

## UNA EXPERIENCIA CON LA APK GEOGEBRA EN LOS DISPOSITIVOS MÓVILES, PARA LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO LÍMITE.

## AN EXPERIENCE WITH THE APK'S GEOGEBRA ON MOBILE DEVICES, FOR THE FORMATION OF THE LIMIT CONCEPT.

Lic. Rudy González Ferrer<sup>1</sup>. [rudygfnauta.com.cu@gmail.com](mailto:rudygfnauta.com.cu@gmail.com)

Dr. C. Roxana Cabrera Puig<sup>2</sup> [roxycabrera706@gmail.com](mailto:roxycabrera706@gmail.com)

[roxana.cabrera@matcom.uh.cu](mailto:roxana.cabrera@matcom.uh.cu)

Dr. C. Pablo Abreu Rogert<sup>3</sup> [abrerog@gmail.com](mailto:abrerog@gmail.com)

### **Resumen:**

El GeoGebra es un software matemático interactivo que ofrece disímiles posibilidades a los educadores que profesan la matemática con el fin de desarrollar en los educandos, los conocimientos y las habilidades matemáticas de manera que puedan comprender la formación de conceptos con ideas renovadoras en los contenidos básicos del cálculo, que se imparten en las diferentes carreras de la enseñanza universitaria. En el trabajo se expone una experiencia de actividades que pueden desarrollarse en el aula con el uso de las herramientas que presenta la apk GeoGebra para la formación del concepto matemático de límite de una función en un punto. El objetivo está encaminado a presentar una manera interactiva, el uso de los dispositivos móviles, a partir de la selección de ejercicios que contribuyan a la comprensión y mejora de los resultados docentes, despertando en los educandos su independencia, autonomía, creatividad e innovación.

**Palabras clave:** límite, dispositivos móviles, Geogebra, enseñanza.

### **Summary:**

---

<sup>1</sup> ORCID: 0009-0008-5928-5844. Facultad Matemática y Computación, Universidad de la Habana.

<sup>2</sup> ORCID: 0000-0002-0151-6776. Facultad Matemática y Computación, Universidad de la Habana.

<sup>3</sup> ORCID: 0009-0002-9147-1344. Facultad Matemática y Computación, Universidad de la Habana.

GeoGebra is an interactive mathematical software that offers different possibilities to educators who practice mathematics in order to develop mathematical knowledge and skills in students so that they can understand the formation of concepts with innovative ideas in the basic contents of the calculus, which are taught in the different careers of university education. The work presents an experience of activities that can be developed in the classroom with the use of the tools presented by the GeoGebra apk for the formation of the mathematical concept of the limit of a function at a point. The objective is aimed at presenting an interactive way, the use of mobile devices, based on the selection of exercises that contribute to the understanding and improvement of teaching results, awakening in learners their independence, autonomy, creativity and innovation.

**Keywords:** limit, mobile devices, Geogebra, teaching.

### **Introducción.**

El concepto de límite, para los griegos de la antigüedad poseía un tratamiento eminentemente geométrico–estático, debido a que su uso se basaba en la identificación de un problema fundamental a partir del cálculo del área y el volumen de los cuerpos. Los primeros trabajos que se conocen, de aquel entonces, son los de Hipócrates (S. V a.C.), quien utilizó dicho concepto para determinar el área de las “lúnulas”, no obstante, fue Eudoxo (408-355 a.C.) quien presentó de manera implícita el concepto de límite en las demostraciones por el método exhaustivo, es decir, realizando la aproximación de una figura por otras en las que se pudiera medir la correspondiente magnitud, de manera que la misma se fuera aproximando a la magnitud buscada, aunque las bibliografías identifican a Arquímedes (287-212a.C.) como el filósofo-matemático que aplica el método de exhausción, para demostrar sus resultados refiriéndose a áreas y volúmenes de la esfera y el cilindro y en la cuadratura de la Parábola.

Dentro de los mayores desafíos que se presentan a la educación actual en el campo de las matemáticas, lo constituye la aprehensión del concepto de límite que están dadas por la interpretación de la propia definición en sí y por los procesos en el que se encuentran la abstracción, el análisis y la demostración.

Este concepto que resulta trascendental en el aprendizaje del cálculo ya que prepara las condiciones previas y asegura el nivel de partida de los conceptos como

continuidad, derivada, integral y series, quienes dependen de él para la formulación de los procedimientos y operaciones que se dan en cada uno de ellos.

En la actualidad, el concepto de límite con rigor matemático establece que:

*El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$  es igual a  $L$  si y sólo si para todo número real  $\varepsilon$  mayor que cero existe un número real  $\delta$  mayor que cero tal que si la distancia entre  $x$  y  $c$  es menor que  $\delta$ , entonces la distancia entre la imagen de  $x$  y  $L$  es menor que  $\varepsilon$  unidades.*

En la terminología matemática, se escribe como:

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ , de ahí que se lea y pueda observarse la simbología, como Si  $f(x)$  se acerca arbitrariamente a un número  $L$  cuando  $x$  tiende a  $c$  por cualquiera de los dos lados, entonces el límite de  $f(x)$ , cuando  $x$  tiende a  $c$ , es  $L$ , por lo que la escritura es  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ . (Larson, R.)

A partir de estos conocimientos y como el propósito de la enseñanza de este concepto gira en relación a que los estudiantes sean capaces de razonar, pensar, relacionar y aplicar los conocimientos y premisas matemáticas a situaciones reales de la vida cotidiana, se realiza una adecuación en las clases para apoyados en el uso de la apk Geogebra visualizar ejemplos para la interpretación y análisis del concepto de límite de una manera dinámica.

El empleo adecuado de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en el aula permite la participación activa de los estudiantes, fundamentalmente en esta época en la que ellos son considerados por muchos investigadores, como nativos digitales, y están inmersos en un mundo donde la mayoría de las actividades que realizan día a día están dominadas por el uso de diversos dispositivos y programas electrónicos, por tanto debe aprovecharse la visualización que brindan estos medios tecnológicos para que los conceptos abstractos (invisibles e inimaginables) y los símbolos de la ciencia matemática se transformen en un atractivo donde, la imagen cobra un valor muy importante ya que permitirá que los educandos se acerquen a los conceptos, sacándolos de lo abstracto para transformarlos en un nuevo conocimiento.

La afirmación anterior hace que el educador disponga de los recursos necesarios y la preparación oportuna en cuanto al manejo de la tecnología para que el aprendizaje adquiera un significado y una búsqueda constante de nuevos saberes.

En el presente trabajo se persigue como objetivo mostrar la importancia de la app Geogebra durante el proceso de enseñanza y aprendizaje exponiendo actividades que pueden realizarse en los grupos de estudio en el aula para la formación del concepto de límite de una función en un punto, aprovechando las ventajas que poseen los dispositivos móviles tales como teléfonos celulares o Tablet ya que los educandos en la actualidad tienen una gran parte del día un teléfono en la mano, por lo que les es más fácil emplear la tecnología por medio del teléfono, para desarrollar en la matemática contribuyendo así a la comprensión y mejora de los resultados docentes, lo que traerá consigo que se logre despertar en los educandos su independencia, autonomía, creatividad e innovación.

### **Metodología**

Las innovaciones tecnológicas están proporcionando en la educación canales nuevos de comunicación e inmensas fuentes de información que difunden, entre otros aspectos, formas de organización del aprendizaje. En una sociedad en la que la información está ocupando un lugar tan importante es preciso cambiar la forma tradicional del aprendizaje y repensar nuevas alternativas y transformar las estrategias de enseñanza en estrategias de aprendizajes adecuadas a la demanda contemporánea. El aprendizaje móvil o aprendizaje electrónico móvil, es una forma de adquirir conocimientos que utiliza dispositivos móviles para la obtención, fijación, consolidación y sistematización de conocimientos.

De ahí que, la facilidad para el aprendizaje en cualquier momento y lugar propicie, el uso de canales de intercambio, propiamente digitales, como foros, correo electrónico, páginas web o plataformas educativas para lograr una enseñanza que tiene como características esenciales las siguientes:

- Conectividad: el educando accede a Internet y, por tanto, a los contenidos de forma expedita.
- Multifuncionalidad: aprendizaje *multitasking* con posibilidad de realizar múltiples tareas, sin dejar de prestar atención al objetivo de enseñanza.
- Personalización: cada educando dispone de su propio dispositivo personalizado y las tareas se diseñan de manera individualizada en correspondencia con su ritmo de aprendizaje.

- Flexibilidad: aprendizaje adaptado a cada necesidad de los educandos y el contexto educativo en el que se desarrollan.
- Ubicuidad: las actividades diseñadas se pueden aprender desde cualquier lugar y en cualquier momento.
- Accesibilidad: la apk es una herramienta de uso gratuita y con bajo coste.
- Portabilidad: el dispositivo siempre se lleva encima, lo que facilita su consulta.

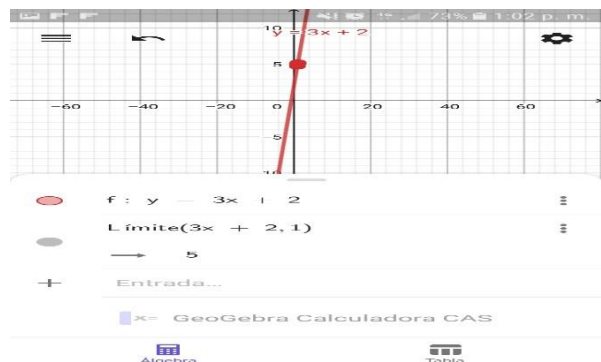
Lo anteriormente expresado, permite concluir que el aprendizaje con dispositivos móviles posee como ventajas frente a otros tipos de aprendizajes, en que es un método que mejora la igualdad de oportunidades, facilita un aprendizaje personalizado y ofrece una respuesta inmediata por parte de los educadores, además de fomentar el aprendizaje continuo, cooperativo y colaborativo, al igual que el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).

Ahora bien, en la enseñanza del concepto de límite que apk, se recomienda para facilitar la labor de educadores y educandos que no debe desaprovecharse para la formación de dicho concepto. El GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Es un software gratuito que trabaja en forma bidireccional ya que enlaza la geometría con el álgebra, al escribir una ecuación, Geogebra automáticamente muestra su gráfica asociada, pero no solo es esto, sino que también tiene opciones para trabajar con la estadística y el cálculo simbólico. Esta apk, desde los dispositivos móviles dinamiza el estudio de las matemáticas en forma armónica ya que relaciona lo experimental y lo conceptual.

A continuación, se presentan actividades a desarrollar en las clases del Tema Funciones, Límite y Continuidad que se imparte en la enseñanza universitaria para la formación de ingenieros militares.

### Actividad No. 1. Como utilizar Calculadora CAS para la formación del concepto límite

La calculadora CAS brinda muchas ventajas para la formación del concepto límite, primeramente, permite calcular el límite de una función si se introduce de manera

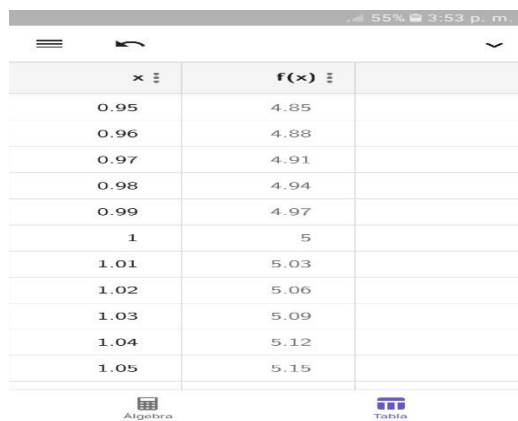


correcta la sintaxis y los valores y se sigue la secuencia para el cálculo.

En la figura No. 1, se muestra la entrada algebraica donde aparece la función, y el cálculo del límite, además la vista gráfica nos muestra la representación de dicha función y la influencia del cálculo del límite.

Figura No.1 Entrada algebraica

Otras de las posibilidades de la Calculadora CAS para la formación del concepto límite es que la tabla de valores que se obtiene, permite conocer una serie de datos relacionados con el cálculo del límite y así acercarnos de una forma precisa al concepto de límite.



x	f(x)
0.95	4.85
0.96	4.88
0.97	4.91
0.98	4.94
0.99	4.97
1	5
1.01	5.03
1.02	5.06
1.03	5.09
1.04	5.12
1.05	5.15

Figura No. 2. Tabla de valores.

No solo esta vista de la tabla de valores, sino que en la gráfica aparecen representados todos los mismos en forma de puntos donde el alumno logra una adecuada visualización del gráfico y puede realizar mediante preguntas de impulso, la interpretación del resultado de una manera informal para posteriormente llegar a la definición formal y conceptual del límite de una función en un punto.

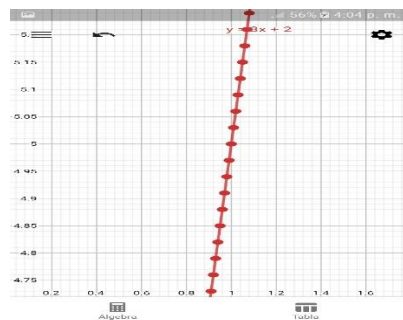
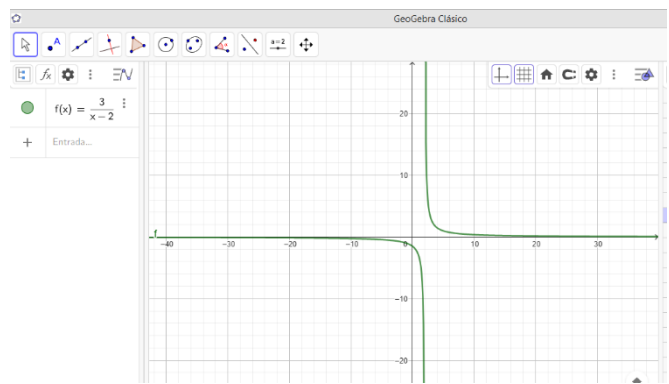


Figura No. 3. Ploteo de puntos, de acuerdo a la tabla de valores obtenidos.

En el contexto de las funciones, la palabra límite se emplea para hallar el valor al cual se acerca una función  $f(x)$ , dependiendo del valor al cual se acerca, por lo que la elaboración de tablas de valores y la escritura de números aproximados que determinen el límite de cada función, resulta un procedimiento para que de esta manera pueda lograrse que los alumnos analicen, clasifiquen, comparen, encuentren características comunes y arriben a una generalización y se logre una idea de formación del concepto límite en el lenguaje informal ya que cuando se menciona la palabra límite, se refiere a un valor al cual nunca se debe llegar.

**Actividad No. 2. Introducción del concepto de límite mediante la definición formal en términos de  $\varepsilon$  y  $\delta$ .**

El desarrollo de actividades para que los educandos comprendan de una manera intuitiva el concepto de límite en un punto, se da realiza mediante análisis de casos, teniendo en cuenta el dominio de definición de la función y al conocer la expresión  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L.$  , en donde se

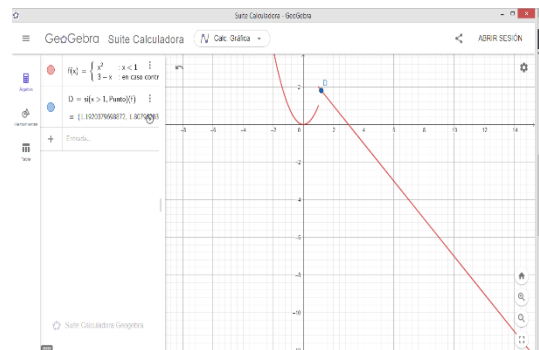


determina que el límite cuando tiende  $c$  de  $f(x)$  es  $L$ , si se puede acercar los valores de  $f(x)$  a  $L$ , tomando a  $x$  muy cerca de  $c$  y con  $x \neq c$ .

La definición formal de límite se presenta partiendo de que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ . significa que la diferencia entre  $f(x)$  y  $L$  se puede hacer arbitrariamente pequeña sí  $x$  está lo suficientemente cerca de  $c$ ,  $x \neq c$ .

Con la apk Geogebra, realizar los siguientes pasos. Esta actividad ayudará a visualizar el concepto de límite de una función en un punto:

- 1.- Introduzca la ley de asignación de una función. Si  $(x < 1, x^2, 3-x)$
- 2.- Introduzca el punto donde se desea analizar el límite.
- 3.- Introduzca el posible valor del límite que va a analizar:



4.- Mueva los deslizadores para comprobar si la proposición indicada es verdadera.

Para comprobar que la proposición sea verdadera, se debe observar el recorrido del punto D sobre el gráfico y al dibujar el fragmento del gráfico de la función sobre el

Introduzca la ley de asignación de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < 1 \\ 3 - x & : \text{otherwise} \end{cases}$$

Introduzca el punto en el que se desea analizar el límite:

 $a = 1$ 

Introduzca el posible valor del límite que se va a analizar:

 $L = 2$ 

Seleccione un valor para  $\varepsilon$ :

 $\varepsilon = 1$ 

Seleccione un valor para  $\delta$ :

 $\delta = 0.5$ 

¿Es verdadera la siguiente proposición para todo valor de  $x$ ?

 $0 < |x - 1| < 0.5 \implies |f(x) - 2| < 1$ 

Ver respuesta:

intervalo se puede apreciar, lo que ocurre dentro del recuadro, esta idea da una forma dinámica de analizar el comportamiento de la función en el punto y posteriormente encontrar una clasificación de discontinuidad, en este caso en  $x=1$ .

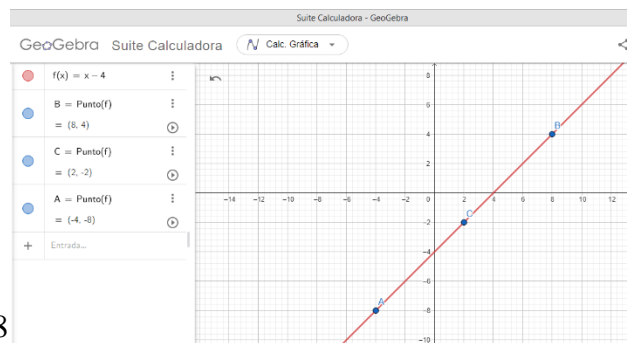
El uso de la apk GeoGebra como recurso heurístico se sustenta en la representación gráfica de funciones y las operaciones (aritméticas y exponenciales) que se pueden realizar. En el Análisis Matemático, la formación del concepto de límite es básico para la obtención de otros conceptos, el uso de las representaciones en el aprendizaje del mismo es útil y reporta resultados inmediatos en la comprensión de las formas indeterminadas, la obtención de asíntotas, análisis de las discontinuidades. La apk como medio de enseñanza en el proceso heurístico puede emplearse además como herramienta de comprobación en ejercicios de cálculo de límites.

Tareas individualizadas que pueden orientarse.

Tarea No. 1

Objetivos:

- Calcular el valor de la imagen de  $f$  a partir de un sistema de representación gráfico en un conjunto de puntos finitos.
- Identificar el sistema de representación algebraico correspondiente a la imagen de  $f$  para un determinado valor de  $x$ .





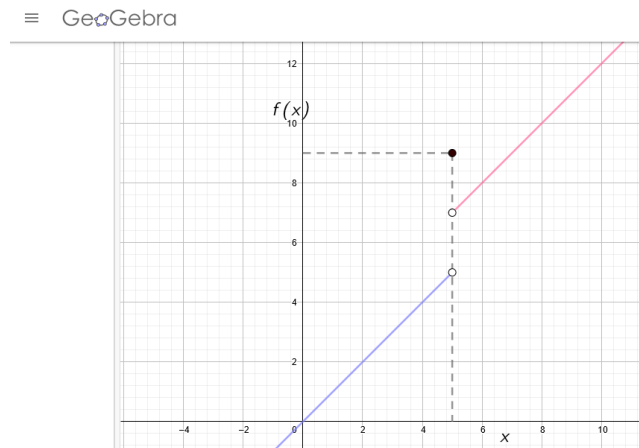
Con la apk Geogebra, se ha representado, la función  $f(x)=x-4$ , marque la respuesta que considere correcta en las siguientes preguntas:

La imagen de la función para  $x=2$  es:

\_\_\_\_\_ -8      \_\_\_\_\_ 4      \_\_\_\_\_ -2

En la figura, la representación algebraica que mejor expresa la imagen de la función en  $x=5$  es

- \_\_\_\_\_  $f(5)=9$
- \_\_\_\_\_  $f(5)=\exists$
- \_\_\_\_\_  $f(9) =5$



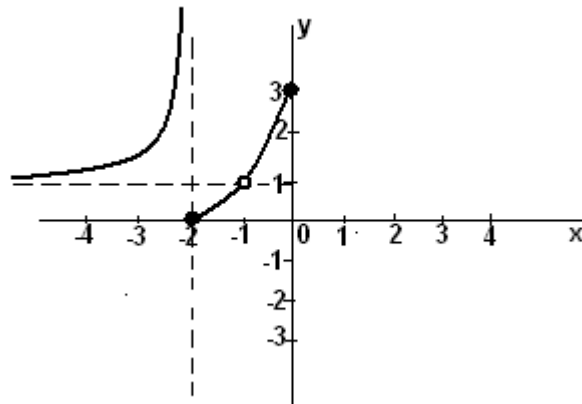
Autoevalúate.

1. Dado el gráfico de la función  $y=f(x)$

- a) Determine el dominio.
- b) Calcule los siguientes límites:

i)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  ii)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  iv)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



c) Prolongue el gráfico para las  $x > 0$  de forma tal que cumpla las siguientes condiciones:

- i) Sea continua en  $x = 0$
- ii) Tenga un cero en  $x = 1$
- iii)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$  iv)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$  v)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2.- Represente con Geogebra la función  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 3 \\ x^2 - 2x & x \geq 3 \end{cases}$

Determine una aproximación de x a la izquierda de 3 y una aproximación de x a la derecha de 3. ¿Qué puede decir con respecto al límite en x=3?

### Conclusiones

Resultados del pre test aplicado a un Grupo de Control (GC) y al Grupo Experimental (GE). La prueba consistió en el análisis de los resultados a 10 preguntas en las que se evaluaron aspectos teóricos y prácticos sobre: definición de función, dominio y rango; clasificación de funciones, tipos de funciones, gráfica de una función y interceptos con los ejes de coordenadas, por la necesidad estos contenidos de manera fundamental para la apropiación del concepto de límite en funciones de variable real. La intención era comprobar el estado en que se encontraban para realizar actividades haciendo uso de la apk Geogebra.

Tabla No. 1 Resultados del pre test aplicado al GC y al GE.

Grupo	Matrícula	Número de aprobados	Media ( $\bar{x}$ )	Desviación estándar ( $\sigma$ )
Control	29	9	2.6	0.809
Experimental	26	11	2.8	0.889

Los educandos que aprobaron el pretest en los grupos de control y experimental, se analizaron tomando como escala de medición, la escala de calificación que se sigue en las evaluaciones (/2,3,4,5), siendo 3 el menor valor para aprobar, por los resultados se pudo verificar que los grupos eran homogéneos y al comparar las medias, aplicando la prueba t-student, se obtuvo que las mismas son iguales, no existiendo diferencias estadísticamente significativas entre los grupos estudiados.

Una vez, concluida las tareas diseñadas, se aplicó un pos test a los grupos GC y GE, en este momento se formularon 15 preguntas teóricas y prácticas. En la medición se tuvo en cuenta elementos de la Taxonomía de Bloom, de manera individualizadas en 5 preguntas quedando de la siguiente manera:

Tabla No. 2. Resultados del pos test aplicado al GC y al GE.

<b>Grupo</b>	<b>Matrícula</b>	<b>Número de aprobados</b>	<b>Media (<math>\bar{x}</math>)</b>	<b>Desviación estándar (<math>\sigma</math>)</b>
Control	29	21	3.5	0.712
Experimental	26	23	3.8	0.65

Como puede observarse, los cambios son discretos entre ambos grupos, pero en la medida que se emplee la apk y los educadores interioricen las ventajas que promueve para el aprendizaje, la inserción en los temas tendrá un mayor impacto.

En cuanto a la clasificación de subcategorías del conocimiento de la taxonomía de Bloom los resultados se presentan en la siguiente tabla

<b>Subcategorías taxonomía de bloom</b>	<b>Educandos del GC</b>				<b>Educandos del GE</b>			
	Aprobados por preguntas	2	3	4	5	2	3	4
Conocimiento	2	10	9	8	1	14	4	7
Comprensión	3	7	12	7	3	10	8	5
Aplicación	2	13	9	5	2	12	8	4
Análisis	4	13	6	3	1	14	7	4
Evaluación	8	7	9	5	3	15	5	3

De la tabla, puede apreciarse, que la distribución de educandos con respuestas correctas de acuerdo a las preguntas realizadas por subcategorías es superior porcentualmente en ambos grupos, por lo que puede decirse se aprecian resultados levemente alentadores entre los que utilizaron la apk Geogebra para la formación del concepto límite, pudiendo concluirse que la experiencia aplicada con el diseño de actividades individualizadas para el concepto de límite ofrece oportunidades que fueron consideradas de innovadoras por los implicados en el experimento. El uso de la apk

Geogebra resulta beneficioso porque se logró una dinámica en la clase, que ayudó a captar la atención de los educandos, haciendo más activo, creativo y participativo el proceso de enseñanza aprendizaje. Se pudieron percibir ritmos diferentes en cada estudiante y se pudo observar pasos de avance en el diálogo matemático entre ellos.

## Referencias

- Barreras Peral, Álvaro, Dubarbie, L., & Oller-Marcen, A. M. (2022). Análisis de applets de GeoGebra para la enseñanza del límite de una función. *Bordón. Revista De Pedagogía*, 74(4), 65–83. <https://doi.org/10.13042/Bordon.2022.93361>
- Cáceres, R., Roy, A. & Zachman, P. (2013). Apps móviles como herramientas de apoyo al aprendizaje matemático informal en Educación Superior. En VIII Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología (pp. 1- 9). La Plata: Universidad Nacional de La Plata y RedUNCI. Recuperado desde <http://hdl.handle.net/10915/27556>
- Fombona Cadavieco, J., & Rodil Pérez, F. (2018). Niveles de uso y aceptación de los dispositivos móviles en el aula. *Pixel Bit*, (52), 21–35. Recuperado de <https://recyt.fecyt.es/index.php/pixel/article/view/62482/38219>.
- Larson, Ronald, Cálculo y Geometría Analítica. Traducido por LorenzoAvellanas Rapún. 6 ed. Medellín; McGraw-Hill. Volumen I.
- Majerek, D. (2014). Application Of GeogebraFor Teaching Mathematics. *Advances in Science and Technology Research Journal*, 8(24), 51-54. <https://doi.org/10.12913/22998624/567>
- Molfino, Verónica. El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. En REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS, REIEC Año 5 Número 1. Disponible en internet: <http://goo.gl/2iEHa>.
- Prada, R., Hernández, C. & Jaimes L. (2017). Representaciones semióticas alrededor del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 12(2), p 14-31
- Reinhart J., Robinson R. (2014) Digital Thinking and mobileTeaching. Recuperado de <http://bookboon.com/es/digital-thinking-and-mobile-teaching-ebook>
- Sandhya T., Swathi P. (2017). Significance of Mobile Applications in Education System. *International Journal of Linguistics and Computational Applications*, Volumen 4, p 80.
- Santiago R., Trinaldo S., Kamijo M. & Fernández Á. (2015). Mobile learning, nuevas realidades en el aula. Recuperado de [www.digitaltext.com/FTP/LibrosMetodologia/mlearning.pdf](http://www.digitaltext.com/FTP/LibrosMetodologia/mlearning.pdf)