiciones es muy fácil encontrar coeficientes peliculares de transferencia de calor $\alpha > 5000 W/(m^2 \cdot ^\circ C)$, el cual proporciona valores de $\frac{\alpha e}{2\lambda}$ muy cercanos a la unidad, por lo que el empleo de las aletas sería antieconómico. .
- 3- Con aletas de dimensiones normales se logra un intercambio térmico muy efectivo entre la superficie y el gas que le rodea
- 4- Cuando el proceso de intercambio térmico por convección es realizado en un medio fluido gaseoso, es frecuente encontrar coeficientes peliculares de transferencia de calor del orden de 50 a 120 $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$, los cuales permiten valores de $\frac{\alpha e}{2\lambda}$ muy pequeños , por lo que el empleo de aletas ejercerá en este caso un efecto conveniente en el proceso de intercambio térmico, por lo que es común que se empleen aletas en:
 - Motores enfriados por aire
 - Precalentadores de aire y economizadores de calderas
 - Serpentines de calentamiento y enfriamiento de los acondicionadores de aire
 - Radiadores de automóviles
 - Intercambiadores de calefacción agua-aire, etc.
 - Sistemas de condensación seca (aeroenfriadoras, Air Cooled Condenser, etc.)

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

3.1 Introducción.

El objetivo de este capítulo es realizar el diseño de un sistema de condensación utilizando condensadores enfriados por aire (ACC) para plantas de potencia de 20 MW en Cuba.

En este apartado se realiza una evaluación térmica de un ACC que opera con estructuras tradicionales y en caso de una operación con las estructuras propuestas en el presente trabajo de diploma. Todos los cálculos fueron desarrollados con el uso del software *Engineering Equations Solver* (EES) y posteriormente se realiza un análisis detallado de estos resultados donde se efectúan variaciones para determinar el diseño óptimo de dicho equipo.

3.2 Hipótesis de cálculo.

Todos los cálculos realizados en el diseño del aerocondensador toman como ciertas las siguientes hipótesis de cálculo, las cuales ayudarán a simplificar los cálculos:

- 1 Pérdidas con el entorno despreciables.
- 2 El calor específico de los fluidos se considera constante.
- 3 La resistencia térmica calculada se supondrá uniforme a lo largo de todo el intercambiador.
- 4 El coeficiente global de transferencia de calor, U , se considera constante a lo largo del condensador.
- 5 Las temperaturas son uniformes en la dirección del flujo.
- 6 En los recorridos paralelos los gastos y las áreas de transferencia son iguales.
- 7 Se supondrá transferencia de calor en estado estacionario.
- 8 Los flujos máxicos se distribuyen uniformemente por todo el aerocondensador.

3.3 Propiedades de los tubos.

Los tubos escogidos presentan una gran área de transferencia de calor gracias a su superficie aleteada, lo que ayuda a reducir en gran medida las dimensiones del aerocondensador. Hay varios tipos de tubos aleteados en el mercado dependiendo del uso que se les vaya a dar. En el caso concreto de un aerocondensador lo más adecuado es utilizar tubos de aleta alta, [52].

Después de realizar un análisis de los tubos aleteados de aleta alta, se determina que el más adecuado es el tubo de aletas extruidas de aluminio, lográndose una sólida unión mecánica con buenas propiedades de transferencia de calor, las aletas contienen un 40 % más de aluminio, de manera que el tubo está perfectamente protegido contra la corrosión atmosférica. Su diseño es muy robusto, posee una alta resistencia a daños mecánicos, y fácil de limpiar con vapor o agua. Los tubos se pueden fabricar de diferentes materiales según las necesidades, además puede utilizarse con prácticamente todos los agentes químicos agresivos. La temperatura máxima de servicio es hasta 300°C, [52].

En la figura 3.1 se esquematiza esta unión. Además, este tipo de tubos son ampliamente utilizados debido, a parte de sus características técnicas, a que su coste es relativamente bajo comparado con otros tubos de similares prestaciones.

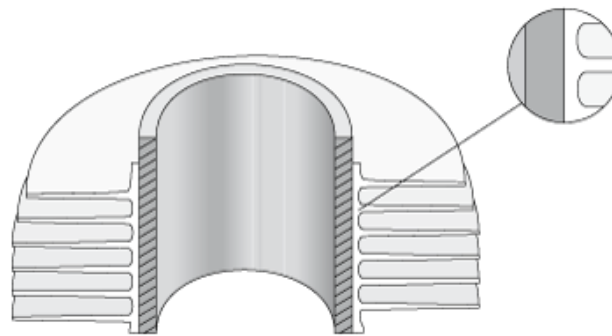


Figura 3.1 Tubo de aleta alta extruida

Fuente: Camaraza [52].

En la tabla 3.1 se encuentran recogidas las dimensiones de los tubos, mientras en la figura 3.2 es mostrado un esquema de un tubo del ACC, [54].

Tabla 3.1 Dimensiones de los tubos de aleta alta extruida

Dimensiones de los tubos aleteados	
Diámetro exterior del tubo, D_e	1" = 25,4 mm
Altura de la aleta, h_f	5/8" = 15,8 mm
Número de aletas por unidad de longitud, N_f	11 aletas/ pulgada = 433 aletas/metro
Longitud del tubo, L	376" = 9,55 m
Espesor del tubo, e_t	1/8" = 3,18 mm
Espesor de la aleta, e_f	0,279 mm

Fuente: Camaraza *et al.* [54]

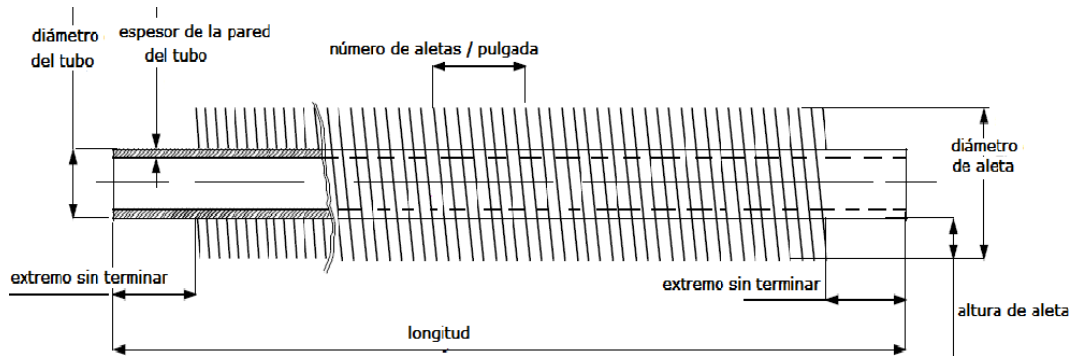


Figura 3.2 Esquema del tubo aleteado

Fuente: Camaraza *et al.* [54]

En este trabajo, se selecciona como material del tubo y la aleta, según las recomendaciones de *Cherry Metal* 2019, el aluminio 1060-O, [55]. A continuación, en la tabla 3.2, se muestran las propiedades de dicho material:

Tabla 3.2 Propiedades térmicas del Aluminio 1060-O

Densidad, ρ_{Al}	2 705 kg/m ³
Calor específico, Cp_{Al}	900 J/(kg · K)
Conductividad térmica, k_{Al}	234 W/(m · K)

Fuente: Camaraza [55]

3.4 Propiedades de los fluidos de trabajo.

Antes de dar inicio con los cálculos, se debe determinar las propiedades de los fluidos de trabajo: por un lado, el vapor de agua a condensar que proviene de la salida de la turbina y por otro, el aire utilizado como fluido refrigerante.

3.4.1 Propiedades del vapor de agua.

Las propiedades del vapor de agua que sale de la turbina, se determinan a la presión de condensación de dicha turbina, la cual corresponde a 20 kPa, teniendo en cuenta este dato y la calidad del vapor, que es de 98 %, en la tabla 3.3 se resumen las propiedades termofísicas del agente de trabajo.

Tabla 3.3 Propiedades de fluido interno de trabajo

Temperatura de condensación, T_c	60,05°C
Entalpía del líquido, h_f	251 300 J/kg
Entalpía del vapor, h_g	2 562 kJ/kg
Entalpía de vaporización, h_{fg}	2 310 kJ/kg
Calor específico del agua, Cp_l	4 183 kg/(m · s)
Viscosidad del agua, μ_l	0,0004662 W/(m ² · K)
Conductividad térmica del agua, k_l	0,641 W/(m · K)
Densidad del agua, ρ_l	983,1 kg/m ³
Densidad del vapor de agua, ρ_v	0,1332 kg/m ³

3.4.2 Propiedades del aire de entrada al aerocondensador.

También es necesario determinar las propiedades del fluido externo (aire) a la entrada del ACC. Estas propiedades son determinadas en función de la temperatura, la cual se escogerá teniendo en cuenta el análisis de las temperaturas registradas en Matanzas durante el año 2019. Se toma como referencia los valores de temperatura registrados en la provincia de Matanzas, debido a que este territorio está incluido dentro del proyecto que propone la construcción de 25 bioeléctricas hasta el 2030, a lo largo de todo el país.

De acuerdo con los datos obtenidos del sitio web *Weather Spark* (2019), en Matanzas, los veranos son muy calientes, opresivos y nublados y los inviernos son cortos, cómodos, húmedos, secos, ventosos y mayormente despejados. Durante el transcurso del año, la temperatura generalmente varía de 17 a 32°C y rara vez baja a menos de 13°C o sube a más de 33°C.

La temporada calurosa duró 3,7 meses, del 5 de junio al 25 de septiembre, y la temperatura máxima promedio diaria fue de más de 31°C. El día más caluroso del año fue el 7 de agosto, con una temperatura máxima promedio de 35,2°C y una temperatura mínima promedio de 23°C. La temporada fresca duró 2,8 meses, del 3 de diciembre de 2018 al 25 de febrero de 2019, y la temperatura máxima promedio diaria fue de menos de 27°C. El día más frío del año fue el 29 de enero, con una temperatura mínima promedio de 17°C y máxima promedio de 26°C. En la tabla 3.4 se expone las temperaturas para cada día del año 2019 para la estación meteorológica Colón, provincia de Matanzas.

Observándose el gráfico 3.1, se puede apreciar cómo la temperatura media se mantuvo por debajo de los 30°C durante todo el año. En cuanto a la temperatura máxima, se sobrepasó los 30°C durante los meses de verano, la mayoría de ellos entre los días 151 y 262 correspondiente al periodo del 31 de mayo al 21 de septiembre. A modo de ilustración, en la tabla 3.5 se muestra la temperatura registrada para los días más caluroso y frío respectivamente, correspondiente a los días 7 de agosto y 29 de enero del año 2019, mientras en los gráficos 3.2 y 3.3 es la dada la curva estacional de temperatura para cada día.

Tabla 3.4 Temperaturas de la estación INSMET Colón, provincia Matanzas en 2019

Mes	Día	Día del año	Temperatura °C		
			Media	Mínima	Máxima
Enero	1	1	22	18	26
	14	14	22	18	26
	31	31	21,5	17	26
Febrero	1	32	21,5	17	26
	11	42	22,5	18	27
	28	59	22,5	18	27
Marzo	1	60	22,5	18	27
	11	70	23	18	28
	21	80	23,5	19	28
	31	90	24	19	29
Abril	1	91	24	19	29
	11	101	24,5	20	29
	21	111	25	20	30
	30	120	25,5	21	30
Mayo	1	121	25,5	21	30
	11	131	25,5	21	30
	21	141	26	22	30
	31	151	26,5	22	31
Junio	1	152	27	23	31
	11	162	27	23	31
	21	173	27	23	31
	30	182	27	23	31
Julio	1	183	27	23	31
	11	193	27,5	23	32
	21	203	27,5	23	32
	31	213	27,5	23	32
Agosto	7	220	27,5	23	32
	21	231	27,5	23	32
	31	241	27,5	23	32
Septiembre	1	242	27,5	23	32
	11	252	27	23	31
	21	262	27	23	31
	30	271	26,5	23	30
Octubre	1	272	26,5	23	30
	11	283	26	22	30
	21	293	25,5	22	29
	31	303	24,5	21	28
Noviembre	1	304	24,5	21	28
	11	314	24	20	28
	21	324	23,5	20	27
	31	334	23	19	27
Diciembre	1	335	23	19	27
	11	345	23	19	27
	21	355	22	18	26
	31	365	22	18	26
Temp. Media			24,96	20,73	29,18

En el gráfico 3.1 se expone de manera más detallada, las temperaturas registradas:

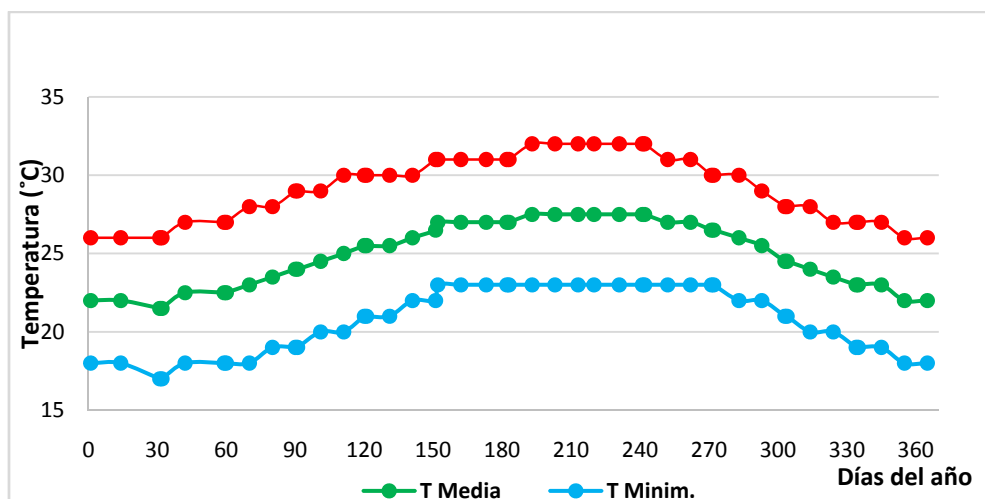


Gráfico 3.1 Temperaturas registradas en la provincia de Matanzas en el año 2019

Tabla 3.5 Temperaturas respectivas para los días calurosos y frío

Día caluroso 7/08/2019		Día frío 29/01/2019	
Hora	Temperatura °C	Hora	Temperatura °C
1	25,6	1	19,55
2	25	2	18,75
3	24,8	3	18,5
4	24,35	4	18,25
5	24	5	18,24
6	23,75	6	18,05
7	24	7	18
8	24,75	8	18,24
9	25	9	20
10	27	10	21
11	28,5	11	22,75
12	30	12	24
13	30,25	13	25
14	30,75	14	25,5
15	32	15	26
16	31,25	16	25,75
17	30,85	17	24,6
18	30	18	24
19	28,75	19	23,25
20	28,2	20	22
21	27,6	21	21,7
22	26,35	22	21
23	26,1	23	20,65
24	26	24	20

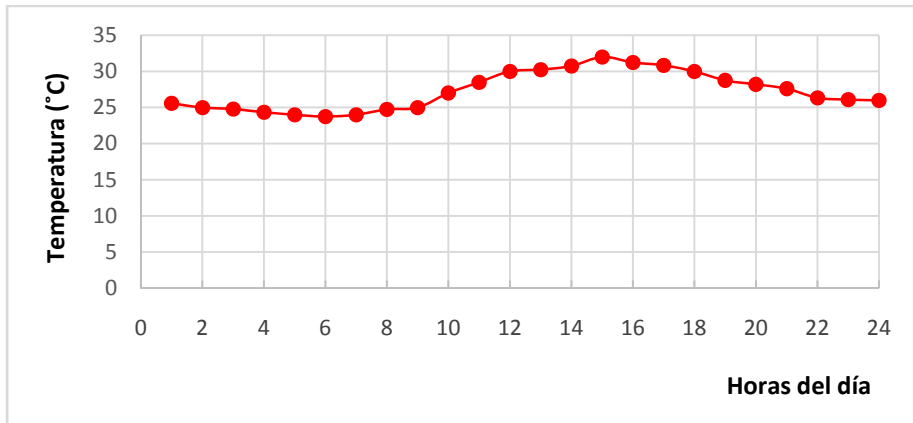


Gráfico 3. 1 Temperatura en Matanzas, 9 de agosto de 2019

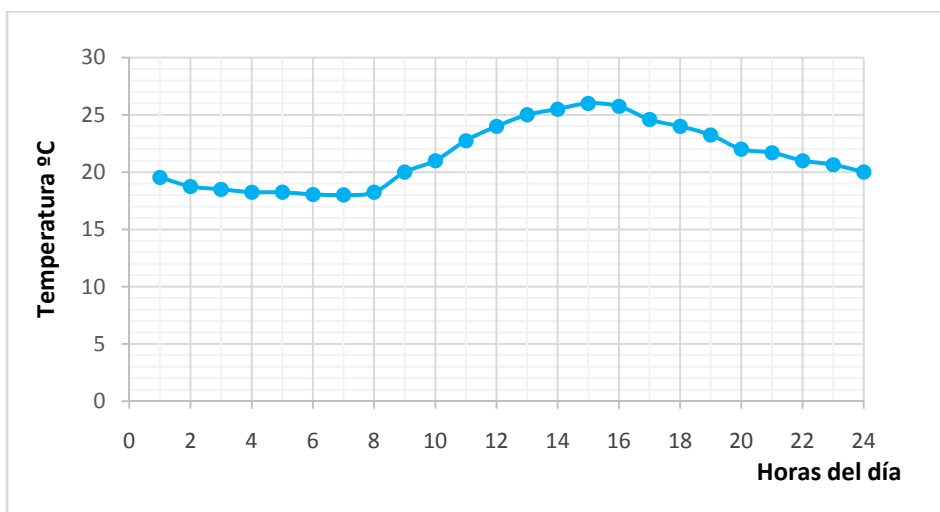


Gráfico 2.3 Temperatura en Matanzas, 29 de enero de 2019

Para evitar sobredimensionar en exceso el diseño, lo cual elevaría los costes, se escoge la temperatura media anual más caliente correspondiente a 29,18°C, como temperatura de diseño de entrada del aire al condensador.

Una vez determinada la temperatura, las propiedades se determinan directamente a partir de las tablas de propiedades del aire seco a presión atmosférica (véase la tabla 3.6).

Tabla 3. 6 Propiedades del aire seco a 29,18 °C y presión atmosférica

Propiedades del aire seco a 29,18 °C (302,18 K) y presión atmosférica	
Temperatura del aire, T_{airein}	29,18°C
Densidad del aire, ρ_{aire}	1,167 kg/m ³
Calor específico del aire, Cp_{aire}	1007 J/(kg · K)
Conductividad térmica del aire, k_{aire}	0,02582 W/(m · K)
Viscosidad del aire, μ_{aire}	0,00001868 kg/(m · s)
Número de Prandtl, Pr_{aire}	0,71

3.5 Cálculos y resultados.

La metodología utilizada en el cálculo del aerocondensador se basa en el flujo de calor que habrá que disipar en la superficie de intercambio. Para ello se utiliza el método de la Diferencia de Temperatura Media Logarítmica.

3.5.1 Cálculo de la potencia térmica a disipar.

Para determinar el calor a disipar por el ACC, se hace uso de la ecuación de balance de calor, obteniéndose:

$$Q_{agua} = m_{vapor} \cdot (h_{cond} - h_f) = 4,31 \cdot (2562 - 251,3) = 9957,7 \text{ kW}$$

3.5.2 Cálculo del área de transferencia de calor.

Para calcular el área de transferencia de calor, A, se comenzará con una primera estimación aproximada de la temperatura de salida del aire del condensador y el coeficiente global de transferencia de calor. Más adelante se realizará un número de iteraciones para obtener los valores reales tanto de estos dos parámetros como del área final. Para determinar la temperatura de salida del aire se hace uso del criterio de temperatura media.

$$T_{sal,aire} = \frac{(29,18 + 60,05)}{2} = 44,61 \text{ °C}$$

Obteniéndose un valor inferior a la temperatura de saturación del vapor, cumpliendo así con las leyes de la termodinámica. Con esto, ya se puede calcular la variación de temperatura media logarítmica, de forma que:

$$\Delta T_2 = 60,05 - 29,18 = 30,87 \text{ °C}$$

$$\Delta T_1 = 60,05 - 44,61 = 15,43 \text{ °C}$$

$$LMTD = \frac{(30,87 - 15,43)}{\ln\left(\frac{30,87}{15,43}\right)} = 22,26 \text{ °C}$$

En cuanto a la estimación del coeficiente global de transferencia de calor, U, se buscó en la literatura valores típicos encontrándose que U puede tener valores desde 25 y hasta 50 W/(m² · K), en este caso se selecciona un valor de 25 W/(m² · K). Con estos datos se obtiene un área externa de transferencia de calor provisional, A, con la que se comenzarán los cálculos e iteraciones:

$$A = \frac{9\,957,7 \cdot 10^3}{25 \cdot 22,26} = 17\,890 m^2$$

El número de aletas totales por tubo:

$$N_{ftubo} = 433 \cdot 9,55 = 4\,135 \text{ aletas}$$

Diámetro equivalente interior del tubo:

$$D_i = 0,0254 - 2 \cdot 0,00318 = 0,01904 m$$

El área de transferencia de calor de cada tubo desnudo sería:

$$A = \pi D_i L = \pi \cdot 0,01904 \cdot 9,55 = 0,5712 m^2$$

El área de una aleta se determina como:

$$A_f = \pi(D_e + 2h_f)e_f + 2\pi \left[\left(h_f + \frac{D_e}{2} \right)^2 - \left(\frac{D_e}{2} \right)^2 \right]$$

$$A_f = 3,1416(0,0254 + 2 \cdot 0,0158) \cdot 0,000279 + 2 \cdot 3,1416 \left[\left(0,0158 + \frac{0,0254}{2} \right)^2 - \left(\frac{0,0254}{2} \right)^2 \right]$$

$$A_f = 0,00414 m^2$$

El área de transferencia de calor de un tubo aleteado será:

$$A_e = \pi D_e (L - e_f N_{ftubo}) + A_f N_{ftubo}$$

$$A_e = 3,1416 \cdot 0,0254 \cdot (9,55 - 0,000279 \cdot 4135) + 0,00414 \cdot 4135 = 17,79 [m^2]$$

$$A_e = \pi \cdot 0,0254 \cdot (9,55 - 0,000279 \cdot 4\,135) + 0,00414 \cdot 4\,135 = 17,79 m^2$$

Con el área exterior de un tubo y el área total externa de transferencia de calor, se obtiene entonces, el número de tubos requeridos.

$$N_t = \frac{17\,890}{17,79} = 1006 \text{ tubos}$$

3.5.3 Cálculo del coeficiente de transferencia de calor en el interior de los tubos.

El componente principal del flujo interno es el coeficiente de transferencia de calor de dos fases. Para calcular la transferencia de calor en dos fases, por su simplicidad se utiliza la ecuación de Chato a sabiendas que posee un error medio de valor significativo. En primer lugar, el área total de la sección transversal se calcula teniendo en cuenta todas las entradas de tubos donde entra el vapor, o sea:

$$A_c = 1006 \cdot \left[3,1416 \cdot \frac{0,01904^2}{4} \right] = 0,2863 m^2$$

A continuación, se calcula la tasa de flujo másico por área para cada tubo:

$$G_s = \frac{4,31}{0,2863} = 15,05 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$$

Luego, los respectivos números de Reynolds serán:

$$\text{Re} = \frac{D_i G_s}{\mu_l} = \frac{0,01904 \cdot 15,05}{0,0004662} = 614,7$$

A continuación, el coeficiente de transferencia de calor de dos fases se calcula utilizando la ecuación desarrollada por Chato:

$$h_{TP} = 0,555 \left[\frac{\rho_l (\rho_l - \rho_v) g k_l^3 h'_{fg}}{\mu_l D_i (T_g - T_w)} \right]^{1/4}$$

$$h_{TP} = 0,555 \cdot \left[\frac{983,1 \cdot (983,1 - 0,1332) \cdot 8,496 \cdot 0,641^3 \cdot (2310 + \frac{3}{8} \cdot 4,183 \cdot (60,05 - T_w))}{0,0004662 \cdot 0,01904 \cdot (60,05 - T_w)} \right]^{1/4} = 14967 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

El término gravedad corregida se obtiene a partir del ángulo de inclinación de los tubos con respecto a la línea horizontal, o sea:

$$g = 9,81 \cdot \text{sen}(60^\circ) = 8,496 \text{ m}/\text{s}^2$$

La temperatura de la superficie del tubo es desconocida. Teniendo en cuenta que debe tomar valores cerca de la temperatura de saturación del líquido, se realiza un análisis paramétrico de la ecuación de Chato, (véase la tabla 3.7) para determinar el valor de dicha temperatura, (véase la figura 3.4). A los efectos de esta investigación se asume para el coeficiente de transferencia de calor por convección, un rango entre 2 500 y 100 000 $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

Tabla 3.7 Análisis paramétrico de la ecuación de Chato

Iter.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h_{TP}	7 237	11 102	14 967	18 832	22 698	26 563	30 428	34 293	38 158	42 023	45 888
T_w	40,32	56,52	58,98	59,62	59,84	59,94	59,98	60,01	60,02	60,03	60,03
T_c	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05
Itera.	12	13	14	15	16	17	18	18	20	21	22
h_{TP}	49 753	53 619	57 484	61 349	65 214	69 079	72 944	76 809	80 674	84 540	88 405
T_w	60,04	60,04	60,04	60,04	60,04	60,04	60,04	60,04	60,04	60,04	60,04
T_c	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05	60,05
Itera.	23	24	25								
h_{TP}	92 270	96 135	100 000								
T_w	60,04	60,05	60,05								
T_c	60,05	60,05	60,05								

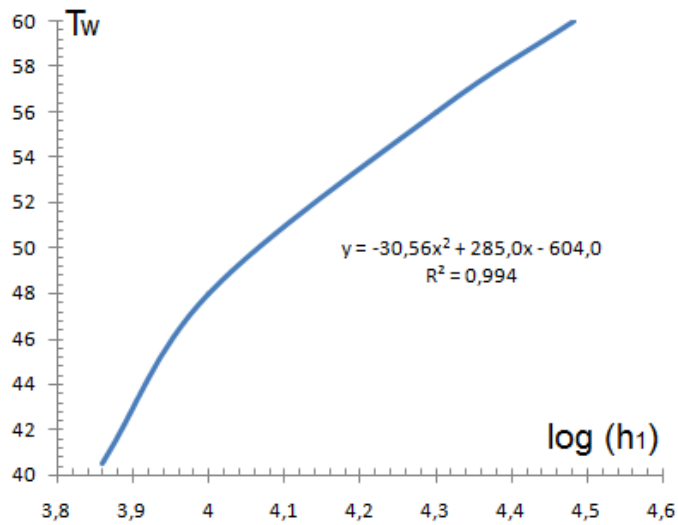


Gráfico 3.4 Comportamiento de T_w al variar el coeficiente de convección interno (h_{TP})

En el gráfico 3.4 describe el comportamiento de la temperatura de la superficie en el interior de los tubos al variar el coeficiente de convección interno.

Se puede apreciar, como la temperatura de la superficie aumenta hasta alcanzar el valor de la temperatura de condensación del vapor a la presión correspondiente, a medida que aumenta el coeficiente de convección interna, trayendo consigo que al ocurrir esto, la ecuación de Chato se indefine y por tanto el coeficiente de convección interno aumentaría hasta alcanzar valores infinitos, atendiendo a esto, se toma como temperatura de la superficie interna de los tubos un valor de $58,98^\circ\text{C}$ correspondiéndole a esta un valor del coeficiente de transferencia de calor en el interior de los tubos igual a $h_{TP} = 14967 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

3.5.4 Cálculo del coeficiente de transferencia de calor exterior.

A partir de la correlación de Grimison, se determina el número de Nusselt para haces de tubos compuestos de 10 o más líneas ($N_L \geq 10$):

$$N_u = 1,13 C_1 Re_D^m Pr_{aire}^{1/3}$$

$$N_u = 1,13 \cdot 0,46 \cdot 10 \cdot 0,71^{0,56} \cdot 0,71^{(1/3)} = 80,64$$

Para calcular el número de Reynolds en el exterior de los tubos primero es necesario conocer la velocidad del aire. A partir de lo recomendado en la literatura [54], se escoge una velocidad de aire de 3,9 m/s.

A continuación, se determina el número de Reynolds en el exterior de los tubos:

$$R_{eD} = \frac{1,167 \cdot 6,309 \cdot 0,0254}{0,00001868} = 10013$$

La velocidad máxima, es la correspondiente a la sección más estrecha del paquete de tubos, aplicando el método de Isachienko, [54], o sea nte:

$$V_1 = \frac{0,06653}{2 \cdot (0,06653 - 0,0254)} \cdot 3,5 = 3,154 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{0,06653}{(0,06653 - 0,0254)} \cdot 3,5 = 6,309 \text{ m/s}$$

En este caso, $V_1 < V_2$, entonces:

$$V_{\max} = V_2 = 6,309 \text{ m/s}$$

Los parámetros S_L/D_e , S_T/D_e y S_D se calculan a partir del uso de las ecuaciones 2.27, 2.28 y 2.29 respectivamente, el valor de S_f se asume igual 0,009525 según recomendaciones:

$$S_T = 0,00254 + 2 \cdot 0,0158 + 0,009525 = 0,06653 \text{ m} \rightarrow \frac{S_T}{D_e} = 2,619 \text{ m}$$

$$S_L = 0,06653 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,05761 \text{ m} \rightarrow \frac{S_T}{D_e} = 2,268 \text{ m}$$

$$S_D = \left[0,05761^2 + \left(\frac{0,06653}{2} \right)^2 \right]^{0,5} = 0,06653 \text{ m}$$

Con estos resultados, en [52] se obtienen los valores de C_1 y m , los cuales son:

$$C_1 = 0,46$$

$$m = 0,56$$

La ecuación de Griminson es útil para un número de filas de tubos mayor que 10, en este trabajo se utiliza un número de filas igual a 4 como se recomienda en la literatura, por lo tanto el valor obtenido debe ser corregido por un coeficiente C_2 el cual también depende de la configuración de los tubos y su disposición geométrica, [52].

Para un valor de 4 el número de filas, C_2 toma el valor de 0,89.

$$N_{u(N_L \leq 10)} = 0,89 \cdot 68,18 = 71,77$$

Finalmente, el coeficiente de calor por convección externa será:

$$h_0 = \frac{71,77 \cdot 0,02582}{0,0254} = 72,96 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

3.5.5 Cálculo del rendimiento de las aletas.

Uno de los factores importantes a tener en cuenta en el cálculo del coeficiente global de transferencia de calor es el rendimiento de las aletas y la superficie aleteada de los tubos.

Para determinar la eficiencia de aletas anulares de perfil rectangular, se acude a la gráfica de Smith, [54]. Para ello es necesario acudir a una serie de relaciones, las cuales se calculan a continuación:

La relación de radios viene dada por:

$$\frac{\frac{D_e + e_f}{2} + h_f}{r_1} = \frac{0,5 \cdot (0,0254 + 0,000279) + 0,0158}{0,0127} = 2,255$$

La longitud de aleta corregida será:

$$L_c = L + \frac{e_f}{2} = 0,0158 + \frac{0,000279}{2} = 0,01594m^2$$

El área de perfil de aleta corregida

$$A_p = L_c \cdot e_f = 0,01594 \cdot 0,000279 \approx 4,447 \cdot 10^{-6} m^2$$

Y el término de proporción de efectividad de la aleta

$$L_c^{3/2} \cdot \left(\frac{h}{k_{tubo} A_p} \right)^{1/2} = (0,01594)^{3/2} \cdot \left(\frac{61,69}{234 \cdot 4,45 \cdot 10^{-6}} \right)^{1/2} = 0,4898 \approx 0,49$$

Con estos resultados, se puede pasar a determinar la eficiencia de una aleta $\eta_f = 83\%$, a partir de la figura mostrada (véase el gráfico 3.4).

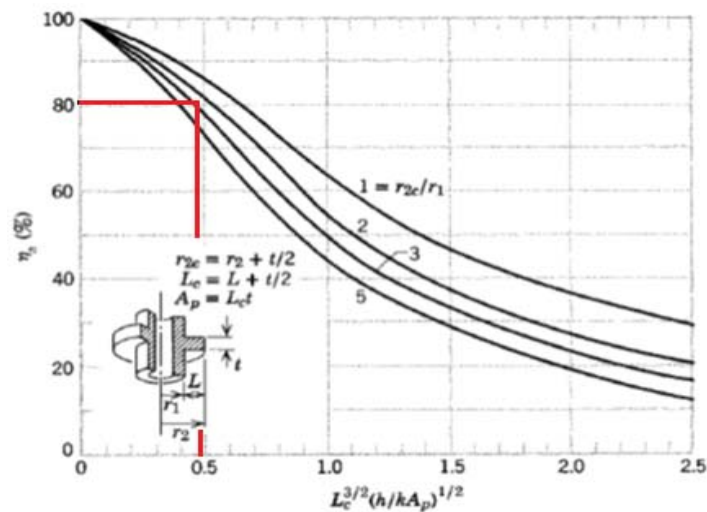


Gráfico 3.4 Representación de la eficiencia de una aleta

Con la eficiencia de una aleta ya se puede conocer el rendimiento de toda la superficie, [54].

$$\eta_w = 1 - \frac{N_{ftubo} \cdot A_f}{A_e \cdot N_t} (1 - \eta_f) = 1 - \frac{4135 \cdot 0,00414}{17,79 \cdot 629} (1 - 0,83) = 0,9997 \approx 1$$

Al haber un número tan elevado de tubos y un área de transferencia de calor tan grande es lógico que el rendimiento de la superficie aleteada sea prácticamente del 100 %.

3.5.6 Factores de ensuciamiento.

Pasado un cierto tiempo operando, las superficies de transferencia de calor de un condensador, o intercambiador de calor en general, pueden verse cubiertas con partículas procedentes de los fluidos o del medio. También es muy habitual que estas superficies se oxiden como resultado de la interacción entre los fluidos y el material usado para la construcción del aparato. En cualquier caso, la capa formada representa una resistencia adicional al flujo de calor y tiene como resultado una reducción del rendimiento.

El efecto total se representa mediante un factor de incrustación, R, obtenido experimentalmente y que, en el caso del vapor de agua, que circula por el interior de los tubos [54], se corresponde con $R_{f,i} = 0,0002 (m^2 \cdot K)/W$, en cambio, el aire que circula por el exterior de los tubos, presenta un factor de incrustación de $R_{f,o} = 0,0004 (m^2 \cdot K)/W$. Estos factores deben incluirse como una resistencia térmica más en el cálculo del coeficiente global de transferencia de calor.

3.5.7 Cálculo del coeficiente global de transferencia de calor.

Con los cálculos realizados en apartados anteriores ya se dispone de todo lo necesario para la obtención del coeficiente global de transferencia de calor, que resulta:

$$U = \left[\frac{1}{1 \cdot 61,69} + \frac{17,79 \cdot \ln\left(\frac{0,0254}{0,01904}\right)}{2 \cdot \pi \cdot 9,55 \cdot 234} + \frac{0,0004}{1} + \left(\frac{1}{14967} + 0,0002\right) \cdot \frac{17,79}{0,5712} \right]^{-1}$$

$$U = 38,61 W / (m^2 \cdot K)$$

Este coeficiente resulta muy diferente al usado inicialmente, $U_0 = 38,61 W / (m^2 \cdot K)$, por lo que será necesario iterar hasta que los valores coincidan o se acerquen suficientemente.

3.5.8 Iteraciones.

Al principio de los cálculos se utilizaron una temperatura de salida del aire, T_{aireout} , y un coeficiente global de transferencia de calor, U_0 , aproximados. Ya se ha visto que el U obtenido es muy diferente del usado inicialmente, a continuación, se verá qué ocurre con la temperatura de salida del aire.

Para hallar la temperatura de salida del aire, se hace necesario el cálculo del flujo másico de aire, m_{aire} , que ahora ya se puede obtener debido a que es conocida la velocidad, el número de tubos que se utilizarán, sus dimensiones y colocación en haces de cuatro filas. Con esto se obtiene el área del “tejado” del condensador, necesaria para el cálculo del m_{aire} :

$$A_l = \frac{N_{\text{tubo}}}{4} \cdot (2 \cdot h_f + D_e) \cdot L$$

$$A_l = \frac{1006}{4} \cdot (2 \cdot 0,0158 + 0,0254) \cdot 9,55 = 136,9 \text{ m}^2$$

$$m_{\text{aire}} = \rho_{\text{aire}} \cdot A_l \cdot V_{\text{aire}}$$

$$m_{\text{aire}} = 1,167 \cdot 136,9 \cdot 3,9 = 623 \text{ kg/s}$$

Haciendo un balance de energía entre la potencia térmica disipada por el aerocondensador y el calor captado por el aire en su paso por él, se obtiene la temperatura de salida del aire, que quedaría:

$$T_{\text{aireout}} = \frac{9957,7 \cdot 10^3}{623 \cdot 1007} + 29,18 = 45,06 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Cuando en una primera aproximación, se tomó un valor de $44,61 [^\circ\text{C}]$

Con los resultados obtenidos en esta primera iteración se vuelven a realizar todos los cálculos hasta que los valores cumplan la condición (véase la tabla 3.8), que a continuación se muestra:

$$\frac{|U_i - U_{i-1}|}{U_i} \cdot 100 \leq 0,1\% \quad \text{y} \quad \frac{|T_{\text{aireout}_i} - T_{\text{aireout}_{i-1}}|}{T_{\text{aireout}_i}} \cdot 100 \leq 0,1\%$$

Tabla 3.8 Proceso iterativo en la determinación de T_{aireout}

Valor inicial	$U_0 = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}0} = 44,61^\circ\text{C}$
Iteración 1	$U_1 = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}1} = 45,06^\circ\text{C}$
Iteración 2	$U_2 = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}2} = 53,38^\circ\text{C}$
Iteración 3	$U_3 = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}3} = 46,57^\circ\text{C}$
Iteración 4	$U_4 = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}4} = 52,29^\circ\text{C}$
Iteración 5	$U_5 = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}5} = 47,61^\circ\text{C}$
Iteración 6	$U_6 = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}6} = 51,51^\circ\text{C}$
Iteración 7	$U_7 = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}7} = 48,31^\circ\text{C}$
Iteración 8	$U_8 = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}8} = 50,97^\circ\text{C}$
Iteración 9	$U_9 = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}9} = 48,78^\circ\text{C}$
Iteración 10	$U_{10} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}10} = 50,97^\circ\text{C}$
Iteración 11	$U_{11} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}11} = 48,78^\circ\text{C}$
Iteración 12	$U_{12} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}12} = 50,60^\circ\text{C}$
Iteración 13	$U_{13} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}13} = 49,1^\circ\text{C}$
Iteración 14	$U_{14} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}14} = 50,34^\circ\text{C}$
Iteración 15	$U_{15} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}15} = 49,32^\circ\text{C}$
Iteración 16	$U_{16} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}16} = 50,16^\circ\text{C}$
Iteración 17	$U_{17} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}17} = 49,47^\circ\text{C}$
Iteración 18	$U_{18} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}18} = 50,04^\circ\text{C}$
Iteración 19	$U_{19} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}19} = 49,57^\circ\text{C}$
Iteración 20	$U_{20} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}20} = 49,96^\circ\text{C}$
Iteración 21	$U_{21} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}21} = 49,64^\circ\text{C}$
Iteración 22	$U_{22} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}22} = 49,90^\circ\text{C}$
Iteración 23	$U_{23} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}23} = 49,69^\circ\text{C}$
Iteración 24	$U_{24} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}24} = 49,86^\circ\text{C}$
Iteración 25	$U_{25} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}25} = 49,72^\circ\text{C}$
Iteración 26	$U_{26} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}26} = 49,84^\circ\text{C}$
Iteración 27	$U_{27} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}27} = 49,74^\circ\text{C}$
Iteración 28	$U_{28} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}28} = 49,82^\circ\text{C}$
Iteración 29	$U_{29} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}29} = 49,75^\circ\text{C}$
Iteración 30	$U_{30} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}30} = 49,81^\circ\text{C}$
Iteración 31	$U_{31} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}31} = 49,76^\circ\text{C}$
Iteración 32	$U_{32} = 38,61 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	$T_{\text{aireout}32} = 49,8^\circ\text{C}$

Finalmente, en la iteración número 32, se cumple la condición planteada anteriormente

En la siguiente tabla se muestran los parámetros de diseño obtenidos a partir de los valores del coeficiente global de transferencia de calor y la temperatura de salida del aire resultante de la última iteración.

Tabla 3. 7 Parámetros de diseño del aerocondensador

Parámetros de diseño del aerocondensador	
Coficiente global de transferencia de calor, U	38,61W/(m ² · °C)
Temperatura de salida del aire, $T_{aireout}$	49,8 °C
Área total exterior de transferencia de calor, A	13 771 m ²
Número de tubos totales, N_{tubos}	775 tubos
Caudal de aire, \dot{Q}_{aire}	410,8 m ³ /s

Conociendo el número de tubos totales y sus dimensiones ya es posible hacerse una idea del tamaño que tendrá el aerocondensador. Sin embargo, antes de concluir el diseño se realizará un chequeo teórico de su comportamiento con datos reales de temperatura y producción.

3.6 Análisis operativo del diseño.

En el diseño efectuado en el apartado anterior se ha tomado como temperatura de entrada del aire 29,18 °C por suponerse suficientemente alta para garantizar el buen funcionamiento del aerocondensador y evitar el excesivo sobredimensionamiento de éste, lo cual elevaría los costos.

Debido a que en realidad la temperatura del aire variará en gran medida entre el día y la noche en las diferentes estaciones y a que la temperatura máxima alcanzada durante el año será superior a estos 29,18 °C, a continuación, se analiza el comportamiento del coeficiente global de transferencia de calor, U , que se necesitaría en cada momento.

Para ello se calculará de nuevo el U del aerocondensador valiéndose del área de transferencia de calor, A , calculada en el apartado anterior e introduciendo en las fórmulas valores reales de temperatura del aire.

3.6.1 Condiciones operativas del invierno.

El día 29 de enero de 2019, fue el más frío del año como se puede observar en la tabla 3.5. Se realiza un análisis de la temperatura del aire para cada una de las horas del día estudiado, obteniéndose las propiedades del aire, como se muestra en la tabla 3.10:

Tabla 3. 8 Propiedades del aire para cada hora del día del 29 de enero de 2019

Hora del día	Temperatura °C	c_p kJ/(kg · °C)	Densidad (kg/m ³)
1	19,55	1,007	1,206
2	18,75	1,007	1,209
3	18,5	1,007	1,21
4	18,25	1,007	1,211
5	18,24	1,007	1,211
6	18,05	1,007	1,212
7	18	1,007	1,212
8	18,24	1,007	1,211
9	20	1,007	1,204
10	21	1,007	1,2
11	22,75	1,007	1,193
12	24	1,007	1,2
13	25	1,007	1,184
14	25,5	1,007	1,182
15	26	1,007	1,18
16	25,75	1,007	1,181
17	24,6	1,007	1,185
18	24	1,007	1,188
19	23,25	1,007	1,191
20	22	1,007	1,196
21	21,7	1,007	1,197
22	21	1,007	1,2
23	20,65	1,007	1,201
24	20	1,007	1,204

Para cada hora del día se realizarán las siguientes operaciones a partir del área de transferencia de calor, A y el calor a disipar por el equipo, Q_{aire} , anteriormente calculados:

- Área del “tejado del aerocondensador”

$$A_l = \frac{N_{\text{tubo}}}{4} \cdot (2 \cdot h_f + D_e) \cdot L$$

- Flujo másico del aire

$$m_{\text{aire}} = \rho_{\text{aire}} \cdot A_{\text{aire}} \cdot V_{\text{aire}}$$

- Temperatura de salida del aire

$$T_{\text{aireout}} = \frac{Q_{\text{aire}}}{m_{\text{aire}} \cdot C_{p_{\text{aire}}}} + T_{\text{airein}}$$

- Variación de la temperatura media logarítmica

$$LMTD = \frac{(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)}$$

- Coeficiente global de transferencia de calor

$$U = \frac{Q}{A \cdot LMTD}$$

Finalmente, los datos obtenidos para el coeficiente global de transferencia de calor para cada hora del día 29 de enero de 2019 son reportados en la tabla 3.11:

Tabla 3.9 Coeficiente global U para cada hora del día 29 de enero de 2019

Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
U W/(m ² · °C)	24,61	23,9	23,69	23,49	23,48	23,32	23,28	23,48	25,02	26	27,92	29,49
Hora	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
U W/(m ² · °C)	30,88	31,63	32,42	32,02	30,31	29,49	28,52	27,06	26,73	26	25,65	25,02

Mediante un gráfico se aprecia mejor la variación del coeficiente global de transferencia de calor a lo largo del día, véase el gráfico 3.5).

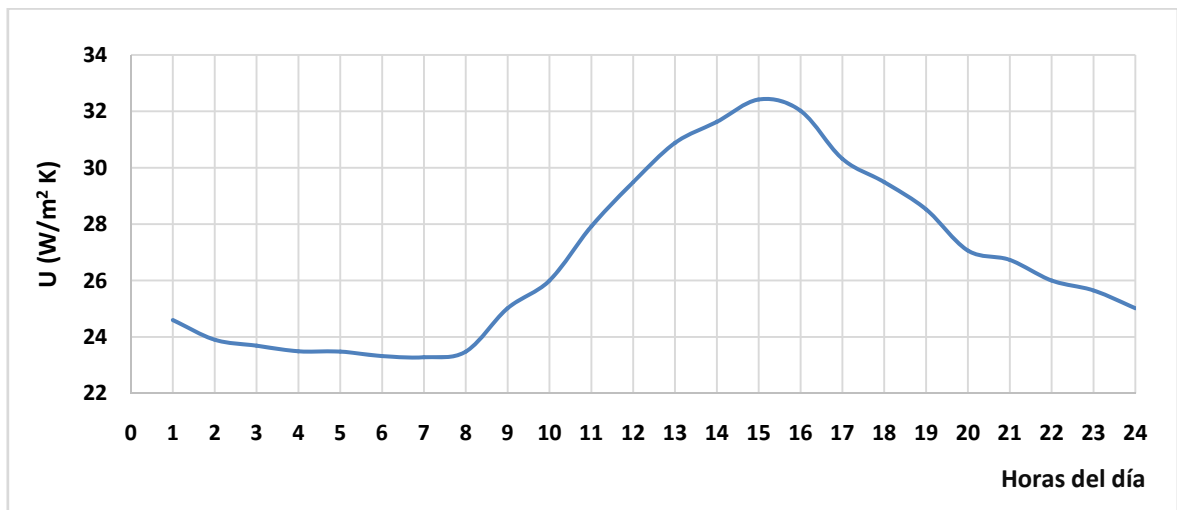


Gráfico 3.3 Coeficiente U requerido a lo largo del 29 de enero de 2019

3.6.2 Condiciones operativas de verano.

El día más caluroso del año 2019 en Matanzas fue el 9 de agosto, como se muestra en la tabla 3.5. Como en el caso anterior al variar la temperatura del aire también cambiarán sus propiedades, por lo que para cada hora se tiene, (véase la tabla 3.12):

Tabla 3.10 Propiedades del aire para cada hora del día 7 de agosto de 2019

Hora del día	Temperatura °C	c_p kJ/(kg · °C)	Densidad (kg/m ³)
1	25,6	1,007	1,181
2	25	1,007	1,184
3	24,8	1,007	1,185
4	24,35	1,007	1,186
5	24	1,007	1,188
6	23,75	1,007	1,189
7	24	1,007	1,188
8	24,75	1,007	1,185
9	25	1,007	1,184
10	27	1,007	1,176
11	28,5	1,007	1,17
12	30	1,007	1,164
13	30,25	1,007	1,163
14	30,75	1,007	1,161
15	32	1,007	1,157
16	31,25	1,007	1,159
17	30,85	1,007	1,161
18	30	1,007	1,164
19	28,75	1,007	1,169
20	28,2	1,007	1,171
21	27,6	1,007	1,173
22	26,35	1,007	1,178
23	26,1	1,007	1,179
24	26	1,007	1,18

Se obtiene el coeficiente global de transferencia de calor necesario para disipar toda la potencia térmica requerida para cada hora del día:

Tabla 3. 11 Coeficiente U para cada hora del día 7 de agosto de 2019

Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
U W/(m ² · °C)	31,79	30,88	30,59	29,96	29,49	29,16	29,49	30,52	30,88	34,14	37,14	40,77
Hora	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
U W/(m ² · °C)	41,46	42,91	47,11	44,49	43,22	40,77	37,79	36,49	35,28	33	32,59	32,42

Mediante un gráfico se aprecia mejor la variación del coeficiente global de transferencia de calor a lo largo del día, (véase el grafico 3.6)

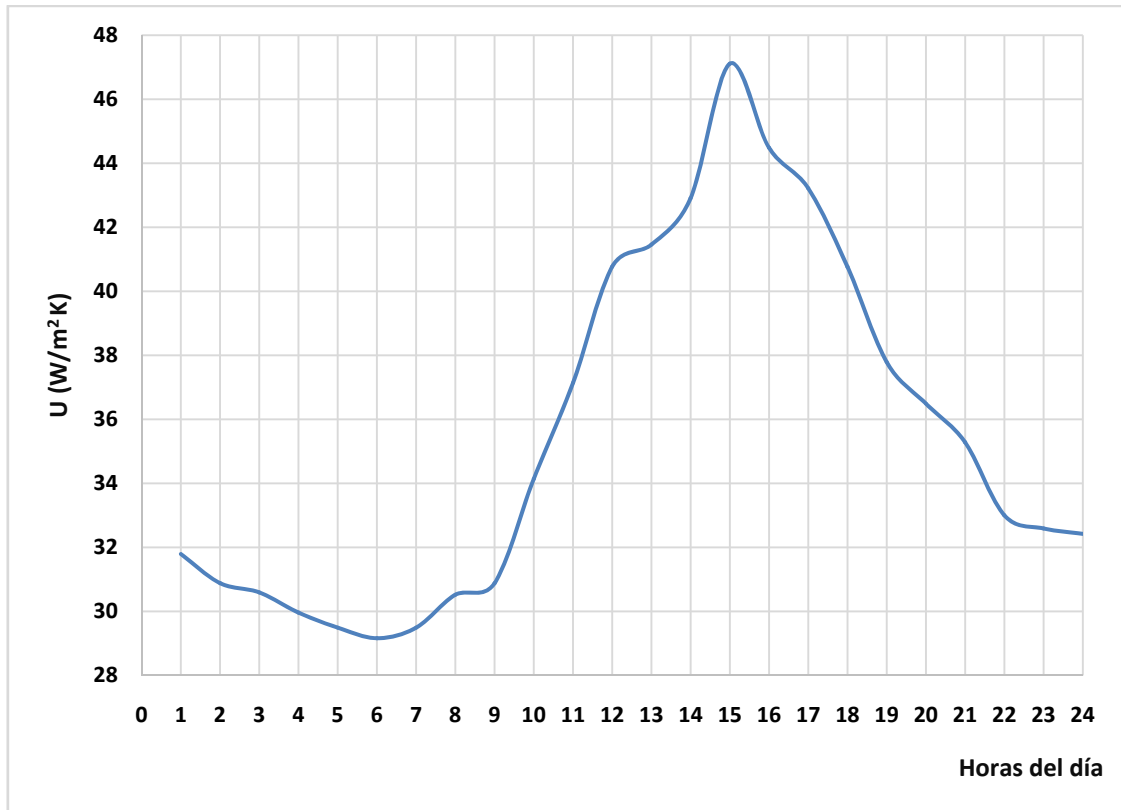


Gráfico 3.4 Coeficiente U necesario a lo largo del 7 de agosto de 2019

En este caso, el equipo diseñado no es capaz de disipar toda la potencia, puesto que entre las horas 12:00 Am y 18:00 pm el coeficiente global de transferencia de calor supera al obtenido mediante el diseño, lo que indica que el desarrollo del perfil de aletas previsto aunque mejora el proceso de transferencia de calor no cumple con los requerimientos picos de transferencia de calor para la velocidad de circulación preestablecida en el problema inicial.

Cuando la temperatura exterior alcanza los valores señalados en el gráfico 3.6, el aerocondensador no es capaz de disipar toda la potencia térmica requerida con la velocidad del aire establecida en el diseño, que era de 3,9 m/s. Para solucionar este problema es necesario realizar una serie de modificaciones en cuanto a la velocidad y flujo másico del aire, manteniendo como máximo coeficiente global de transferencia de calor $U = 38,61 W/(m^2 \cdot ^\circ C)$. Para poder operar en estas condiciones de temperatura sería necesario aumentar la velocidad de entrada del aire y por consiguiente al caudal de aire, aprovechando la capacidad de los ventiladores de variar su régimen de giro. A continuación, se muestran los resultados alcanzados:

Tabla 3. 12 Velocidad del aire necesaria para distintas horas del día, manteniendo U de diseño

Horas del día	U_{\max} $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$	Velocidad del aire de enfriamiento requerida (m/s)	m (kg/s)	Caudal de aire (m^3/s)
12	38,61	4,168	511	438,9
13	38,61	4,254	521,1	448
14	38,61	4,438	542,7	467,3
15	38,61	4,983	606,8	524,7
16	38,61	4,64	566,5	488,6
17	38,61	4,477	547,3	471,4
18	38,61	4,168	511	438,9

En el gráfico a continuación mostrado, se observa detalladamente el comportamiento del caudal de aire a medida que la temperatura real excede la temperatura de diseño.

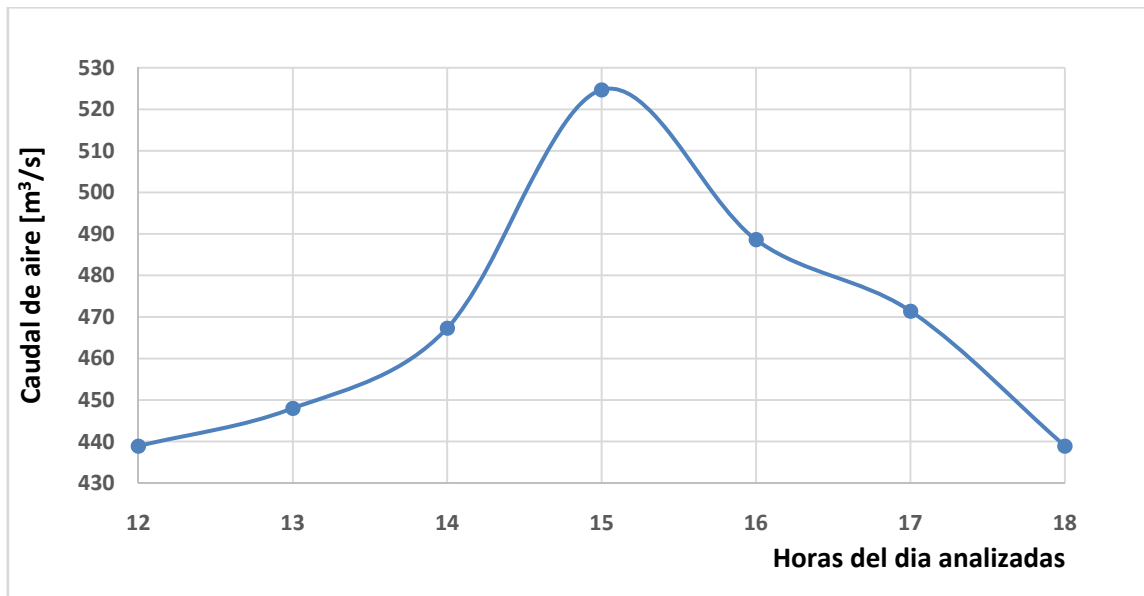


Gráfico 3.5 Comportamiento del caudal de aire requerido para máximas condiciones desfavorables

CONCLUSIONES

- 1- El análisis y la optimización de la transferencia de calor en las principales geometrías de las aletas planas utilizando modelos unidimensionales, contribuye a mejorar el entendimiento de la disipación de calor en aletas , llenando así un vacío en la literatura especializada en el tema, al obtener expresiones analíticas y/o gráficas de eficiencia. .
- 2- El hallazgo principal lo contribuyen los relacionados con la eficiencia de las distintas geometrías, que para este análisis unidimensional efectuado lo constituyen los relacionados con la eficiencia de las distintas geometrías, que para este análisis, difieren a los reportados en la literatura bajo el enfoque clásico, mostrando de esta forma, que los resultados aceptados por la comunidad especializada en el tema no pueden emplearse indistintamente a todas las aplicaciones de las aletas a nivel práctico.
- 3- La aplicación del perfil de aleta desarrollado se genera un nuevo modelo para el análisis térmico de los ACC, el cual incluye la influencia de las variables climatológicas locales, el efecto de la distribución espacial del paquete de tubos sobre el refrigerante y la condensación confinada en componentes inclinadas, superando así las deficiencias presentes en los métodos actualmente empleados.
- 4- Con la implementación del método propuesto para el análisis integral de la instalación que opera acoplada a sistemas ACC, se facilita la evaluación de estos, comprobándose con su aplicación a casos de estudio, la coincidencia de los resultados obtenidos con los reportes dados en la literatura especializada sobre el tema.

RECOMENDACIONES

- 1- Se recomienda considerar perfiles de aletas de sección variable para futuros estudios sobre la temática.
- 2- Sería aconsejable cotejar en futuros estudios que incluyan el efecto de la condensación híbrida con el empleo de perfiles de aletas tradicionales y los desarrollados en el presente estudio.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Incropera, F.P., Dewitt, D.P. (2007). *Introduction to heat transfer*. John Wiley & Sons, New York.
- [2] Bejan, A., Kraus, A.D. (2003). *Heat transfer handbook*, John Wiley & Sons, New York.
- [3] Razelos, P. (2013). A critical review of extended surface heat transfer. *Heat Transfer Engineering*, 34(6), 11-28.
- [4] Laor, K., Kalman, H. (1996). Performance and optimum dimensions of different cooling fins with a temperature-dependent heat transfer coefficient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(9), 1993-2003.
- [5] Kraus, D., Aziz, A., Welty, J. (2001). *Extended surface heat transfer*, John Wiley & Sons, New York.
- [6] Harper, D.R., Brown, B.W. (1922). Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air Cooled Engines, NACA Rep. 158, National Advisory Committee on Aeronautics, Washington, DC.
- [7] Kacimov, A.R., Obnosov, Y.V. (1997). Explicit, rigorous solutions to two-dimensional heat transfer: two-component media and optimization of cooling fins. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(5), 1191-1196.
- [8] Snider, D. (1987). The optimal fin profile –A study in heuristics and rigor. *Mathematical Modelling*, 8, 480-485.
- [9] Kundu, B., Das, P.K. (2010). Approximate techniques for the performance analysis and optimization of two-dimensional plate fins circumscribing circular tubes. *Heat Transfer Engineering*, 21, 19-28.
- [10] Kundu, B., Das, P.K. (2019). Performance and optimum dimensions off flat fin heat exchangers: A generalized analysis”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 40(4), 658-668.
- [11] Dulkan, N., Garasko, G.N. (2018). Analysis of the 1D heat conduction problem for a single fin with temperature dependent heat transfer coefficient-Part I. Extended inverse and direct solutions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 141, 3309-3324.
- [12] Dulkan, N., Garasko, G.N. (2018). Analysis of the 1D heat conduction problem for a single fin with temperature dependent heat transfer coefficient-Part II. Optimum characteristics of straight plate and cylindrical pin fins. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 141, 3309-3324.
- [13] Guo, J., Cheng, L., Xu, M. (2019). Optimization design of shell-and-tube heat exchanger by entropy generation minimization and genetic algorithm. *Applied Thermal Engineering*, 129, 2954-2960.
- [14] Fabbri, G. (2019). A genetic algorithm for fin profile optimization. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 140, 1191-1196.
- [15] Taufiq, B.N., Masjuki, H.H., Mahlia, T.M.I., Saidur, S., Faizul, M.S., Mohamad, N.E. (2017). Second law analysis for optimal thermal design of radial fin geometry by convection. *Applied Thermal Engineering*, 127, 1363-1370.
- [16] Kundu, B. (2017). Performance and optimum design analysis of longitudinal and pin

- fins with simultaneous heat and mass transfer: Unified and comparative investigations. *Applied Thermal Engineering*, 127, 976-987.
- [17] Sharqawy, M.H., Zubair, S.M. (2008). Efficiency and optimization of straight fins with combined heat and mass transfer-An analytical solution”, *Applied Thermal Engineering*, 28, 2279-2288.
- [18] Sharqawy, M.H., Zubair, S.M. (2009). “Performance and optimum geometry of spines with simultaneous heat and mass transfer”, *International Journal of Thermal Sciences*, 48, 2130–2138.
- [19] Razelos, P., Satyaprakash, B.R. (2008). Analysis and optimization of convective trapezoidal profile pin fins with internal heat generation. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 63, 643-654.
- [20] Das, S., Razelos, P. (2017). Optimization of convective trapezoidal profile circular pin fins. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 124, 533-541.
- [21] Yeh, Y.H. (1997). Analysis of thermally optimized fin array in boiling liquids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(5), 1035-1044.
- [22] Mokheimer, E.M. (2012). Performance of annular fins with different profiles subject to variable heat transfer coefficient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 85, 3631-3642.
- [23] Yeh, Y.H. (2017). An analytical study of the optimum dimensions of rectangular fins and cylindrical pin fins. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 115, 3607-3615.
- [24] Zubair, S.M., Al-Garni, A.Z. Nizami, J.S. (2016). The optimal dimensions of circular fins with variable profile and temperature-dependent thermal conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 105, 3431-3439.
- [25] Yu, L.T., Chen, C.K. (1999). Optimization of circular fins with variable thermal parameters. *Journal of the Franklin Institute Engineering and Applied Mathematics*, 336, 77-95.
- [26] Bobaru, F., Rachakonda, S. (2004). Optimal shape profiles for cooling fins of high and low conductivity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, 4953-4966.
- [27] Kader, A.H., Latif, M.S., Nour, H.M. (2016). General exact solution of the fin problem with variable thermal conductivity, *Propulsion and Power Research*, 5(1), 63-69.
- [28] Aznam, S.M., Ghani, N.A., Chowdhury, M.S. (2019). A numerical solution for nonlinear heat transfer of fin problems using the Haar wavelet quasilinearization method. *Results in Physics*, 14, 102-119.
- [29] Mosayebidorcheh, S., Matami, M., Mosayebidorcheh, T., Ganji, D.D. (2015). Optimization analysis of convective-radiative longitudinal fins with temperature-dependent properties and different section shapes and materials. *Energy Conversion and Management*, 106, 1286-1294.
- [30] Nguyen, Q., Yang, C. (2016). Design of a longitudinal cooling fin with minimum volume by a modified Newton-Raphson method. *Applied Thermal Engineering*, 98, 169-178.

- [31] Osorio, J.D., Rivera-Alvarez, A., Ordonez, J.C. (2017). Shape optimization of thin flat plate fins with geometries defined by linear piecewise functions. *Applied Thermal Engineering*, 112, 572-584.
- [32] Pasha, A.V., Jalili, P., Ganji, D.D. (2018). Analysis of unsteady heat transfer of specific longitudinal fins with temperature- dependent thermal coefficients by DTM”, *Alexandria Engineering Journal*, 57, 3509-3521.
- [33] Sobamowo, M.G. (2017). Analysis of convective longitudinal fin with temperature-dependent thermal conductivity and internal heat generation”, *Alexandria Engineering Journal*, 56, 1-11.
- [34] Ahmed, H.E., Salman, B.H., Kherbeet, A.Sh., Ahmed, M.I. (2018). Optimization of thermal design of heat sinks: A review. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 118, 129-153.
- [35] Ambreen, T., Saleem, A., Park, C.W. (2019). Pin shape-dependent heat transfer and fluid flow characteristics of water- and nanofluid-cooled micropin-fin heat sinks: Square, circular and triangular fin cross-sections. *Applied Thermal Engineering*, 158, 113-127.
- [36] Boraey, M. (2019). Thermal optimization of square pin-fins in crossflow using the Lattice Boltzmann Method with quadratic thermal equilibrium. *Physica A*, 532, 121-128.
- [37] Joo, Y., Lee, I., Kim, S.J. (2017). Efficient three dimensional topology optimization of heat sinks in natural convection using the shape-dependent convection model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 127, 32-40.
- [38] Yang, A., Chen, L., Xie, Z., Feng, H., Sun, F. (2019). Constructal operation cost minimization for in-line cylindrical pin-fin heat sinks. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 129, 562-568.
- [39] Das, R., Kundu, B. (2019). Direct and inverse approaches for analysis and optimization of fins under sensible and latent heat load. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 124, 331-343.
- [40] Das, R., Kundu, B. (2019). Forward and inverse nonlinear heat transfer analysis for optimization of a constructal T-shape fin under dry and wet conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 137, 461-475.
- [41] Hazarika, S.A., Bhanja, D., Nath, S., Kundu, B. (2016). Geometric optimization and performance study of a constructal T-shaped fin under simultaneous heat and mass transfer. *Applied Thermal Engineering*, 109, 162-174.
- [42] Zadhoush, Z., Nadooshan, A.A., Afrand, M., Ghafari, H. (2017). Constructal optimization of longitudinal and latitudinal rectangular fins used for cooling a plate under free convection by the intersection of asymptotes method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 112, 441-453.
- [43] Deshamukhya, T., Hazarika, S.A., Bhanja, D., Nath, S. (2019). An optimization study to investigate non-linearity in thermal behaviour of porous fin having temperature dependent internal heat generation with and without tip loss. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 67, 351-365.
- [44] Dong, T., Shi, Z., Jensen, A., Bi-objective optimization of axial profile of pin fin with uniform base heat flux. *Applied Thermal Engineering*, 128, 830-836.

- [45] Mann, G.W., Eckels, S. (2019). Multi-objective heat transfer optimization of 2D helical micro-fins using NSGA-II. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 132, 1250-1261.
- [46] Wang, J., Wang, X. (2016). The heat transfer optimization of conical fin by shape Modification. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 24, 972-978.
- [47] Hajmohammadi, M.R., Ahmadian, M., Nourazar, S.S. (2019). Introducing highly conductive materials into a fin for heat transfer enhancement. *International Journal of Mechanical Sciences*, 150, 420-426.
- [48] Haghighi, S.S., Goshayeshi, H.R., Safaei, M.R. (2015). Natural convection heat transfer enhancement in new designs of plate-fin based heat sinks. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 125, 640-647.
- [49] Feng, S., Shi, M., Yan, H., Sun, S., Li, F., Lu, T.J. (2018). Natural convection in a cross-fin heat sink. *Applied Thermal Engineering*, 132, 30-37.
- [50] Yeh, R.H. (2019). Errors in one-dimensional fin optimization problem for convective heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 139, 72-78.
- [51] Patiño, G. (2018). *Análisis y optimización de la transferencia de calor en aletas planas*, (Tesis doctoral), Instituto Tecnológico Metropolitano, Colombia.
- [52] Camaraza-Medina, Y. (2017). *Introducción a la termotransferencia*, Editorial Universitaria, La Habana.
- [53] Camaraza-Medina, Y., Montes de Oca, D., García-Morales, O.F., Cruz-Fonticiella, O.M., Cruz-Barros, M. (2020). Deduction of the optimal profile for a fin of constant cross section to be used in air cooled condenser. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 7(3), 401-413.
- [54] Camaraza-Medina, Y., Rubio-Gonzales, A.M., Cruz-Fonticiella, O.M., García-Morales, O.F. (2018). Simplified analysis of heat transfer through a finned tube bundle in air-cooled condenser. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 5(3), 237-242.
- [55] Camaraza-Medina, Y. (2020). *Transferencia de calor por conducción*, Editorial Universitaria, La Habana.

Anexo 1

Manuscrito aceptado para ser publicado en *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, Journal indexado en Scopus (Q1), con factor de impacto 2.32.

Deduction of the optimal profile for a fin of constant cross section to be used in air cooled condenser

Yanán Camaraza-Medina^{1*}, Delvys Montes de Oca¹, Osvaldo F. García-Morales¹, Oscar M. Cruz-Fonticciella², Maday Cruz-Barros³

¹Technical Sciences Faculty, Universidad de Matanzas, Matanzas 44440, Cuba

²Center of Energy Studies and Environmental Technology, Universidad Central de Las Villas, Santa Clara 54440, Cuba

³Thermoelectric Power Plant “Ernesto Che Guevarara”, Electric Union of Cuba, Santa Cruz del Norte, 44660, Cuba

Corresponding Author Email: ycamaraza1980@yahoo.com

<https://doi.org/10.18280/mmep.xxxxxx>

ABSTRACT

Received:

Accepted:

Keywords:

Optimal profile ; fins ; constant section ; optimal length, optimal thickness.

An Air Cooled Condenser (ACC) uses air as refrigerant, for what is required the use of fins to improve the heat transfer process, which generates appreciable increments in the costs of the installation. Therefore, is required to arrange of a fins profile that allows optimizing the operation, doing maxim the heat transfer and minimizing the manufacturing cost of the fins. In order to keep this objective, in the present paper are considered three elements to accomplish the study, (thickness, height and surface of heat transfer of the fin), that have influence directly on the optimal obtained profile for conditions of maximum of the heat flux and optimal Biot number. The study was accomplished for fins of constant cross section. In a next investigation will be considered fins of variable cross sections.

1. INTRODUCTION

A way to intensify the heat transfer it is increasing the area of heat exchange with fins. Fins are used when the means coefficient of heat transfer are low, which happens when the fluid is a gas, (for example, air), and mainly in conditions of natural convection. Fins get ready on the surface, being the most usual a tube in which the number of fins is variable, with a separation around 1 to 6 mm. In order to fulfill the thermal requests, the elements couple consecutively or at once constituting a heat exchanger [1-3].

When the fluid that moves around for the fins is confined and it is displaced by means of fluid machinery, we have to take into account the necessary energy to hold the average heat transfer coefficient through the fins, trying that the extracted thermal energy will be maximum with respect to the used energy in displacing the fluid [4].

This situation leads to a methods study and manufacturing costs, maintenance and performance of the elements of the fins, whose optimal values cannot coincide with the optimal thermal conditions, which is why a last analysis of these is important from the point of view of the manufacturing of standard models, as well as of the election of the ideal model for the user.

Therefore, it is required to obtain the geometric optimal elements for a fin of constant cross section, that it allows incrementing the coefficient of heat transfer and that simultaneously he includes the optimal requests of manufacturing costs [5].

In the development of the optimal profile of fins, it is considered that a very important and following element in the engineering of extended surfaces is obtaining an optimal value of the amount of heat transfer for a determined surface Ω , per tube length. The optimal thickness fulfills additionally that the derivative of the heat flux with respect to the thickness of the fin is equal to zero, therefore, the more

rational is attending a mathematical development that it enables determining the ideal profile to get an optimal conditions of heat transfer and manufacturing costs of the fin. For this purpose, in this paper is sought the developing of the optimal fins profile of cross section, for later be used in Air Cooled Condenser equipment (ACC) [6-8].

The proposal of optimization given in this paper considers several physical elements of the fin, between the ones that one includes the thickness, height and area of the cross section of the fins.

2. METHODS AND VALIDATION

2.1 Introductory elements on the heat transfer in fins of constant profile.

In stationary regimen, heat is transmitted through the fins and at a later time, it is transferred by convection, being the energy dissipated, in the unity of time, proportional to its superficial area. If it is considered a fin of constant cross section, which has a length a and an rectangular cross section of height l , heat is transmitted by conduction through of the fins and at later time, it is transferred by convection. The temperature of the environment fluid is T_F and the heat transfer coefficient α have a constant value, (see the figure 1 for more details) [9-11].

Therefore, the balance of thermal flux in the elementary volume located in the position x , is equal to the sum of the heat transferred by convection through the elementary volume and the heat conducted out of the control volume $x + \Delta x$, Mathematically, it can be written as:

$$Q_x - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) - Q_c = 0 \rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x + Q_c = 0 \quad (1)$$

Applying Fourier's law to the relation (1)

$$Q_X = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_X \rightarrow \frac{\partial Q_X}{\partial x} = -\lambda S \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_X \quad (2)$$

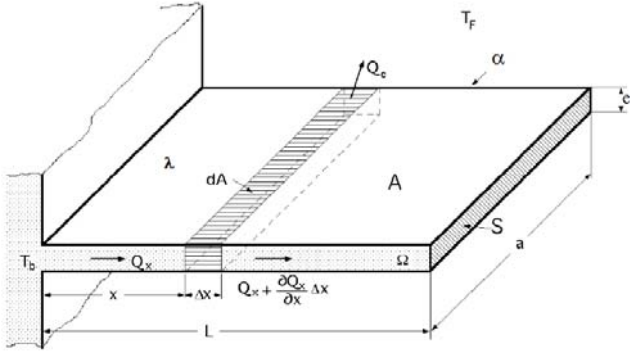


Fig. 1. Conditions for a fin with constant cross section.

By means of the Newton's law of cooling, it is obtained the relation that allows considering the dissipation of heat for convection from the fin, which comes given for [12]:

$$Q_C = \alpha dA(T_X - T_F) - \alpha P \Delta X(T_X - T_F)_C = 0 \quad (3)$$

In the Equations (2) and (3), the variables S and P are the area and the perimeter of the cross section respectively. The differential equation of the distribution process of temperatures will come given for:

$$-\lambda S \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_X \Delta X + \alpha P \Delta X(T_X - T_F) = 0 \quad (4)$$

Applying the following substitution:

$$\phi(\xi) = \frac{T_X - T_F}{T_B - T_F} \rightarrow T_X = T_F + \phi(\xi) \cdot (T_B - T_F) \quad (5)$$

Substituting the Equation (5) into (4) it is obtained than:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= (T_B - T_F) \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \left| \xi = \frac{x}{L} ; \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \right| = \\ &= \frac{(T_B - T_F) d\phi(\xi)}{L d\xi} \\ \frac{d^2 t}{dx^2} &= \frac{(T_B - T_F) d^2 \phi(\xi)}{L d\xi^2} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{(T_B - T_F) d^2 \phi(\xi)}{L d\xi^2} \end{aligned} \right.$$

Simplifying the Equation (6):

$$\frac{d^2 \phi(\xi)}{d\xi^2} - \frac{\alpha L^2 P}{\lambda S} \phi(\xi) = 0 \quad (7)$$

Temperatures distribution can be express then on dimensionless form in terms of the Biot number, considering that the perimeter P multiplied by the length of the fin L is to be equal to the total area of the lateral surface, that is [13]:

$$A = PL \quad (8)$$

From the Equation (8) it is obtained than:

$$\frac{PL^2}{S} = \frac{AL}{S} = L^* \quad (9)$$

The relation (8) included length dimensions, therefore, L^* can be considered as the characteristic length of the fin. The dimensionless number of Biot is obtained as:

$$Bi = \frac{\alpha PL^2}{s\lambda} \quad (10)$$

The differential equation of the temperatures distribution in dimensionless form, (corresponding to a fin), in terms of the Biot number, is given for:

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} - Bi \phi = 0 \quad (11)$$

The general solution of the Equation (11) is given by the following expression:

$$\frac{d^2 \phi(\xi)}{d\xi^2} = C_1 e^{-\sqrt{Bi} \cdot \xi} + C_2 e^{\sqrt{Bi} \cdot \xi} \quad (11.a)$$

The values of the integration constants C_1 and C_2 obtained in Equation (11.a), are determined from boundary conditions of the problem. In order to establish these boundary conditions, is initially considered that the temperature in the base of fin is known, being fulfilled than, $x = 0, T_{x=0} = T_B$. Therefore, the first condition of contour is given by [14]:

$$\left\{ \begin{aligned} x = 0 ; \xi = 0 \\ \phi(0) = \frac{T_B - T_F}{T_B - T_F} = 1 ; C_1 + C_2 = 1 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

The condition given in the Equation (12) is common to fins of constant cross section. The second boundary condition takes various ways according to the thermal state that shows the fin, which are:

Very long fin: The temperature of its free extreme is equal to the temperature of the fluid that surrounds the fin.

$$\left\{ \begin{aligned} T_{x \rightarrow \infty} = T_F ; \xi = \frac{x}{L} = 1 \\ \phi(1) = \frac{T_B - T_F}{T_B - T_F} = 0 = C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Considering in the Equation (13) that L is very large and that the Biot number is proportional to L^2 , it is obtained:

$$0 + C_2 e^{\sqrt{Bi}} = 0 ; C_2 = 0 ; C_1 = 1 \quad (14)$$

The equation to determine the temperature distribution is given by [15]:

$$\phi(\xi) = \frac{T_\xi - T_F}{T_B - T_F} = e^{-\sqrt{Bi} \xi} ; T_\xi = T_F + (T_B - T_F) \cdot e^{-\sqrt{Bi} \xi} \quad (15)$$

In order to determine the heat dissipated, it is considered that the heat transferred by convection is equal to the heat that is added by conduction to the fin through its base ($x = 0$), therefore:

$$\begin{aligned}
Q &= -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \cdot \left(\frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \\
&= -\frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} (C_1 - C_2) = \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \\
&= -\frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi}
\end{aligned} \tag{16}$$

Fin with convection from its free extreme: In this types of fins, the boundary conditions are situated in its free extreme for $\xi = 1$, and are given by [15]:

$$\begin{cases} -\lambda \frac{dT}{dX} \Big|_{X=L} = \alpha (T - T_F)_{X=L} = \alpha \phi(1) \cdot (T_B - T_F) \\ -\lambda \frac{dT}{dX} \Big|_{X=L} = -\lambda \frac{(T_B - T_F)}{L} \frac{d\phi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \end{cases} \tag{17}$$

The solution of the differential Equation (17) is:

$$\begin{aligned}
-\frac{\alpha L}{\lambda} (C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}}) &= \\
= -C_1 \sqrt{Bi} \cdot e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 \sqrt{Bi} \cdot e^{\sqrt{Bi}}
\end{aligned} \tag{18}$$

Solving the integration constant C_1 in the expression (18):

$$C_1 = C_2 \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{e^{-\sqrt{Bi}} \left(-\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right)} \tag{19}$$

As $C_1 + C_2 = 1$, then:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{\sqrt{Bi} (e^{-\sqrt{Bi}} + e^{\sqrt{Bi}}) + \frac{\alpha L}{\lambda} (-e^{-\sqrt{Bi}} + e^{\sqrt{Bi}})} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})}
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{\sqrt{Bi} (e^{-\sqrt{Bi}} + e^{\sqrt{Bi}}) + \frac{\alpha L}{\lambda} (-e^{-\sqrt{Bi}} + e^{\sqrt{Bi}})} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})}
\end{aligned} \tag{21}$$

The temperature distribution is given by [15]:

$$\phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_B - T_F} = C_1 e^{-\xi \sqrt{Bi}} + C_2 e^{\xi \sqrt{Bi}} \tag{22}$$

Combining Equations (20) and (21) with Equation (22) is obtaining that:

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= \frac{T(\xi) - T_F}{T_B - T_F} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right) e^{-\xi \sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{\alpha L}{\lambda} \right) e^{\xi \sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})}
\end{aligned} \tag{23}$$

Organizing conveniently in Equation (23):

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= \frac{T(\xi) - T_F}{T_B - T_F} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right) e^{-\xi \sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{\alpha L}{\lambda} \right) e^{\xi \sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})}
\end{aligned} \tag{24}$$

Or:

$$\phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_B - T_F} = \frac{\cosh[(1-\xi)\sqrt{Bi}] + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh[(1-\xi)\sqrt{Bi}]}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})} \tag{25}$$

In Equation (24):

$$\left| Bi = \frac{\alpha PL^2}{\lambda S} \rightarrow \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{S Bi}{PL} \right| \tag{26}$$

Sustituting Equation (26) into (25):

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= \frac{T(\xi) - T_F}{T_B - T_F} = \\
&= \frac{\cosh[(1-\xi)\sqrt{Bi}] + \frac{S \sqrt{Bi}}{PL} \sinh[(1-\xi)\sqrt{Bi}]}{\cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{S \sqrt{Bi}}{PL} \sinh(\sqrt{Bi})}
\end{aligned} \tag{27}$$

The heat transfer is given by:

$$Q = \frac{-\lambda S}{L} (T_B - T_F) \frac{d\phi}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} (C_1 - C_2) \tag{28}$$

Substituting Equations (20) and (21) into Equation (28):

$$Q = \frac{\lambda S}{2L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{\alpha L}{\lambda} \right) - e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{\alpha L}{\lambda} \right)}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})} \tag{29}$$

Organizing conveniently in Equation (29), [16]:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{\sqrt{Bi} \sinh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \cosh(\sqrt{Bi})}{\sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda} \sinh(\sqrt{Bi})} = \\
&= \frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{\tanh(\sqrt{Bi}) + \frac{\alpha L}{\lambda \sqrt{Bi}}}{1 + \frac{\alpha L}{\lambda \sqrt{Bi}} \tanh(\sqrt{Bi})}
\end{aligned} \tag{30}$$

Simplifying in terms of the dimensionless number of Biot

$$Q = \frac{\lambda S}{L} (T_B - T_F) \sqrt{Bi} \frac{\tanh(\sqrt{Bi}) + \frac{S\sqrt{Bi}}{PL}}{1 + \frac{S\sqrt{Bi}}{PL} \tanh(\sqrt{Bi})} \quad (31)$$

$$\left| \begin{aligned} Bi &= \frac{\lambda PL^2}{\lambda S} = \frac{\alpha 2aL^2}{\lambda ae} = \frac{2\alpha L^2}{\lambda e} - m^2 L^2 \\ \sqrt{Bi} &= mL \quad ; \quad m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e}} \end{aligned} \right|$$

Simplifying in Equation (31):

$$\frac{dQ}{dL} = \lambda S (T_B - T_F) m \frac{\frac{m}{\cosh^2(mL)} \left[1 + \frac{\alpha}{m\lambda} \tanh(mL) \right] - \left[\tanh(mL) + \frac{\alpha}{m\lambda} \right] \frac{\alpha}{m\lambda} \frac{m\alpha}{\cosh^2(mL)}}{\left[1 + \frac{\alpha}{\lambda m} \tanh(mL) \right]^2} = 0 \quad (33)$$

Grouping variables in the Equation (33)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\alpha}{\lambda m} \tanh(mL) &= \left(\tanh(mL) + \frac{\alpha}{\lambda m} \right) \frac{\alpha}{\lambda m} \\ 1 &= \left(\frac{\alpha}{\lambda m} \right)^2 = \frac{\alpha e}{2\lambda} \end{aligned} \quad (34)$$

The condition comes true for any value of L , and suggests the technical conditions to have in account to lay fins on a surface, therefore, (see table 1), [17]:

Table 1 Influence on the heat transfer by the uses of fins

Condition	Influence
$(\alpha e/2\lambda) > 1$	Fins produces an insulating or refrigerating effect
$(\alpha e/2\lambda) = 1$	Fins do not produce any effects
$(\alpha e/2\lambda) < 1$	Fins produce an increase of the heat flux

In order that the heat transfer is effective, it should come true than:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha e}{2\lambda} &\leq \frac{1}{5} \quad ; \quad \frac{\alpha S}{P\lambda} \leq \frac{1}{5} \\ \frac{P}{S} &= \frac{2(a+e)}{ae} = \frac{2}{e} \end{aligned} \quad (35)$$

If the selected fin does not fulfill the established conditions given in Equation (35), then is not convenient his use in air cooled condenser equipment, [17].

3. DEVELOPMENT OF THE OPTIMAL PROFILE FOR A FIN

3.1 Mathematical considerations in the optimal profile development.

In the development of the optimal profile of fins, it is considered that a very important and following element in the engineering of extended surfaces is obtaining an optimal value of the amount of heat transfer for a determined surface Ω , per tube length.

$$Q = \lambda S (T_B - T_F) m \frac{\tanh(mL) + \frac{\alpha}{\lambda m}}{1 + \frac{\alpha}{\lambda m} \tanh(mL)} \quad (32)$$

2.2 Elements on the application of the fins of constant cross section.

If it is considered that the derivative of the heat flux with respect to the thickness of the fin is equal to zero, $dQ/dL = 0$, substituting this condition in Equation (32):

The optimal thickness fulfills additionally that the derivative of the heat flux with respect to the thickness of the fin is equal to zero, therefore:

$$\begin{aligned} Q &= \lambda S \frac{(T_B - T_F)}{L} \sqrt{Bi} \tanh(\sqrt{Bi}) = \\ &= \lambda S (T_B - T_F) m \tanh(mL) = \left| m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e}} \right| \end{aligned} \quad (36)$$

Grouping terms in the Equation (36), [17]:

$$Q = \begin{cases} \lambda S \frac{(T_B - T_F)}{L} \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e}} \sqrt{Bi} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e}} L\right) \\ \left| \begin{aligned} S &= ae \quad ; \quad a = 1 \\ S &= e \quad ; \quad \Omega = Le \end{aligned} \right| \\ (T_B - T_F) \sqrt{2\alpha\lambda e} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e}} \Omega\right) \end{cases} \quad (37)$$

If a fin have a fixes weight, or it has been appointed previously, then, the surface Ω It is constant and the Equation (37) suggests the variation of the thermal flux in terms of the fin thickness e , [17].

Deriving the heat obtained in Equation (37) with respecto to the thickness of the fin, and at a later time being equal to zero, it is obtained then:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{de} &= (T_B - T_F) \times \\ &\times \left[\frac{2\alpha\lambda}{2\sqrt{2\alpha\lambda e}} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega\right) - \frac{\sqrt{2\alpha\lambda}}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega\right)} \frac{\Omega}{2\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}}} \frac{6\alpha}{\lambda e^4} \right] = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Applying properties of trigonometric functions:

$$\tanh\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega\right) = 3 \left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega \right) \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}} \Omega\right) \quad (39)$$

As $\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda e^3}}\Omega = \sqrt{Bi}$, then substituting in Equation (39)

$$\text{Tanh}(\sqrt{Bi}) = 3(\sqrt{Bi})\text{sech}^2(\sqrt{Bi}) \quad (40)$$

Solving the Equation (40) the optimal value of the dimensionless number of Biot is obtained, $Bi \approx 2.0142$. Therefore, the optimal thickness will be, [17]:

$$\left. \begin{aligned} m^2 &= \frac{2\alpha}{\lambda e} \\ m^2 &= \frac{Bi}{L^2} = \frac{Bi e^2}{\Omega^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2\alpha}{\lambda e^3} = \frac{Bi e^2}{\Omega^2} \quad (41)$$

$$e_{opt} = \sqrt[3]{\frac{2\alpha \Omega^2}{\lambda Bi_{opt}}} = 0.9976 \cdot \sqrt[3]{\frac{\alpha \Omega^2}{\lambda}}$$

And the optimal length establishes then is:

$$L_{opt} = \frac{\Omega}{e_{opt}} = \frac{\Omega}{0.9976 \cdot \sqrt[3]{\frac{\alpha \Omega^2}{\lambda}}} = 1.0023 \cdot \sqrt[3]{\frac{\lambda \Omega}{\alpha}} \quad (42)$$

In general, the constant physicists and the operating conditions of the fin are known, between them, $\alpha, \lambda, Q, (T_B - T_F)$, therefore, it is possible to obtain another formulation for the optimal dimensions, in terms of these parameters and of the dimensionless optimal number of Biot. This formulation comes given by, [17]:

$$Q = (T_B - T_F) \cdot \sqrt{2\alpha e \lambda} \cdot \text{Tanh}(\sqrt{Bi_{opt}}) \quad (43)$$

Solving the thickness in the Equation (55), then is obtained the optimal thickness for the maximum of heat transfer, which is described mathematically by means of the following relation:

$$\begin{aligned} e_{opt} &= \left(\frac{Q}{(T_B - T_F)} \right)^2 \frac{0.5}{\alpha \lambda \text{Tanh}^2(\sqrt{Bi_{opt}})} = \\ &= \left(\frac{Q}{(T_B - T_F)} \right)^2 \frac{0.63203}{\alpha \lambda} \end{aligned} \quad (44)$$

Equating Equations (44) and (41) is obtained the proposed equation for the design of fins with constant thickness, using for it the minimum of material, it is described by, [18]:

$$e_{opt} = \left(\frac{Q}{(T_B - T_F)} \right)^2 \frac{0.63202}{\alpha \lambda} = 0.9976 \sqrt[3]{\frac{\alpha \Omega^2}{\lambda}} \quad (45)$$

Equation (57) contains two equalities:

$$e_{opt} = \frac{0.63202}{\alpha \lambda} \left(\frac{Q}{(T_B - T_F)} \right)^2 \quad (46)$$

$$e_{opt} = 0.9976 \sqrt[3]{\frac{\alpha \Omega^2}{\lambda}} \quad (47)$$

Equating Equations (46) and (47) and clearing the surface Ω , then is obtained the optimal surface for the fin, which is:

$$\Omega_{opt} = \frac{0.5048}{\alpha^2 \lambda} \left(\frac{Q}{(T_B - T_F)} \right)^3 \quad (48)$$

In the Equation (42) it was shown than for fins of constant thickness it comes true than $L_{opt} = \Omega/e_{opt}$, therefore, combining Equations (48) and (43) is obtained the value of the optimal length of the fin, this is given for:

$$L_{opt} = \frac{Q}{(T_B - T_F)} \frac{0.7979}{\alpha} \quad (49)$$

4. CONCLUSIONS

In the present paper was considered three elements to accomplish the study, (thickness, height and surface of heat transfer of the fin), that have influence directly on the optimal obtained profile for conditions of maximum of the heat flux and optimal Biot number.

The optimal parameters of thickness, length and heat transfer surface to a fin, are inversely proportional to the gradient of temperatures in the fin, to the thermal conductivity of the material and to the average heat transfer coefficient, being the last the one that practices majority influences in this dependence.

The heat flux has influence right into the increment of the optimal required dimensions, showing in the three cases a potential, the same- order behavior than the gradient of temperatures.

A way to establish optimal parameters to the minimum cost it is manipulating temperature gradients, doing simultaneously with materials with high values of thermal conductivity.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declared that there is no conflict of interest.

FOUNDING SOURCES

The authors declare that no funding was received for the present investigation

REFERENCES

- [1] Zadhoush, M., Nadooshan, AA., Afrand, A., Ghafari, H. (2017). Constructal optimization of longitudinal and latitudinal rectangular fins used for cooling a plate under free convection by the intersection of asymptotes method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 112, 441-453. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.04.108>
- [2] Song, R., Cui, M., Liu, J. (2017). A correlation for heat transfer and flow friction characteristics of the offset strip fin heat exchanger, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 115, 695-705. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.08.054>
- [3] Camaraza, Y., Introducción a la termotransferencia, Editorial Universitaria, La Habana, 2017.
- [4] Das, R., Kundu, B. (2018). Direct and inverse approaches for analysis and optimization of fins under sensible and

- latent heat load, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 124, 331-343.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.059>
- [5] Kumar, A., Joshi, JB., Nayak AK. (2017). A comparison of thermal-hydraulic performance of various fin patterns using 3D CFD simulations, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 109, 336-356.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.01.102>
- [6] Huang, X., Chen, L., Kong, Y., Yang, L., Du, X. (2018). Effects of geometric structures of air deflectors on thermo-flow performances of air-cooled condenser, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 118, 1022-1039.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.11.071>
- [71] Jin, R., Yang, X., Yang, L., Du, X., Yang, Y. (2018). Square array of air-cooled condensers to improve thermo-flow performances under windy conditions, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 127, 719-729.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.06.135>
- [8] Kong Y, Huang X, Chen L, Yang L, Du X. (2018). Effects of geometric structures of air deflectors on thermo-flow performances of air-cooled condenser. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 118: 1022-1039.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.11.071>
- [9] Webb, R.L. (1980). Air-Side Heat Transfer in Finned Tube Heat Exchangers. *Heat transfer Engineering*, 1(3): 39-49. <https://dx.doi.org/10.1080/01457638008939561>
- [10] Caruso, G., Giannetti, F., Naviglio, A. (2014). An Experimental Study on the Air-Side Heat Transfer Coefficient and the Thermal Contact Conductance in Finned Tubes. *Heat transfer Engineering*, 1(3): 39-49.
<https://doi.org/10.1080/01457632.2014.909224>
- [11] Cttani, L., Bozzoli, F., Raineri, S. (2017). Experimental study of the transitional flow regime in coiled tubes by the estimation of local convective heat transfer coefficient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 112, 825-836.
<http://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.04.066>
- [12] Camaraza-Medina, Y., Hernández-Guerrero, A., Luviano-Ortiz, J.L., Mortensen-Carlson, K., Cruz-Fonticiella, O.M., García-Morales, O.F. (2019). New model for heat transfer calculation during film condensation inside pipes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 128, 344-353.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.09.012>
- [13] Camaraza-Medina, Y., Hernández-Guerrero, A., Luviano-Ortiz, J.L., Cruz-Fonticiella, O.M., García-Morales, O.F. (2019). Mathematical deduction of a new model for calculation of heat transfer by condensation inside pipes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 141, 180-190.
<http://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.06.076>
- [14] Camaraza-Medina, Y., Rubio-Gonzales, A.M., Cruz-Fonticiella, O.M., Garcia-Morales, O.F. (2017). Analysis of pressure influence over heat transfer coefficient on air cooled condenser. *Journal Européen des Systems Automatisés*, 50(3): 213-226.
<http://dx.doi.org/10.3166/jesa.50.213-226>
- [15] Camaraza-Medina, Y., Khandy, N.H, Mortensen-Carlson, K., Cruz-Fonticiella, O.M., Garcia-Morales, O.F., Reyes-Cabrera, D. (2018). Evaluation of condensation heat transfer in air-cooled condenser by dominant flow criteria, *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 5(2), 76-82. <https://doi.org/10.18280/mmep.050204>
- [16] Camaraza-Medina, Y., Garcia-Lovella, Y., Sánchez-Escalona, AA, Sarmiento-Torres, E., Cruz-Fonticiella, O.M., García-Morales, O.F. (2019). Suggested Method for Heat Transfer Calculation During Film Condensation Inside Pipes with Movable Frontiers, *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 6(3), 449-454.
<https://doi.org/10.18280/mmep.060317>
- [17] Camaraza-Medina, Y. (2019). Methods for the determination of the heat transfer coefficient in air cooled condenser used at biomass power plants, *Ph.D Thesis*, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Cuba, 1-100.
- [18] Camaraza-Medina, Y., Khandy, N.H, Mortensen-Carlson, K., Cruz-Fonticiella, O.M., Garcia-Morales, O.F. (2018). Mathematical modeling of two-phase media heat transfer coefficient in air-cooled condenser systems, *International Journal of Heat and Technology*, 36(1), 319-324.
<https://doi.org/10.18280/ijht.360142>