

LA VISUALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

VISUALIZATION IN TEACHING CALCULUS

Dra. C. Miraida Ferras Ferras, miraida.ferras@matcom.uh.cu¹

Licenciado Riguar Suárez Ruiz, riwuarenriques@gmail.com²

Dr. C. Ismael Tamayo Rodríguez, ismaeltamayor@gmail.com³

Resumen

El empleo de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) resulta necesario para el desarrollo de la sociedad por su contribución al conocimiento de los objetos, procesos y fenómenos, así como por las posibilidades que ofrece al acceso e intercambio de información. En Matemática, son disímiles las formas de usar estos recursos, ya sean calculadoras, graficadores o simuladores, en particular nos facilitan la solución de problemas relacionados con el cálculo diferencial e integral. El objetivo del trabajo es valorar los principales resultados obtenidos en la visualización con la implementación de los recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Superior para el curso de nivel superior del perfil técnico para las carreras de Ingeniero Mecánico, Medio del Armamento e Ingeniero y Fortificaciones, lo cual favoreció el aprendizaje de conceptos y la resolución de problemas relacionados con estos, a partir de modelar las relaciones entre variables que aparecen en el planteamiento de fenómenos relacionados con el modelo de actuación del especialista, su visualización gráfica, interpretación y comunicación de los resultados.

Palabras clave: visualización, enseñanza-aprendizaje, cálculo.

Abstract

The use of information and communications technologies (ICT) is necessary for the development of society due to its contribution to the knowledge of objects, processes and phenomena, as well as the possibilities it offers for access and exchange of information. In Mathematics, the ways of using these resources are different, whether they are calculators, graphers or simulators, in particular they facilitate the solution of problems related to differential and integral calculus. The objective of the work is to assess the main

¹ <http://orcid.org/0000-0002-7307-8808>. Universidad de La Habana, Cuba. Profesora Titular.

² Escuela Interarmas de las FAR General Antonio Maceo, Cuba. Profesor

³ <http://orcid.org/0000-0003-2467-1442>. Universidad de La Habana, Cuba. Profesor Titular.

results obtained in the visualization with the implementation of these technological resources in the teaching-learning process of Higher Mathematics for the higher level course of the technical profile for the careers of Mechanical Engineer, Weapons and Engineer and Fortifications, which favored the learning of concepts and the resolution of problems related to them, from modeling the relationships between variables that appear in the approach of phenomena related to the specialist's performance model, its graphic visualization, interpretation and communication of the results.

Key words: visualization, teaching-learning, calculus.

Introducción

Las transformaciones que se llevan a cabo en la enseñanza requieren de nuevos desempeños por parte de los profesores, de ahí el interés que se manifiesta en los diferentes niveles por lograr una formación integral en los estudiantes. Todo ello genera una modificación en los componentes de la didáctica, con el objetivo de situar al estudiante en el centro de atención y lograr una mejor orientación hacia el aprendizaje (Álvarez, et al., 2014).

El impacto que tienen las TIC en todos los ámbitos del quehacer humano es un hecho innegable, del cual no está ajeno el entorno educacional, ni mucho menos el ámbito del entrenamiento y formación militar, donde se hace un uso intensivo de estas tecnologías. En el caso particular de la Matemática Superior, se implementan cambios desde el punto de vista didáctico a partir del empleo de recursos tecnológicos como medios de enseñanza, que han generado una nueva concepción en la enseñanza de conceptos y la resolución de problemas relacionados con estos, a partir de su visualización gráfica, la interpretación y comunicación de los resultados.

La matemática constituye un elemento básico en la formación de un ingeniero en la vida militar ya que contribuye al desarrollo del pensamiento lógico, abstracto, algorítmico y aporta los fundamentos básicos de su profesión, dado que estos identifican, interpretan, analizan y construyen modelos matemáticos de procesos técnicos, económicos, productivos y científicos de la esfera militar, vinculados a su especialidad, con el empleo de recursos tecnológicos.

La disciplina Matemática Superior para el curso de nivel superior del perfil técnico para las carreras de Ingeniero Mecánico, Medio del Armamento e Ingeniero y Fortificaciones

se imparte en los tres primeros semestres de la carrera. Su programa declara como objetivo fundamental, resolver problemas a partir de modelar las relaciones entre variables que aparecen en el planteamiento de fenómenos relacionados con el modelo de actuación del especialista, auxiliándose para ello de medios de cómputo y asistentes matemáticos. Una de las vías para la realización de las actividades puede estar basada en la simulación de procesos para resolver problemas, ya que el simulador permite al educando aprender de manera práctica, mediante el descubrimiento y la construcción de situaciones hipotéticas.

A partir de la experiencia de los autores de esta investigación, la observación de actividades y la entrevista a estudiantes y profesores del referido centro de estudios, se constatan insuficiencias en la práctica escolar que se concretan en:

- La comprensión del problema y la exploración de diversas vías para su solución.
- El aprovechamiento de las potencialidades de los simuladores que favorezca la interacción del profesor, el alumno y el grupo.
- La motivación y creatividad para resolver problemas, en general, y, en particular, con el empleo de simuladores en el proceso docente educativo.
- El empleo de métodos activos para dirigir el aprendizaje de los estudiantes y atender las diferencias individuales, con la utilización de simuladores.

Las dificultades detectadas requieren, dada su importancia, de una intervención didáctica adecuada en el proceso docente educativo de la Matemática. Por ello se decidió abordar como problema de científico la resolución de problemas en el proceso docente educativo de la Matemática Superior en la Escuela Interarmas de las FAR General Antonio Maceo. Una vía para contribuir a la resolución de problemas es la incorporación de recursos tecnológicos en el proceso docente educativo para simular las situaciones que se plantean.

Metodología

El contenido de la asignatura Matemática Superior se concibe a partir de asumir al Materialismo Dialéctico como base filosófica, y al Enfoque Histórico Cultural de Vigotsky (2007) y sus seguidores como fundamento psicopedagógico del modelo educativo.

Las actividades en el aula se organizan a partir de las acciones que deben realizar los estudiantes para resolver problemas. Simultáneamente reflexionan sobre lo que van

realizando en la computadora, y lo sintetizan para comunicarlo; por otro lado, las actividades ya completadas proporcionan información al profesor acerca de la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en estas. Éstos realizan las actividades en grupos frente a la computadora, de acuerdo con las actividades programadas.

En tal modalidad se fomenta la discusión entre los participantes, quienes se ven en la necesidad de verbalizar y de expresar de múltiples formas sus respuestas, generando un clima de discusión. En las discusiones colectivas que organiza el profesor se contrastan los diferentes acercamientos a una actividad determinada que se presenta en el grupo. Esos intercambios suelen tener un impacto significativo en los modos de apropiación del conocimiento.

Resultados

El proceso de enseñanza-aprendizaje en la educación superior es un proceso complejo que implica la interacción entre el docente y el estudiante para lograr adquisición de conocimientos, habilidades y competencia. En este proceso, el docente tiene un papel fundamental como facilitador del aprendizaje, quien planifica y organiza las actividades de enseñanza, selecciona los contenidos relevantes, utiliza estrategias didácticas adecuadas y evalúa el progreso de los estudiantes. Por su parte, el estudiante es el protagonista activo de su propio aprendizaje, quien se involucra de manera activa en la construcción de su conocimiento, reflexiona sobre lo aprendido y se autoevalúa. Además, este proceso se apoya en el uso de diversas herramientas y recursos didácticos, como las tecnologías de la información y comunicación, que facilitan el acceso a la información, promueven la colaboración entre los estudiantes y estimulan la creatividad y la innovación.

El objetivo fundamental de la Matemática Superior es resolver problemas a partir de modelar las relaciones entre variables que aparecen en el planteamiento de fenómenos relacionados con el perfil técnico, mediante métodos matemáticos analíticos o numéricos, estrategias heurísticas, estrategias metacognitivas haciendo uso de medios de cómputo y específicamente de asistentes matemáticos, teniendo en cuenta en cada caso, la selección del método que se adecue al problema en dependencia de los datos

disponibles, de la respuesta que se desea hallar y de los medios con que se cuenta para su solución.

En relación con la resolución de problemas existen múltiples investigaciones, desarrolladas tanto en Cuba como en el ámbito internacional. Se destacan los trabajos de Campistrous, L. y Rizo, C. (1996), Llivina, M. (1999), Schoenfeld, A. (1985), Torres, P. (1993), quienes han profundizado en aspectos relacionados con los métodos problémicos, la enseñanza basada en problemas, la resolución de problemas, entre otros aspectos.

La resolución de problemas matemáticos permite a los estudiantes enfrentarse a situaciones complejas y encontrar soluciones efectivas. A través de este proceso, los alumnos aprenden a identificar y definir el problema, analizar las diferentes opciones disponibles, evaluar las ventajas y desventajas de cada una y tomar decisiones informadas. Además, fomenta el trabajo en equipo y la colaboración, al enfrentarse a un problema, los alumnos pueden compartir y discutir ideas, buscar diferentes perspectivas y aprender de las experiencias y conocimientos de sus compañeros.

Al respecto se asume que la resolución de problemas matemáticos es un proceso que consiste en tomar una situación problemática, analizarla, formular un plan para resolverla, ejecutar ese plan y verificar si la solución obtenida es correcta (Polya, 1973).

En este sentido se destacan cuatro etapas por las que se debe transitar para resolver un problema: comprender el problema, planificar una estrategia o vía de solución, ejecutar el plan y la vista retrospectiva, donde se reflexiona sobre el proceso desarrollado y la lógica de la solución. Este proceso puede resultar más dinámico y atractivo para el estudiante si se usan ambientes virtuales de aprendizaje como estrategia dinámica para facilitar la resolución de problemas, teniendo en cuenta la hipertextualidad y la multimedia. Las TIC permiten que los alumnos examinen un problema desde diferentes perspectivas, donde la generación inmediata de diferentes representaciones, ayuda a que los alumnos analicen cualidades matemáticas relacionadas con el problema trabajado. Se producen cambios que pueden ser tanto en el tipo de tarea y problema, como en la forma de plantear las actividades de aprendizaje, facilitan la implementación de las estrategias, además de potenciar las formas de interactuar con los problemas.

El uso de recursos tecnológicos en la resolución de problemas, permite a los estudiantes la búsqueda de relaciones entre los elementos de las representaciones, para identificar las soluciones de los problemas; elaborar conjeturas a partir de la observación de los datos en las distintas representaciones realizadas en cada herramienta tecnológica; generalización de los resultados; realizar análisis de casos particulares; elaboración de conexiones entre los resultados y otros contenidos matemáticos; y comprobación de los resultados obtenidos, permitiendo que los estudiantes puedan pasar de los elementos concretos a lo abstracto, pudiendo desarrollar generalizaciones de las situaciones trabajadas, aumentando sus posibilidades de adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades.

Muchos problemas requieren usar y manipular modelos, donde las TIC, además de generar estos modelos, facilitan la visualización y utilización de diagramas dinámicos, además de motivar a los estudiantes a realizar conjeturas en forma intuitiva y posteriormente verificar estas conjeturas.

En matemática es frecuente que los alumnos memoricen mecánicamente los conceptos sin relacionarlos con los conocimientos que ya poseen y muchas veces no los aplican en la vida real, o en otras situaciones. Los conocimientos matemáticos se generan a partir de la resolución de problemas, pero no se reducen a los problemas y técnicas de resolución; el progreso matemático, tanto individual como colectivo tiene lugar cuando se logran generalizar y justificar los procedimientos de solución a tipos de problemas cada vez más amplios. (Godino, 2007)

La simulación también puede ser utilizada en el proceso de enseñanza-aprendizaje para mejorar la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos. A través de simulaciones interactivas, los estudiantes pueden experimentar con diferentes escenarios y observar cómo cambian las variables y los resultados.

La simulación en el aprendizaje es un método eficaz basado en tecnologías informáticas inmersivas que concibe a los estudiantes como agentes activos en el desarrollo de sus conocimientos, habilidades y actitudes profesionales mediante la experiencia. Dada su capacidad para simular escenarios reales, permite que los participantes tomen decisiones, evalúen las consecuencias de las mismas y obtengan un *feed back* constante

de sus acciones, resolviendo los problemas que puedan surgir con el objetivo de evitar riesgos innecesarios.

La técnica de simulación en la enseñanza es muy útil para lograr un aprendizaje significativo, y recrear experiencias que serían imposibles o difíciles de vivenciar en la realidad, tal como ocurre por ejemplo con los hechos del pasado y situaciones riesgosas. Esta técnica sirve para aprender a partir de la acción tanto sobre contenidos como sobre el desempeño de los estudiantes ante situaciones simuladas. Se basa en la creación de un modelo matemático o computacional que describe las características y comportamientos del fenómeno a estudiar. Puede ser una simplificación o abstracción de la realidad, pero debe capturar las características esenciales del fenómeno para que los resultados obtenidos sean válidos.

Una vez que se ha construido el modelo, se pueden realizar diferentes experimentos virtuales variando las condiciones iniciales o los parámetros del sistema. Estos experimentos permiten estudiar como el fenómeno evoluciona a lo largo del tiempo y como responde a diferentes estímulos o cambios en las variables. Sin embargo, la simulación también tiene sus limitaciones pues los modelos utilizados son simplificaciones de la realidad, por lo que los resultados obtenidos pueden no ser completamente precisos o representativos.

Discusión

A partir de los presupuestos expuestos, los contenidos de la asignatura se estructuran con un enfoque sistémico declarando y fundamentando las relaciones entre variables como célula generadora del estudio integral de los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral: función, límite, continuidad, derivadas e integrales de funciones en una y varias variables, series, ecuaciones diferenciales, métodos numéricos y variable compleja.

Las derivadas y las integrales son potentes herramientas de cálculo que tienen variadas aplicaciones en diversos campos. En Física pueden utilizarse para calcular el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de un objeto que se mueve en una dimensión, derivando el desplazamiento con respecto al tiempo se obtiene la velocidad y derivando la velocidad con respecto al tiempo se obtiene la aceleración, de manera inversa se pueden obtener dichas magnitudes mediante la integración. El trabajo

realizado por una fuerza sobre un objeto puede ser calculado hallando la integral de la fuerza con respecto al desplazamiento del objeto.

En Dinámica las integrales nos permiten calcular la energía mecánica total de un sistema, que es la suma de su energía cinética y potencial. Podemos lograr esto al tomar la integral del Lagrangiano, que es una función matemática que describe la dinámica del sistema.

En Termodinámica, el calor absorbido o liberado por un sistema durante un proceso puede ser calculado tomando la integral del flujo de calor con respecto a la temperatura.

En Electromagnetismo las integrales pueden utilizarse para calcular los campos eléctrico y magnético de una carga puntual, utilizando la Ley de Coulomb y la Ley de Biot-Savart respectivamente. También, para obtener la energía almacenada en un campo eléctrico o magnético se calcula la integral de la densidad de energía con respecto al volumen.

En la ciencia, la tecnología y la ingeniería se puede calcular una variedad de cantidades, como el área, el volumen y la masa. para calcular el área de una superficie o el volumen de un objeto sólido, como un cilindro o una esfera. Esto se hace tomando la integral del área de la sección transversal con respecto a la longitud del objeto. La masa de un objeto con densidad variable puede ser encontrada usando el cálculo integral. Para esto, tomamos la integral de la densidad con respecto al volumen.

Las aplicaciones de las integrales quizá no sean tan visibles en nuestra vida cotidiana, pero todas las aplicaciones mencionadas anteriormente influyen en el diseño y producción de todos los productos y comodidades de las que nos beneficiamos diariamente. Se utilizan para calcular cantidades como área, volumen y masa, también para calcular desplazamiento, velocidad y energía en física, y para calcular costes, ingresos y valor de la inversión en finanzas y economía.

Ejemplos de problemas que se proponen a los estudiantes:

1. Bajo la aplicación de un funguicida la población de la roya de la caña decrece según la expresión $C(t) = -2 \ln t + 1$. Halle la variación de decrecimiento a las 6 horas de aplicado el producto.
2. Se desea construir una caja con tapa, cuyo volumen sea de 72 cm^3 . Los lados de la base han de estar en una relación 1:2 ¿Cuáles deben ser las longitudes de todos los lados para que la superficie total sea la menor posible?
3. Determine los lados de un rectángulo de área máxima inscrito en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4. Durante un ejercicio táctico de una maniobra en un simulador de artillería los cadetes que estudian en la especialidad de fortificación realizan un ejercicio de tiro en un tanque soviético, modelo T-26, que posee una ametralladora antiaérea. Si el desplazamiento del proyectil está dado por la expresión $S_y = 1559t - 4,9t^3$ sujeto a un ángulo de 60° , despreciando la resistencia del aire y la presión atmosférica y considerando $g = 9,8m/s^2$. Con qué velocidad impactará el proyectil a los $5s$ del disparo, si el blanco se encuentra emplazado a $1km$ de altura.
5. La cantidad de energía intercambiada en forma de calor durante una reacción química a presión constante se cuantifica por la magnitud entalpía o calor de reacción (ΔH). La entalpía de una reacción cualquiera es función de la temperatura y se expresa mediante la relación $d(\Delta H) = (\Delta a + \Delta bT + \Delta cT^2)dT$, donde Δa , Δb y Δc son constantes. Obtenga la ecuación integral que refleja la variación del calor de reacción en el intervalo de 298 a $1000K$.
6. La capacidad calorífica de un gas A varía con la temperatura según la expresión $C_p(T) = 108.81 - 1.9 \cdot 10^{-2}T + 2.2 \cdot 10^{-6}T^2 + 4.3 \cdot 10^{-4}T^{\frac{1}{2}}$. Si la capacidad de energía evolucionada en forma de calor por un mol de ese gas (en Joule) durante su calentamiento o enfriamiento se determina como

$$Q = \int_{T_a}^{T_b} C_p(T) dT,$$

¿Cuántos Joule de energía en forma de calor son necesarios para calentar el gas desde 373 hasta $423K$?

Para la resolución de problemas inicialmente se les orienta a los estudiantes trabajar sin el uso de recursos tecnológicos, luego se les muestra un ejemplo para familiarizarlos con estos recursos, su utilización y la interpretación de los resultados.

Para el desarrollo de las clases prácticas se presentan problemas tipos donde se puedan variar condiciones para la mejor comprensión del contenido desde la visualización del fenómeno o proceso que se describe.

La concepción de las clases prácticas con el empleo de recursos tecnológicos permite la dinamización de los contenidos mediante procesos visuales de simulación,

representaciones gráficas y otras transformaciones para arribar a conclusiones generalizadas y consistentes.

El empleo de recursos tecnológicos mejora la expresión oral y escrita en tanto se propicia el intercambio de ideas y experiencias a través de la comunicación de las respuestas y la evaluación.

Conclusiones

La resolución de problemas relacionados con el cálculo diferencial e integral permite al estudiante aplicar esos contenidos a diversas situaciones relacionadas con la vida y su perfil profesional lo que favorece el desarrollo de capacidades cognitivas y competencias matemáticas.

El avance que se aprecia en la resolución de problemas con el empleo de las TIC para la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje, la flexibilidad en la forma de organizar y desarrollar el proceso y la motivación que se logra en los estudiantes son evidencias de mejoras en el aprendizaje.

El empleo de las TIC permite interactuar con las imágenes de manera dinámica, de forma tal que se pueden hacer manipulaciones en tiempo real, trazos auxiliares, visualizar diferentes vistas de un objeto, simular procesos y fenómenos, entre otros elementos que ayudan a los estudiantes a comprender conceptos y significados de las representaciones y juega un rol importante en la resolución de problemas.

El interés de los estudiantes y el avance en el aprendizaje, son elementos que constituyen argumentos a favor de la viabilidad del empleo de las TIC en los contenidos de Cálculo Diferencial e Integral, lo cual impone nuevos retos al profesor en el desarrollo de su creatividad.

Referencias

Álvarez, M., Almeida, B. y Villegas, E. (2014). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. La Habana: Pueblo y Educación.

Campistrous, L. y C. Rizo (1996). Aprende a resolver problemas aritméticos. La Habana: Pueblo y Educación.

Godino, J. D. (2007). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos, para el estudio de las matemáticas. Publicado en memorias del congreso EDUTEC, Bs As, Argentina.

- Llivina, M. (1999). Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos. La Habana, Cuba: Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona". Tesis Doctoral.
- Polya, G. (1973). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.
- Torres, P. A. (1993). La enseñanza problémica de la Matemática del nivel medio general. La Habana, Cuba: Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona". Tesis Doctoral.
- Vygotsky, L. S. (1995). Pensamiento y Lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas. Ediciones Fausto. Recuperado de: <http://padresporlaeducacion.blogspot.com>