

**MODELOS DE MARKOV OCULTOS: UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE PARA
DETECCIÓN TEMPRANA DE ENFERMEDADES
HIDDEN MARKOV MODELS: A LEARNING ENVIRONMENT FOR EARLY
DETECTION OF DISEASES**

Harold Vacca-González¹, Sebastián Núñez Mejía ², Orlando García Hurtado³

Resumen

Los modelos de Markov ocultos (HMMs) consideran la incertidumbre inherente a datos y detección de patrones de datos complejos que no son identificables con otros métodos. En este artículo, se presenta desde el análisis de una señal ECG y el enfoque estadístico y probabilístico, la comprensión del uso de HMMs en la detección de enfermedades cardiovasculares –infartos-, de manera que la secuencia teórica y práctica propuesta enriquezca un ambiente de aprendizaje a través en el contexto de casos cercanos a la realidad clínica.

Palabras clave: Procesos estocásticos, Cadenas de Markov Ocultas, ECG, Ambiente de Aprendizaje

Abstract

Hidden Markov models (HMMs) consider the uncertainty inherent in the data and the detection of complex data patterns that are not identifiable with other methods. In this article, the understanding of the use of HMM in the detection of cardiovascular diseases - heart attacks - is presented from the analysis of an ECG signal and the statistical and probabilistic approach, so that the proposed theoretical and practical sequence enriches an environment of learning through the context of cases close to clinical reality.

Keywords: Stochastic processes, Markov chains, Hidden Markov Chains, ECG, Learning environment

Introducción

A partir de los años 70 y 80 del siglo XX, se inició el estudio de los modelos de Markov ocultos (HMM, por sus siglas en inglés, Hidden Markov Models) (Franzese y Iuliano, 2018), introduciendo el concepto de memoria reciente. De esta manera, se entienden los HMM como modelos probabilísticos que describen eventos observables dependientes de factores internos no observables (Yoon, 2009), basados en la propiedad de Markov que establece que la probabilidad de transición hacia un estado futuro dependa

¹ BSc. In Licensed in Mathematics, Universidad Francisco Jose de Caldas, Colombia. MSc. In Mathematics Applied. Current position: Professor at Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. E-mail: hvacca@udistrital.edu.co. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7017-0070>

² BSc. In Licensed in Mathematics, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. EUREKA research hotbed, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. E-mail: snnunezm@udistrital.edu.co. ORCID: <https://orcid.org/my-orcid?orcid=0009-0008-2248-046X>

³ BSc. In Licensed in Mathematics, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá Colombia. PhD. in Mathematics Education. Current position: Professor at Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. E-mail: ogarciah@udistrital.edu.co. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4155-4515>

exclusivamente del estado actual y no de los estados previos. Sus aplicaciones han sido diversas, entre ellas se encuentran: el reconocimiento facial, el reconocimiento por voz, la predicción genética, los análisis bioinformáticos, la clasificación automática de electrocardiogramas (ECG), la actividad neuronal de cortezas visuales, los ataques epilépticos, el movimiento de seres vivos a través de ultrasonido, la alineación de secuencias de estructuras de proteínas, la detección de segmentos homogéneos en secuencias de DNA, el aprendizaje de filogenias no singulares, la mutación genética de secuencia VIH, el análisis del genoma humano, (Chang, Lin, Hsieh, y Weng 2012; Navarrete, 2023; Yavuz, Calp, y Erkengel, 2023).

Sin embargo, es en el campo clínico que ha sido plausible la aplicación de HMM porque ha facilitado la detección de enfermedades cardiovasculares de manera temprana. Este hecho toma relevancia teniendo en cuenta que aparecen como una de las principales causas de muerte a nivel mundial, incluyendo Colombia: durante el cuarto trimestre del 2022 y los meses transcurridos del 2023, se registró en el país un promedio de 44.942 muertes debido a infarto agudo de miocardio (IAM), (DANE, Estadísticas vitales (EEVV), 2023).

En la anterior perspectiva, la investigación clínica ha decidido transitar al uso de HMM con el fin de emplear grandes volúmenes de datos para, desde su análisis, enriquecerlos y obtener patrones. Un ejemplo de ello se basa en el uso de señales de electrocardiogramas (ECG), que, aunque son exámenes en los que aparecen grandes volúmenes de información sólo una fracción de ella se analiza -la que puede resultar de interés clínico - obviándose otra, (Gersch, Lilly, y Dong, 1975).

Específicamente, un ECG es la interpretación gráfica de la actividad eléctrica registrada en la piel del campo eléctrico que se origina en el corazón (Kadish, 2001); proporciona información en el diagnóstico de enfermedades cardíacas debido a que es no invasivo, simple y accesible. En consecuencia, el ECG es objeto de investigación permanente para reducir la subjetividad y el tiempo dedicado a interpretar voluminosos registros (A. H. Kadish, 2001; Andreão, Dorizzi, y Boudy, 2006; Crawford et al, 1999; Khaled, Khalaf, y Kadah, 2015; Álvarez y Henao, 2006). Como es una señal idealmente periódica, permite marcar un latido elemental; la frecuencia cardíaca, entonces, puede estimarse mediante la detección del complejo QRS de una señal de ECG y el intervalo de tiempo entre los complejos QRS sucesivos (también conocido como intervalo R-R) se utiliza para detectar latidos ectópicos prematuros (Kadish et al, 2001).

Las señales en forma ECG cumplen con las propiedades de un proceso estocástico, por lo que pueden representarse como una serie de tiempo discreto. En acuerdo con lo expuesto, el objetivo del presente artículo es introducir al lector en los conceptos y ejemplos aplicados en (Álvarez y Henao, 2006), pero centrándose en HMMs como un ambiente de aprendizaje introduciendo datos hipotéticos referentes a los estados ocultos y observables para estudiar el estado de salud de un paciente y determinar la probabilidad de que presente tres estados: 1) ausencia de infarto, 2) arritmia y 3) presencia de infarto. Para el caso, se analizarán tres características clave de cada latido: duración del

complejo QRS, altura del segmento ST y morfología de la onda T. Estos estados conformarán inicialmente el modelo de cadena de Markov y serán analizados e interpretados considerando sus propiedades. Finalmente, se buscará dar respuesta a preguntas clave sobre la probabilidad de la última señal emitida por un estado específico, la probabilidad de transición hacia un estado determinado y la probabilidad de emitir una señal específica después de una secuencia de señales observadas.

El artículo se estructura de la siguiente manera; inicialmente se establece la orientación de la notación de cadenas de Markov y HMMs; luego, se establece la metodología en donde se conceptúa un ambiente de aprendizaje y las fases de las HMMs consideradas como un modelo de estudio y mecanismo de prevención de eventos cardiacos anómalos; posteriormente se ejemplifican datos hipotéticos de eventos cardiovasculares anómalos; finalmente se realiza la discusión de dichos resultados y se establecen las conclusiones.

1. Background y notación

En adelante, se entienden los datos obtenidos de ECG como lo hacen Álvarez y Henao, 2006; definiéndose el corazón como un órgano muscular cuya función es bombear sangre por todo el cuerpo humano a un ritmo promedio de 50-100 latidos por minuto por contracciones (sístole) y relajaciones (diástole) del miocardio. La capacidad de las células del corazón para generar y conducir impulsos eléctricos en cada contracción cardíaca traduce la actividad eléctrica del corazón en un trazado de líneas, picos y valles que configura ondas (G. H. Tison, J. Zhang, F. N. Dellings, and R. C. Deo, 2019; Sandberg, Stridh, Sörnmo, 2008).

Para incorporar el análisis con HMM, las ondas se notan así: QRS registra la despolarización de los ventrículos; ST representa la distancia entre el complejo QRS y la onda T y que, junto a la ST, registra la repolarización ventricular.

Los conceptos y definiciones relacionados con cadenas de Markov se toman de Rincón, 2011.

Un proceso estocástico se define como una colección de variables aleatorias X_n , donde n es un índice que representa el tiempo. Es decir, cada X_n es una variable aleatoria que representa el estado del proceso en el tiempo n . La evolución del proceso a lo largo del tiempo está determinada por las probabilidades de transición de una variable aleatoria a otra. Estas probabilidades de transición pueden depender del estado actual del proceso y del tiempo. En el caso de considerar una señal ECG como un proceso estocástico $X_n \leq 0$, X es la variable aleatoria que toma registro de las siguientes características: duración del complejo QRS, altura segmento ST, y onda T, y las clasifica como normal (0) o a normal (1). Se considera la adquisición de los datos periódicamente, por lo que el proceso estocástico es una serie de tiempo discreto en instantes equidistantes (Sangaiah, Arumugam, y Bin Bian, 2020; Alaa, Hu, y Schaar, 2017), visto como una colección de variables aleatorias X_n parametrizada por un conjunto T o espacio paramétrico en donde las variables toman valores en un conjunto S o espacio de estados. Como la duración de los complejos QRS, las ondas ST y las ondas T, presentan una dependencia temporal simplificada, se emplea el enfoque de cadenas de Markov para su análisis.

Para el caso que nos ocupa, la cadena de Markov se compone de un conjunto finito o numerable de estados y una matriz de transición que especifica las probabilidades de transición entre los estados. La matriz de transición indica la probabilidad de pasar de un

estado a otro en un solo paso de tiempo. Para cualquier entero $n \neq 0$, y para cualquier estado x_0, \dots, x_{n+1} , se cumple: $p(x_{n+1}|x_0, \dots, x_{n+1}) = p(x_{n+1}|x_n)$. Si se considera $n+1$ como tiempo futuro, n como presente y los tiempos $0, 1, \dots, n-1$ como pasado, se puede calcular la distribución conjunta de las variables X_0, X_1, \dots, X_n de la siguiente manera:

$$p(x_0, x_1, \dots, x_n) = p(x_0)p(x_1|x_0) \cdots p(x_n|x_{n-1})$$

La cadena de Markov se considera homogénea cuando las probabilidades de transición P_{ij} no dependen de n - el número de pasos o latidos-: la probabilidad de transitar del estado i al estado j se mantiene constante a lo largo del tiempo; si un paciente se encuentra en el estado "presencia de infarto", la probabilidad de pasar al estado arritmia o al estado ausencia de infarto en el siguiente paso será constante, independientemente del momento en que ocurra la transición.

De otro lado, para que la matriz de transición sea considerada como estocástica, debe cumplir con los siguientes criterios:

$$(1) P_{ij} \geq 0 \text{ y } \sum P_{ij} = 1$$

En este sentido, se tiene la siguiente notación para los estados: 1) Ausencia de arritmia 2) Arritmia 3) Presencia de infarto. Hay que tener en cuenta que las probabilidades existentes para pasar de un estado a otro consideran la evaluación de todos los posibles caminos para llegar al estado 3, partiendo del estado 1. Por tanto, se asume la desigualdad

De otra parte, con respecto a los modelos de Markov ocultos (HMM); se establecen a partir de una sucesión de variables aleatorias $Y = \{Y_n\}_{n \geq 0}$ que se supone ocurren luego de la realización de una cadena de Markov $X = \{X_n\}_{n \geq 1}$ que no es observada, (Bilmes, 1998).

En el anterior sentido, los componentes de un HMM son:

- $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, estados ocultos.
- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$, estados observables.
- $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} = P(s_n = j | s_{n-1} = i)$, probabilidad de transición entre estados ocultos.
- $B = \{b_i(t)\}$, $b_i(t) = P(x_n = o_t | s_n = i)$, probabilidad de emisión de un estado observable.
- $\pi = \{\pi_i\}$, $\pi_i = P(s_0 = i)$, probabilidad de que inicie en el i -ésimo estado oculto.

La Probabilidad de que la primera observación sea emitida por el estado i , se nota: $F_1(i) = \pi_i P(1|i)$.

La Probabilidad de que la n -ésima observación sea emitida por el estado j , se nota:

$$(2) F_n(j) = P(S_n = j) \sum_i F_{n-1}(i) P_{ij}$$

La Probabilidad de que la última observación sea emitida por un estado particular, se nota:

$$(3) P(X_n = j | S_n = n) = F_n(j) / \sum_i F_n(i)$$

La Probabilidad de que, una vez emitido un conjunto de observaciones, que finalizo en un estado particular, se de una observación en particular

$$(4) P(X_n = j | S_{n-1}) = \sum_i P(X_{n-1} = i) P_{ij}$$

La Probabilidad de que, una vez, emitido un conjunto de estados ocultos, se transite a un estado oculto en particular:

$$(5) P(S_{n+1} = a | S_n) = \sum_i P(S_{n+1} = a | X_n = i, S_n) P(X_{n+1} = i | S_n)$$

Y la Probabilidad de que se dé un conjunto de estados ocultos se nota como:

$$(6) P(S^n = s_n) = \sum_i F_n(i)$$

Metodología

En la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, con la motivación de reconocer el asunto Tecnológico como importante para la modernización productiva y ocupacional del país posterior a la pandemia , y considerando la enseñanza como una estrategia de flexibilización de oportunidades y metodologías de aprendizaje en aras de lograr una mayor equidad social en la educación superior; concibió sus programas de formación como el primer ciclo en la formación de un ingeniero altamente especializado, orientado hacia la práctica, adaptación y mejoramiento de tecnologías.

Desde entonces, se ha trabajado por estructurar ambientes de aprendizaje tecnológicos (ADATs), (Andrade L., 1996), donde se precisa que los objetivos de la educación en tecnología implican la formación en tres aspectos, primero: Un ciudadano alfabetizado tecnológicamente, es decir un usuario culto de tecnología en tres dimensiones. La primera, buscando: Manejo reflexivo de medios técnicos (artefactos y máquinas) que, aunque “amigables” al usuario deben ser utilizadas adecuadamente en términos de eficiencia y eficacia; Capacidad para controlar dispositivos tecnológicos en circunstancias específicas de toma de decisiones; Tendencia a innovar tecnología bajo los niveles educativos superiores en forma continua y crítica de manera que se abra paso en medio de la amplitud selectiva de opinión. La segunda, buscando el desarrollo de competencias (utilización de conceptos en entornos diferentes donde fueron aprendidos) traducidas en logros de aprendizaje tales como: Capacidad para identificar, acceder y mantener fuentes de información; Capacidad para formular problemas; Capacidad para desarrollar y presentar propuestas de solución; Capacidades técnicas; Capacidad de hacia la autoformación como signo distintivo de madurez personal. La tercera, la revalidación del espacio universitario en un ambiente de aprendizaje (compuesto por agentes determinados) entendido como un entorno delimitado, estructurado y flexible en el cual ocurren ciertas relaciones de trabajo escolar, (Andrade L., 1996).

Delimitado, pues se definen concretamente los contenidos, su complejidad, e indicadores de competencias. Estructurado, ya que corresponde a una organización conceptual a la manera que lo propone (Novak, J. & Gowin, Bob, 1988) efectuando la planeación de actividades cíclicamente. Y, por último, flexible ya que existe la posibilidad de novedosas formas de adquirir competencias y posibilitar autonomía de control.

Así, la realización de un trabajo de naturaleza interdisciplinario es apremiante y tal sentido colaborativo se busca implementar desde la concepción de las actividades y sus plataformas. En este caso, los Proyectos transversales en Tecnología electrónica utilizados para la Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática, asumen la transición de la “enseñanza” de conceptos en forma eficiente y con sentido; hacia la comprensión del “aprendizaje” de los mismos, y particularmente de conceptos Matemáticos y su aprendizaje vistos como una construcción de redes de representación internas en la mente del estudiante, conectadas y estructuradas de diversas formas. Tales

concepciones (representaciones internas de una misma idea) contienen información factual, conceptual y procedimental, (Gómez, Pedro, 1997).

Gascón J. (1995) indicaba que las experiencias en la Universidad autónoma de Barcelona develaban paradigmas que aparecen frecuentemente en la práctica docente real de tipo constructivista adicionado con el de los “momentos didácticos”. El paradigma constructivista, incluye las tendencias que utilizan la resolución de problemas con el objetivo de que los alumnos puedan “construir” nuevos conocimientos; y en ello toma importancia capital la “situación problema”; esta se entiende cuando:

- El alumno ha de poder introducirse en la resolución del problema y ha de poder considerar lo que es una solución posible.
- Los conocimientos del alumno han de ser en principio, insuficientes para resolver el problema.
- La “situación problema” ha de permitir al alumno decidir si una situación determinada es correcta o no.
- El conocimiento que se desea que el alumno adquiera (“construya”) ha de ser la herramienta más adecuada para resolver el problema a nivel de conocimientos del alumno.
- El problema se ha de poder formular en diferentes “cuadros” (por ejemplo, cuadro físico, geométrico, algebraico) entre los que han de poderse establecer correspondencias.

En tanto, el paradigma de los “momentos didácticos”, expuesto por Chevallard en 1992, fue un proyecto donde se estableció que:

- Todo problema de matemáticas es el punto de partida de un campo de problemas. Estos se agrupan en función de las técnicas matemáticas que se pueden utilizar para estudiarlos.
- Este proceso de estudio de campos de problemas se lleva a cabo mediante la utilización y producción de técnicas de estudio (desarrollo interno de las técnicas), que provoca en el estudiante necesidades teóricas. Es decir, la referencia obligada a modelos matemáticos amplios en los que se interpreten y justifiquen las nuevas técnicas. Surgiendo entonces una relación funcional entre dos momentos de la actividad matemática que es inesperada: del momento de la técnica al momento teórico.
- Toda actividad matemática puede ser interpretada como un proceso de estudio de campos de problemas, recursivo en donde una cierta práctica matemática se le asocia una teoría.

En últimas, enseñar matemáticas consistiría en hacer que el alumno sea capaz de estudiar ciertos campos de problemas de manera autónoma, es decir posibilitar que el alumno llegue a dominar e incluso a producir (de acuerdo con el nivel en que se encuentre), técnicas de estudio de ciertos campos de problemas. Poniéndose de manifiesto que cualquier cambio en la enseñanza de las matemáticas (inspirado en un

nuevo currículo) ha de estar fundamentado en una investigación didáctica a la vez “teórica” y experimental, luego por defecto, el trabajo de ingeniería en didáctica de las matemáticas presupone un modelo, tanto del saber matemático como del propio sistema de enseñanza.

Por lo anterior el presente artículo, propone los campos generados por una problemática matemática de incorporación de las cadenas de Markov para proporcionar un marco analítico para comprender y predecir la evolución probabilística de sistemas que cambian con el tiempo.

En esta perspectiva, los modelos estadísticos asumen que una serie de tiempo puede describirse a través de un proceso aleatorio paramétrico, cuyos parámetros se pueden estimar de una manera bien definida. Los HMM pertenece a esta categoría de modelos (Rabiner,1989; Cohen,1998)

Inicialmente se construye una cadena Markov, como lo indica la figura 1, y su Matriz de Transición, Tabla 1.

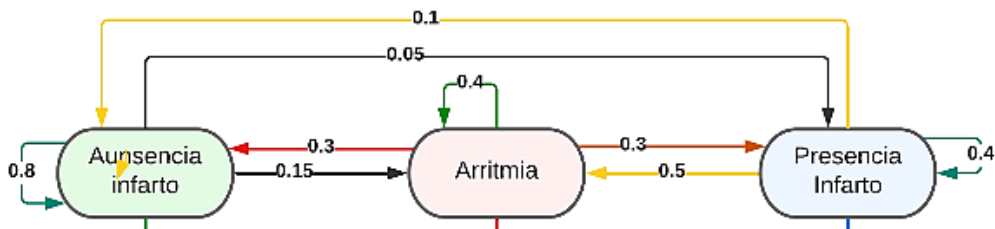


Figura 1. Cadena de Markov para los tres estados: Ausencia de Infarto, Arritmia, y Presencia de Infarto. Fuente: elaboración propia.

	Ausencia infarto	Arritmia	Presencia infarto
Ausencia infarto	0.8	0.15	0.05
Arritmia	0.3	0.4	0.3
Presencia infarto	0.1	0.5	0.4

Tabla 1. Matriz de Transición para la cadena de Markov. Fuente: elaboración propia.

Supuesta la disposición de una muestra de señales ECG que capturan la información eléctrica del corazón durante varios latidos; se usa ahora un HMM para predecir la posibilidad de un infarto analizando tres características clave de cada latido: duración del complejo QRS, altura del segmento ST y morfología de la onda T, brindando información relevante sobre la salud cardíaca.

En esa vía, en la cadena de Markov oculta se expresan las propiedades en el esclarecimiento de posibles recurrencias de síntomas o señales de alerta; y también se apoya el aprendizaje para identificar con precisión el momento inicial en el que dichos indicios comienzan a manifestarse. Este enfoque proporciona una visión integral y

matizada de la evolución del estado de salud del paciente, allanando el camino para una detección más temprana y una comprensión más informada de la probabilidad de ocurrencia de un infarto.

La cadena de Markov oculta se muestra en la figura 2.

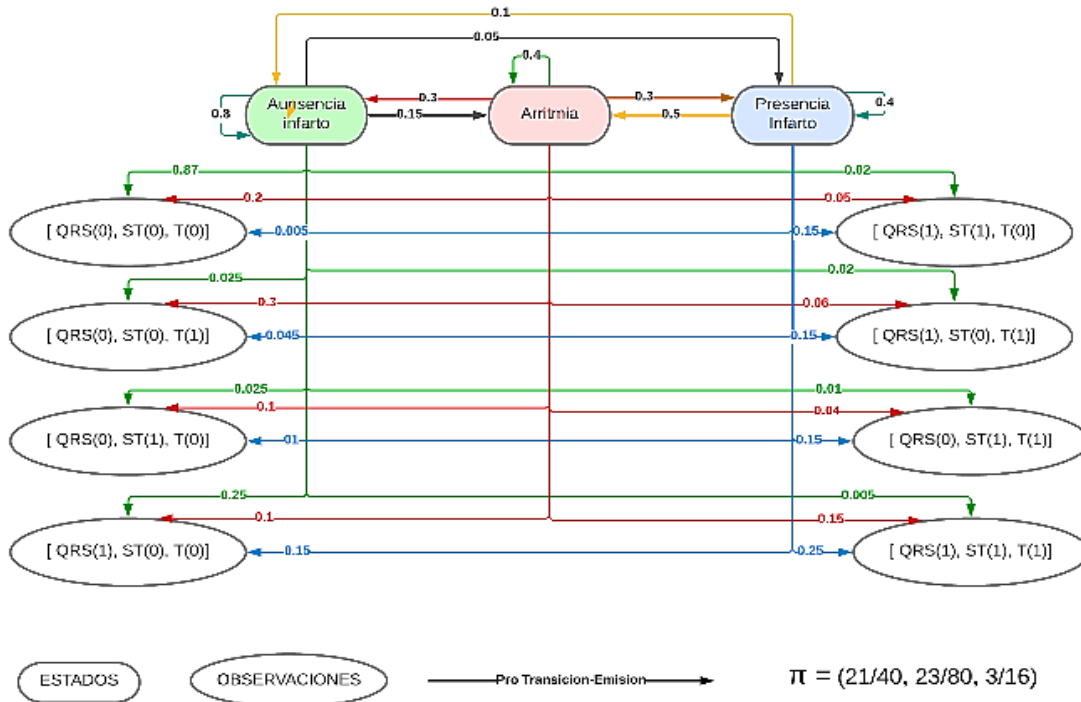


Figura 2. Cadena de Markov Oculta (encabezada por la cadena de Markov de la figura 1). Fuente: elaboración propia.

Posteriormente, se presenta un ejemplo para comprender cómo las HMM se aplican a la detección de infarto agudo de miocardio. Dada una señal ECG con 2 latidos; se aplica un HMM dividiéndose la señal en 2 intervalos correspondientes a la duración de un latido, y se extraen las características mencionadas. Cada característica se clasifica como normal (0) o anormal (1), generándose 8 combinaciones posibles de valores. Estas combinaciones representan las observaciones para el análisis: supuesta que la HMM clasifica el primer latido como ausencia de infarto y el segundo latido como arritmia. Esto sugiere un cambio en el estado de salud del paciente entre ambos latidos, ver tabla 2. En la tabla 2 se esquematiza la matriz de emisión que muestra las probabilidades para 8 observaciones.

	[QRS(0), ST(0), T(0)]	[QRS(0),ST(0), T(1)]	[QRS(0),ST(1),T(0)]	[QRS(1),ST(0),T(0)]	[QRS(1), ST(1), T(0)]	[QRS(1), ST(0), T(1)]	[QRS(0), ST(1), T(1)]	[QRS(1), ST(1), T(1)]
Ausencia infarto	0.87	0.025	0.025	0.025	0.02	0.02	0.01	0.005
Arritmia	0.2	0.3	0.1	0.1	0.05	0.06	0.04	0.15
Presencia infarto	0.005	0.045	0.1	0.15	0.15	0.15	0.15	0.25

Tabla 2. Matriz de Emisión con probabilidades de 8 observaciones. Fuente: elaboración propia.

2. Resultados

Inicialmente, es esencial comprender cómo se comporta el sistema en estudio y cómo los estados evolucionan a lo largo del evento cardiovascular.

Para efectos de que el ADAT pueda ser concreto en el cuadro interpretativo; se pueden dividir los resultados con respecto a las propiedades de la cadena de Markov; y luego las propiedades de las cadenas de Markov ocultas. Siendo este último el centro de del propósito pedagógico, se presentan a continuación.

3.2. Propiedades de cadenas Markov ocultas

Ecuación (2) $F_1(i)$:

$$\begin{aligned}
 F_1(1) &= \pi_1 p(1|1) & F_1(2) &= \pi_2 p(1|2) & F_1(3) &= \pi_3 p(1|3) \\
 &= \frac{21}{40} * 0.87 & &= \frac{23}{80} * 0.2 & &= \frac{3}{16} * 0.05 \\
 &\approx 0.4567 & &= 0.0575 & &\approx 0.0093
 \end{aligned}$$

Se revela que la probabilidad de permanecer en el estado de "ausencia de infarto" en el siguiente latido es significativamente mayor que la probabilidad de transicionar de un estado patológico (arritmia o presencia de infarto) a un estado saludable. De hecho, la probabilidad de emitir un estado saludable es la más baja de todas las posibilidades.

Ecuación (3) $F_2(j)$

$$\begin{aligned}
 F_2(1) &= p(s_2|1) \sum_i F_1(i) p_{ij} \\
 &= p(2|1)(F_1(1)p_{11} + F_1(2)p_{21} + F_1(3)p_{31}) \\
 &= 0.025((0.4567 * 0.8) + (0.0575 * 0.3) + (0.0093 * 0.1)) \\
 &\approx 0.00917
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(2) &= p(s_2|2) \sum_i F_1(i)p_{ij} \\
&= p(2|2)(F_1(1)p_{12} + F_1(2)p_{22} + F_1(3)p_{32}) \\
&= 0.1((0.4567 * 0.15) + (0.0575 * 0.4) + (0.00093 * 0.5)) \\
&\approx 0.00919
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(3) &= p(s_2|3) \sum_i F_1(i)p_{ij} \\
&= p(2|3)(F_1(1)p_{13} + F_1(2)p_{23} + F_1(3)p_{33}) \\
&= 0.1((0.4567 * 0.05) + (0.0575 * 0.3) + (0.00093 * 0.4)) \\
&\approx 0.00404
\end{aligned}$$

Estos resultados, implican que una señal [0,1,0] que muestra un valor anormal en la altura del segmento ST, puede ser emitida tanto por el estado de "ausencia de infarto" como por el estado de "arritmia". Esta similitud, a corto plazo, puede atribuirse a una actividad momentánea que podría haber alterado temporalmente el ritmo cardíaco de la persona. Sin embargo, es poco probable que la señal sea emitida por el estado de "presencia de infarto", ya que este estado tiene una probabilidad de emisión mucho menor. En otras palabras, es poco probable que una persona experimente un cambio tan drástico en su ritmo cardíaco en un solo latido.

Conociendo estos valores, puede darse respuesta a las preguntas fundamentales planteadas con base en los cálculos de la ecuación (4):

$P(X_2 = 1|S_2)$; $P(X_2 = 2|S_2)$; $P(X_2 = 3|S_2)$; $P(X_3 = 1|S_2)$; $P(X_3 = 2|S_2)$; $P(X_3 = 3|S_2)$; $P(S_3 = 1|S_2)$; $P(S_3 = 2|S_2)$; y $P(S^2 = s_2)$.

$ \begin{aligned} P(X_2 = 1 S_2) \\ &= \frac{F_2(1)}{\sum_i F_2(i)} \\ &= \frac{0.00917}{0.0022} \\ &\approx 0.4093 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} P(X_2 = 2 S_2) \\ &= \frac{F_2(2)}{\sum_i F_2(i)} \\ &= \frac{0.00919}{0.0022} \\ &\approx 0.4101 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} P(X_2 = 3 S_2) \\ &= \frac{F_2(3)}{\sum_i F_2(i)} \\ &= \frac{0.0040}{0.0022} \\ &\approx 0.1843 \end{aligned} $
---	---	--

La probabilidad de que la secuencia de observaciones finalice en el estado de ausencia de infarto o arritmia es muy similar, mientras que finalizar en el estado presencia de infarto es mucho menor, lo cual es compatible con el hecho de que un infarto es poco probable que se presente sin presentar síntomas, como lo puede ser una arritmia prolongada.

Ecuación (5)

$$\begin{aligned}
P(X_3 = 1|S_2) &= \sum_i P(X_2 = i|S_2)p_{i1} \\
&= P(X_2 = 1|S_2)p_{11} + P(X_2 = 2|S_2)p_{21} + P(X_2 = 3|S_2)p_{31} \\
&= (0.4093 * 0.8) + (0.4101 * 0.3) + (0.1843 * 0.1) \\
&\approx 0.4689
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X_3 = 2|S_2) &= \sum_i P(X_2 = i|S_2)p_{i2} \\
&= P(X_2 = 1|S_2)p_{12} + P(X_2 = 2|S_2)p_{22} + P(X_2 = 3|S_2)p_{32} \\
&= (0.4093 * 0.15) + (0.4101 * 0.4) + (0.1843 * 0.5) \\
&\approx 0.3175
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X_3 = 3|S_2) &= \sum_i P(X_2 = i|S_2)p_{i3} \\
&= P(X_2 = 1|S_2)p_{13} + P(X_2 = 2|S_2)p_{23} + P(X_2 = 3|S_2)p_{33} \\
&= (0.4093 * 0.05) + (0.4101 * 0.3) + (0.1843 * 0.4) \\
&\approx 0.2172
\end{aligned}$$

La probabilidad de que la secuencia de observaciones finalice en un estado de ausencia de infarto o arritmia es muy similar, mientras que la probabilidad de finalizar en el estado de presencia de infarto es menor. Esto quiere decir que el hecho de presentar un infarto sin presentar síntomas previamente (como una arritmia prolongada) es poco probable. Ecuación (5)

$$\begin{aligned}
P(S_3 = 1|S_2) &= P(S_3 = 1|X_2 = 1)P(X_3 = 1|S_2) + P(S_3 = 1|X_2 = 2)P(X_3 = 2|S_2) \\
&\quad + P(S_3 = 1|X_2 = 3)P(X_3 = 3|S_2) \\
&= (0.87 * 0.4689) + (0.3175 * 0.2) + (0.2172 * 0.005) \\
&\approx 0.4725
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(S_3 = 2|S_2) &= P(S_3 = 2|X_2 = 1)P(X_3 = 1|S_2) + P(S_3 = 2|X_2 = 2)P(X_3 = 2|S_2) \\
&\quad + P(S_3 = 2|X_2 = 3)P(X_3 = 3|S_2) \\
&= (0.025 * 0.4689) + (0.1 * 0.3175) + (0.1 * 0.2172) \\
&\approx 0.0651
\end{aligned}$$

Es más probable estabilizar el ritmo cardíaco, pasar a un estado de ausencia de infarto, ya que la probabilidad de mantener un estado patológico: arritmia o presencia de infarto, es menor.

La probabilidad de que se dé el conjunto de señales observadas se tiene de la ecuación (6)

$$\begin{aligned}
&= F_2(1) + F_2(2) + F_2(3) \\
&\approx 0.00917 + 0.00919 + 0.00404 \\
&\approx 0.0224
\end{aligned}$$

Con respecto a la comparación entre los eventos observados, se establecen dos señales: 1) transición de un estado, cuyas 3 características se clasifican normal, a un estado donde la característica ST se clasifica como anormal. 2) transición de un estado, cuyas 3 características se clasifican normal, a un estado donde las 3 características son clasificadas como anormales.

Las transiciones resultantes se pueden observar en la tabla 3. Son analizadas para identificar patrones en la evolución de las características de la señal ECG y evaluar su relevancia en la detección de infartos. El numero indica la pregunta a la cual hacen referencia los resultados

Transiciones	S=([0,0,0],[0,1,0])	S=([0,0,0],[1,1,1])
1	<ul style="list-style-type: none"> • $P(X_2 = 1 S_2) \approx 0.4093$ • $P(X_2 = 2 S_2) \approx 0.4101$ • $P(X_2 = 3 S_2) \approx 0.1843$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $P(X_2 = 1 S_2) \approx 0.0741$ • $P(X_2 = 2 S_2) \approx 0.5342$ • $P(X_2 = 3 S_2) \approx 0.3916$
2	<ul style="list-style-type: none"> • $P(X_3 = 1 S_2) \approx 0.4689$ • $P(X_3 = 2 S_2) \approx 0.3175$ • $P(X_3 = 3 S_2) \approx 0.2172$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $P(X_3 = 1 S_2) \approx 0.2587$ • $P(X_3 = 2 S_2) \approx 0.4205$ • $P(X_3 = 3 S_2) \approx 0.3218$
3	<ul style="list-style-type: none"> • $P(S_3 = 1 S_2) \approx 0.4725$ • $P(S_3 = 2 S_2) \approx 0.0651$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $P(S_3 = 1 S_2) \approx 0.3107$ • $P(S_3 = 2 S_2) \approx 0.1448$
4	<ul style="list-style-type: none"> • $P(S^2 = S_2) \approx 0.0224$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $P(S^2 = S_2) \approx 0.1166$

Tabla 3. Comparativos de transiciones entre dos conjuntos de señales observadas: ([0,0,0],[0,1,0]), y ([0,0,0],[1,1,1]). Fuente: elaboración propia.

Se destacan notables diferencias entre los dos conjuntos de observaciones. A. Se observa que es más probable que el primer conjunto de observaciones finalice en el estado 1, mientras que el segundo conjunto tiende a finalizar en el estado 2. B. Se aprecia que el primer conjunto de observaciones muestra una mayor probabilidad de transitar al estado 1, mientras que para el segundo conjunto es más probable la transición al estado 2. C. Finalmente, se nota que, de las dos observaciones planteadas, ambos conjuntos tienen mayor probabilidad de que la tercera observación sea la 1. Esto se presenta en ambos conjuntos de observaciones. Por último, al analizar la cuarta pregunta, se concluye que el segundo conjunto de observaciones tiene una probabilidad más alta en IAM en comparación con el primero

5. Conclusiones

- Los ambientes de aprendizaje tecnológicos (ADATs) basados en el uso de modelos de Markov ocultos (HMM) para el análisis de datos de electrocardiogramas (ECG) ha demostrado ser una herramienta efectiva para comprender y predecir el estado de salud cardiaca de los pacientes. Estos modelos permiten estimar la probabilidad de transición entre diferentes estados como: ausencia de infarto, presencia de arritmia e IAM, en

función de las características observadas en el ECG. Desde esta perspectiva, es evidente que los HMM han demostrado ser útiles en la detección temprana de enfermedades cardiovasculares y en la toma de decisiones clínicas. Su aplicación en el análisis de datos ha proporcionado resultados precisos y rápidos. desarrollan la capacidad de modelamiento y favorecen el campo de problemas del control y la automatización en los estudiantes.

- En investigaciones futuras, se facilitan los procesos investigativos en el campo de las HMM no sólo para la detección temprana de IAM sino de distintas patologías que puedan ser detectadas a través del análisis de las mismas. Y, en un Segundo sentido, al complementarse con actividades de atención primaria y prevención contribuyendo en el mejoramiento de la atención médica y la anticipación de desenlaces negativos en la salud de los pacientes.
- De igual manera, al enfatizar la capacidad del estudio realizado, y la continuación de diferentes procesos de análisis desde otras áreas del conocimiento y la aplicabilidad que tiene para estudios futuros; pueden indicarse que pueden: 1. Desarrollarse modelos HMM que puedan detectar infartos en etapas tempranas, cuando son más fáciles de tratar, como lo muestra el presente trabajo. 2. Adaptarse los modelos HMM a diferentes poblaciones, teniendo en cuenta factores como edad, sexo y etnia. 3. Combinar los modelos HMM con otras técnicas de diagnóstico, como la ecocardiografía y la resonancia magnética. 4. Realizar simulaciones con herramientas como MatLab, entre otras formas de entrenamiento -con bajos niveles de error- en combinación con dispositivos o procedimientos clínicos de última generación, para las comunidades científicas, ya sea para clasificar, evaluar o prevenir IAM, u otros eventos.
- Para otras aplicaciones susceptibles de usar los métodos descritos para convertirlos en ADATs pueden sugerirse aquellos escenarios intensivos en información y diferentes contextos de aplicación: (Nieto Duran, J. D., Santos Quintero, L. F., Vargas Escobar, L. J., & Salinas, S. A. (2017); Duarte Barón, K., & Borrás Pinilla, C. (2016); Caicedo, C. H., & Smida, A. (2016); Montiel, Ó. I., Ayala, M. A., & Ripoll L. (2016); Briñez de León, J. C., Fandiño Toro, H. A., Restrepo Martínez, A., & Branch Bedoya, J. W. (2017); Herrera-Cubides, J. F., Gaona-García, P. A., Montenegro-Marín, C. E., Sánchez-Alonso, S., & Martin-Moncunill, D. (2019); Salamanca, T. (2018); Angulo, A., Martínez, F., & López, G. (2017); Lemus P. , Garzón S. , y Tarazona B. (2016); López G. , Buriticá C., Silva E. (2018)).

Reconocimientos

Se reconoce la asesoría del grupo de investigación SciBas adscrito a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas; y al semillero de Investigación EUREKA.

6. Referencias

- Álvarez M., and Henao, R. "Combinacion de ppca y hmm para la identificación de infarto agudo de miocardio," *Scientia Et Technica*, vol. 3, no. 32, pp. 139–144, 2006, doi: <https://doi.org/10.22517/23447214.6253>.
- Andrade Londoño, E. Ambientes de aprendizaje para la educación en tecnología. Memorias EDENTEC. Santafé de Bogotá, agosto 1996.

- Andreão, R. V., Dorizzi, B., and Boudy, J. "ECG signal analysis through hidden Markov models," *IEEE Trans Biomed Eng*, vol. 53, no. 8, pp. 1541–1549, Aug. 2006, doi: 10.1109/TBME.2006.877103.
- Benavides-Acosta M., Vacca-González H., Giraldo-Ramos F, (2020). The Z-transform into control systems: review and a case of application". *Conocimiento Global* 2020; 5(1):1-10.
- Bilmes, J. "A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models," International computer science institute, vol. 4, no. 510, p. 126, 1998, Accessed: Sep. 11, 2023. [Online]. Available: https://f.hubspotusercontent40.net/hubfs/8111846/Unicon_October2020/pdf/bilmes-em-algorithm.pdf
- Brea, E. (2014). Cálculo Operacional Universidad Central de Venezuela Facultad de Ingeniería Escuela de Ingeniería Eléctrica (Issue August). <https://doi.org/10.13140/2.1.1654.9769>
- Briñez de León, J. C., Fandiño Toro, H. A., Restrepo Martínez, A., & Branch Bedoya, J. W. (2017). Análisis de resolución en imágenes de fotoelasticidad: caso carga dinámica. *Visión electrónica*, 11(1), 69-75. <https://doi.org/10.14483/22484728.12789>
- Caicedo, C. H., & Smida, A. (2016). Intensidad informacional para la longitudinalidad asistencial en sistemas de salud. *Visión electrónica*, 10(1), 83-95. <https://doi.org/10.14483/22484728.11612>
- Chang P. C., Lin, J. J. , Hsieh, J. C. and Weng, J. "Myocardial infarction classification with multi-lead ECG using hidden Markov models and Gaussian mixture models," *Applied Soft Computing Journal*, vol. 12, no. 10, pp. 3165–3175, Oct. 2012, Doi: 10.1016/j.asoc.2012.06.004.
- Chevallard, Y. "Hacia una teoría de los momentos didácticos". Granada 1992. *Face and Gesture Recognition*, pp. 454-459, 1998.
- Cohen, A. "Hidden Markov models in biomedical signal processing," Proceedings of the 20th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. *Biomedical Engineering Towards the Year 2000 and Beyond*, vol. 3, pp. 1145–50, 1998, Doi: 10.1109/IEMBS.1998.747073.
- Crawford, M. H. *et al.*, "ACC/AHA guidelines for ambulatory electrocardiography: Executive summary and recommendations: A report of the American College of Cardiology/American Heart Association Task Force on Practice Guidelines (Committee to Revise the Guidelines for Ambulatory Electrocardiography): Developed in Collaboration with the North American Society for Pacing and Electrophysiology," *Circulation*, vol. 100, no. 8. Lippincott Williams and Wilkins, pp. 886–893, Aug. 24, 1999. Doi: 10.1161/01.CIR.100.8.886.
- DANE, "Estadísticas vitales (EEVV)," pp. 1, 2023. Accessed: Sep. 11, 2023. [Online]. Available: https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/poblacion/pre_estadisticasvitales_IIItrim_2022pr.pdf
- Duarte Barón, K., & Borrás Pinilla, C. (2016). Generalidades de robots paralelos. *Visión electrónica*, 10(1), 102-112. <https://doi.org/10.14483/22484728.11711>
- Franzese M. and Iuliano A., "Hidden Markov models," in *Encyclopedia of Bioinformatics and Computational Biology: ABC of Bioinformatics*, Elsevier, 2018, pp. 753–762. Doi: 10.1016/B978-0-12-809633-8.20488-3.
- Gascón, José. El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. México D.F. 1995.
- Gersch, W., Lilly, P., and Dong, E. "PVC Detection by the Heart-Beat Interval Data-Markov Chain Approach," *COMPUTERS AND BIOMEDICAL RESEARCH*, vol. 8, pp. 370–378, 1975, Doi: [https://doi.org/10.1016/0010-4809\(75\)90013-0](https://doi.org/10.1016/0010-4809(75)90013-0).
- Gómez, Pedro. Tecnología y educación matemática. En revista de Informática Educativa. Universidad de los Andes. Santafé de Bogotá. Mayo 1997.
- Herrera-Cubides, J. F., Gaona-García, P. A., Montenegro-Marín, C. E., Sánchez-Alonso, S., &

- Martin-Moncunill, D. (2019). Abstraction of linked data's world. *Visión electrónica*, 13(1), 57-74. <https://doi.org/10.14483/22484728.14397>
- Kadish, A. H. *et al.*, "ACC/AHA clinical competence statement on electrocardiography and ambulatory electrocardiography. A report of the ACC/AHA/ACP-ASIM Task Force on Clinical Competence (ACC/AHA Committee to Develop a Clinical Competence Statement on Electrocardiography and Ambulatory Electrocardiography)," *J Am Coll Cardio*, vol. 38, no. 7, pp. 2091–2100, 2001, Doi: 10.1016/s0735-1097(01)01680-1.
- Khaled, S., Khalaf, A. and Kadah, Y. "Arrhythmia classification based on novel distance series transform of phase space trajectories," *Annu Int Conf IEEE Eng Med Biol Soc*, pp. 5195–8, 2015, Doi: 10.1109/EMBC.2015.7319562.
- Lemus P. , Garzón S. , y Tarazona B. (2016). TIC en gestión de la cadena de suministro bogotana. *Visión electrónica*, 10(2), 195-202. <https://doi.org/10.14483/22484728.11653>
- Montiel, Ó. I., Ayala, M. A., & Ripoll L. (2016). Diseño y simulación de antena no resonante: guía de onda de ranuras para 30 GHz. *Visión electrónica*, 10(1), 49-56. <https://doi.org/10.14483/22484728.11611>
- Navarrete, T. "Detección de anomalías en la carga de un procesador utilizando modelos ocultos de Markov.," Tesis de maestría, Instituto tecnológico de Morelia, Morelia, Michoacán, pp. 1, 2007. Accessed: Sep. 11, 2023. [Online]. Available: <http://www.asiat.com.mx/tomas/tesismaestria/micrositio/node2.html>
- Nieto Duran, J. D., Santos Quintero, L. F., Vargas Escobar, L. J., & Salinas, S. A. (2017). Geolocalización para pacientes con alzhéimer: una propuesta. *Visión electrónica*, 11(1), 40-44. <https://doi.org/10.14483/22484728.12791>
- Novak, J. & Gowin, Bob. *Aprendiendo a aprender*. Ed. Martínez Roca, Barcelona 1988.
- Salamanca, T. (2018). Prototipo para monitorización de signos vitales en espacios confinados. *Visión electrónica*, 12(1), 83-88. <https://doi.org/10.14483/22484728.13401>
- Rabiner, L.R. "A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition," *Proceedings of the IEEE*, vol. 77, no. 2, pp. 257–286, 1989, Doi: 10.1109/5.18626.
- Sandberg, F., Stridh, M., and Sörnmo, L. "Frequency tracking of atrial fibrillation using hidden Markov models," *IEEE Trans Biomed Eng*, vol. 55, no. 2, pp. 502–511, Feb. 2008, Doi: 10.1109/TBME.2007.905488.
- Sangaiah, A. K., Arumugam, M and Bin Bian, G. "An intelligent learning approach for improving ECG signal classification and arrhythmia analysis," *Artif Intell Med*, vol. 103, pp. 1–14, Mar. 2020, Doi: 10.1016/j.artmed.2019.101788.
- Tison, G. H., Zhang, J., Delling, F. N., and Deo, R.C. "Automated and Interpretable Patient ECG Profiles for Disease Detection, Tracking, and Discovery," *Circ Cardiovasc Qual Outcomes*, vol. 12, no. 9, pp. 1–12, Sep. 2019, Doi: 10.1161/CIRCOUTCOMES.118.005289.
- Yavuz, Ö. Calp, M, and Erkengel, H. "Prediction of breast cancer using machine learning algorithms on different datasets," *Ingenieria Solidaria*, vol. 19, no. 1, pp. 1–32, Jun. 2023, doi: 10.16925/2357-6014.2023.01.08.
- Yoon, B.-J. "Hidden Markov Models and their Applications in Biological Sequence Analysis," *Cur Genomics*, vol. 10, no. 6, pp. 402–415, Sep. 2009, Doi: 10.2174/138920209789177575.