



**UNIVERSIDAD DE MATANZAS**  
**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

# Trabajo de Diploma

**Título:** Sistema de ejercicios para contribuir al desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo grado de la Secundaria Básica “Protesta de Baraguá”.

**AUTORA:** Daylí Bullain Valle

**TUTOR:** M.Cs. Jesús Norberto Almeida Carazo

**Licenciatura en Educación Matemática-Física**

**Quinto año CRD**

**Junio 2020**



“Nunca consideres el estudio como una obligación sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber”

Albert Einstein



# Dedicatoria

A mi pareja Yankier por escuchar mis inquietudes y darme muchas veces el empujoncito que me hacía falta.

A mi familia por toda su comprensión, en especial a mi mamá y mi hermano.

A todos los profesores que de una manera u otra hicieron que la realización de este trabajo fuera posible.

En especial, quiero dedicar todo mi empeño y esfuerzo, no solo en la realización de este trabajo sino también en todo el transcurso de mi carrera a una de las personas más importantes de mi vida, esa persona es mi papá y quien ha sido mi mayor apoyo en mis momentos más duros. A ti dedico cada minuto dentro de un aula, todas las mañanas de sueño, todas las horas de estudio, cada asignatura vencida. A ti, te debo el estar aquí hoy, y sé que te seguiré debiendo todos los logros que alcance en mi vida, porque tú me lo ha enseñado todo, tu eres mi motor.

La Autora

# Agradecimientos

La Autora agradece de manera especial: a mi tutor Jesús Almeida por todo el apoyo, dedicación y esfuerzo en la realización de este trabajo.

A mis compañeros de aula, con los que he construido una hermosa amistad y quienes han hecho de este trayecto una experiencia divertida y agradable.

A Manuel Pino Batista por sus sugerencias y por estar siempre en la mejor disposición para ayudar.

A mi profesora guía Yurien por atendernos con tanta paciencia y estar siempre al pendiente de sus estudiantes.

A todo el grupo de profesores de los departamentos de Física y de Matemática de la Universidad de Matanzas Sede "Juan Marinello".

A todos los profesores que me han impartido clases durante toda la carrera.

## Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo elaborar un sistema de ejercicios para contribuir al desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo grado de la Secundaria Básica "Protesta de Baraguá" del municipio Matanzas, estableciendo los fundamentos teóricos para la investigación, un estudio del estado actual de esta problemática en los estudiantes que conforman la muestra, a partir de la utilización de un sistema de métodos teóricos, empíricos y estadísticos que le permitieron a la autora desarrollar la investigación, presentando un sistema de ejercicios como resultado que han permitido el logro de los objetivos del programa de Matemática de octavo grado, además de recoger la valoración de los resultados de la implementación en la práctica escolar del sistema propuesto.

# Índice

Introducción .....	1
Capítulo I .....	5
1.1 El trabajo con las habilidades en la Educación Secundaria Básica. ....	5
1.2 El desarrollo de las habilidades matemáticas en la Educación Secundaria Básica. ....	11
1.3 Potencialidades de la unidad temática “Igualdad de triángulos” para el desarrollo de la habilidad demostrar. ....	19
Capítulo II .....	24
2.1 Valoración estado actual del desarrollo de la habilidad demostrar. ....	24
2.2 Fundamentación del sistema de ejercicios para el desarrollo de la habilidad demostrar en la unidad temática “Igualdad de triángulos” de Octavo grado. ....	29
2.3 Constatación de los resultados obtenidos luego de la aplicación en la práctica del sistema de ejercicios. ....	40
Conclusiones .....	44
Recomendaciones .....	45

# INTRODUCCIÓN

En los últimos años la política educacional ha estado orientada a formar ciudadanos con una cultura general integral y con un pensamiento humanista, científico y creador que le permita adaptarse a los cambios de contexto y resolver problemas de interés social con una ética y actitud crítica y responsable, a tono con las necesidades de una sociedad que lucha por desarrollarse y mantener sus ideales y principios en medio de enormes dificultades y desafíos.

En la actualidad se están realizando en los diferentes subsistemas de Educación transformaciones con el propósito de adecuar la escuela a las exigencias actuales de la sociedad. A la vez se trabaja en la introducción de nuevas concepciones que permitan obtener resultados cualitativamente superiores en la educación de las futuras generaciones.

Este trabajo comienza a realizarse a partir del desarrollo de la práctica laboral sistemática, donde se pudo contactar el insuficiente desarrollo de la habilidad demostrar en la realización de ejercicios de igualdad de triángulos que presentan los estudiantes de octavo grado de la Secundaria Básica “Protesta de Baraguá”, en intercambios con los profesores que imparten la asignatura manifiestan las dificultades que presentan los estudiantes en la realización de ejercicios de demostración, también se ha podido verificar en los controles de calidad de aprendizaje. Manifestándose como principales insuficiencias las siguientes:

- Prefijar el criterio de igualdad a utilizar sin tener en cuenta los datos que se aportan en el ejercicio.
- No identificar en figuras compuestas los triángulos que deben seleccionar para realizar la demostración.
- No poder determinar con precisión los elementos homólogos.
- No representar adecuadamente la demostración, es decir, escribirla en dos columnas donde en una de ellas aparecen detallados los pasos de la demostración y en la otra la fundamentación correspondiente a cada paso.

Las insuficiencias referidas muestran la contradicción entre el estado actual y el estado deseado. Como consecuencia de las reflexiones realizadas, se determinó el siguiente **problema científico** a investigar:

¿Cómo contribuir al desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo grado de la Secundaria Básica "Protesta de Baraguá" municipio Matanzas?

El **objeto** de esta investigación es el desarrollo de la habilidad demostrar y el campo de acción el desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo grado Secundaria Básica "Protesta de Baraguá" municipio Matanzas.

En correspondencia con el problema planteado, se formula como **objetivo** de este trabajo es elaborar un sistema de ejercicios para contribuir al desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo grado de la Secundaria Básica "Protesta de Baraguá" municipio Matanzas.

Para lograr este objetivo se propone dar respuesta a las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Cuáles son los fundamentos teóricos que sustentan el desarrollo de la habilidad demostrar?
2. ¿Cuál es el estado actual que manifiesta el desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo grado de la Secundaria Básica "Protesta de Baraguá" municipio Matanzas?
3. ¿Qué sistema de ejercicios implementar para contribuir al desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo grado de la Secundaria Básica "Protesta de Baraguá" municipio Matanzas?
4. ¿Qué resultados se obtienen al aplicar un sistema de ejercicios para contribuir al desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo grado de la Secundaria Básica "Protesta de Baraguá" municipio Matanzas?

Para responder las preguntas formuladas es necesario cumplimentar las siguientes **tareas científicas**:

1. Determinación de los fundamentos teóricos que sustentan el desarrollo de la habilidad demostrar.
2. Caracterización del estado actual que manifiesta el desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo



grado de la Secundaria Básica "Protesta de Baraguá" municipio Matanzas.

3. Elaboración de un sistema de ejercicios para contribuir al desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo grado de la Secundaria Básica "Protesta de Baraguá" municipio Matanzas.
4. Comprobación en la práctica los resultados en la aplicación del sistema de ejercicios para contribuir al desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en los estudiantes de octavo grado de la Secundaria Básica "Protesta de Baraguá" municipio Matanzas

La población está conformada por los 180 estudiantes de octavo grado de la escuela Secundaria Básica "Protesta de Baraguá", los 2 profesores que imparten la asignatura Matemática en el grado y el jefe de grado. La muestra se selecciona de forma intencionada y la conforman 30 estudiantes del grupo octavo tres, los 2 profesores de Matemática del grado y el jefe de grado.

El **método materialista - dialéctico** operó como método filosófico general, que orientó la investigación y sirvió de sustento al sistema de métodos empleados para cumplir las tareas de investigación trazadas.

Del nivel teórico se utilizó el método **histórico - lógico** que permitió el análisis de las tendencias del desarrollo del trabajo.

El método **Analítico – Sintético** permitió el estudio de los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el proceso de enseñanza – aprendizaje y el análisis de los resultados obtenidos en los instrumentos y técnicas aplicados.

Fue necesario el empleo de la **inducción – deducción** para la fundamentación del problema de investigación y la propuesta de solución, así como lograr la generalización del estudio y la factibilidad de la implementación del sistema de ejercicios para el desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos

El método de **modelación** garantizó el diseño del sistema de ejercicios para para el desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos

Los **métodos del nivel empírico** se aplicaron para verificar el estado actual en la comprensión del texto de los problemas aritméticos en séptimo grado **Análisis documental**: Facilitó el trabajo de estudio de la documentación relacionada con el problema, permitiendo el estudio a profundidad del mismo.

**Observación:** se realizaron observaciones al desempeño del trabajo de los alumnos en las libretas para determinar qué tipos de ejercicios se realizan en clase, cuales se orientan para el trabajo independiente para favorecer el desarrollo de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en octavo grado.

**La entrevista:** Como vía para la recogida de información referida al nivel de preparación de los profesores en el trabajo con la habilidad demostrar Igualdad de triángulos en octavo grado.

Realización de **pruebas pedagógicas** para conocer el estado actual de la habilidad demostrar Igualdad de triángulos. Además, como métodos **estadísticos** para el procesamiento de la información se utiliza el análisis porcentual para el trabajo con los datos del diagnóstico en los instrumentos aplicados.

La **novedad científica** de este trabajo se manifiesta en los siguientes aspectos:

- En el aspecto teórico se integran los elementos fundamentales sobre el trabajo con las habilidades generales y específicas de la Matemática, en particular la habilidad demostrar, al sintetizarse en el capítulo 1, aspectos esenciales de la temática que han sido expuestos desde diferentes puntos de vista en la literatura especializada.
- En el aspecto práctico se propone un sistema de ejercicios para lograr el desarrollo de la habilidad demostrar igualdad de triángulos, en el sistema se plantean ejercicios dirigidos a cada una de las invariantes funcionales de la habilidad demostrar lo que permite la automatización de las acciones y operaciones de la habilidad.

# **CAPÍTULO I**

## **FUNDAMENTOS TEÓRICOS QUE SUSTENTAN EL DESARROLLO DE LA HABILIDAD DEMOSTRAR EN LA ASIGNATURA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA BÁSICA.**

Es propósito de este capítulo establecer los fundamentos teóricos esenciales que sustentan el desarrollo de la habilidad demostrar, lo que da respuesta a la pregunta científica 1 de esta tesis.

### **1.1 El trabajo con las habilidades en la Educación Secundaria Básica.**

El proceso de desarrollo de habilidades es un proceso cognoscitivo generalizado que transcurre de la misma forma para las diferentes habilidades particulares que se fundamenta en la teoría de la formación de las acciones. La realización didáctica de esta fase de formación y control de la acción trata de la estructuración del proceso de ejercitación con el objetivo de la formación y el perfeccionamiento de la acción hasta su automatización. En el proceso de enseñanza es de interés conocer de qué modo ha de organizarse y desarrollarse, para asegurar conocimientos sólidos y profundos en los alumnos y motivarlo para su constante perfeccionamiento. Para ello hay que ver su estructura como un sistema que se determina por la lógica del proceso docente educativo, que expresa el orden o secuencia de pasos de la enseñanza aprendizaje para la asimilación de los conocimientos y el desarrollo de las habilidades y capacidades. En la enseñanza de la Matemática se realizan un gran número de acciones mentales: se elaboran teoremas, se definen conceptos, se realizan demostraciones y construcciones geométricas, se resuelven problemas entre otras. Solo que estas acciones no están dadas de inmediato, se forman según determinadas leyes.

El término habilidad ha sido trabajado por diferentes investigadores y estudiosos de la personalidad del hombre. Se realiza a continuación un análisis de algunas caracterizaciones ofrecidas por algunos especialistas en la temática.

“Las habilidades constituyen el dominio de acciones (psíquicas y prácticas) que permiten una regulación racional de la actividad con ayuda de los conocimientos y hábitos que el sujeto posee (habilidad ~ saber hacer), son el resultado de la

sistematización de las acciones subordinadas a su fin consciente. Le permiten al hombre poder realizar una determinada tarea” (Brito, 1987, p.51)

“Habilidad es aquella formación psicológica ejecutora particular constituida por el sistema de operaciones dominadas que garantizan la ejecución del sujeto bajo control consciente”. (Brito,1987, p.6) “Habilidad significa el dominio de un sistema complejo de actividades psíquicas y prácticas, necesarias para la regulación correspondiente de la actividad, de los conocimientos y hábitos que posee el sujeto” (Petrovski, , p.188 ). La autora asume en la investigación esta definición por entender que recoge los elementos centrales y esenciales que explican de manera precisa la definición de habilidad como sinónimo de saber hacer.

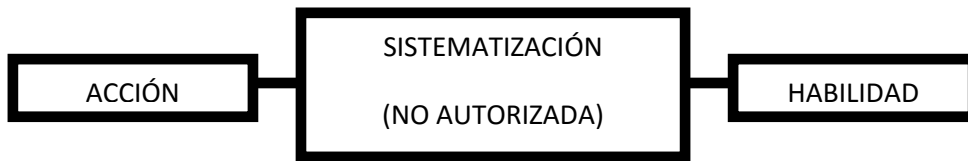
La habilidad, según lo expuesto anteriormente, se ha ido caracterizando como expresión de la preparación del alumno para elaborar y aplicar el sistema de acciones inherente a una determinada actividad que es lo que permite al profesor verla en todo el proceso de enseñanza y no limitarla a los eslabones del proceso destinados a la asimilación de lo aprendido.

En estas definiciones de habilidades se pueden apreciar puntos comunes dentro de los que significamos:

1. La relación de esta con las acciones.
2. Sobre la base de conocimientos y hábitos adquiridos.

Las habilidades permiten al hombre al igual que los hábitos, poder realizar una determinada tarea. Así en el transcurso de la actividad, ya sea como resultado de una repetición o de un ejercicio, de un proceso de enseñanza dirigido, el hombre no solo se apropia de un sistema de métodos y procedimientos que pueden posteriormente utilizar en el marco de varias tareas; sino que también comienza a dominar paulatinamente acciones, aprende a realizarlas cada vez más perfectas y racional apoyándose en los medios que ya conoce. Puesto que el dominio de estas acciones repercute directamente en el resultado de su actividad; en la medida en que sean perfeccionadas estas acciones la realización de la actividad será la más adecuada.

La realización de aquellas acciones que comprenden la habilidad requiere siempre de una regulación consciente por parte del sujeto.



Las habilidades deben manifestarse a través de los modos de actuación del sujeto, los que se forman y desarrollan en la actividad. “La formación de habilidades transita por diferentes etapas:

- Comprensión del modo de actuar y del orden en que deben realizarse las acciones.
  - Asimilación consciente del modo de actuación.
  - Fijación del modo de actuación.
  - Aplicación del modo de actuación – la habilidad – a nuevas situaciones.”
- (Molina, 2004, p.8)

“La esencia de la actividad mental radica en que esta es una actividad de orientación. Esta actividad abarca las condiciones del comportamiento en la realidad objetiva y, a su vez, dirige el comportamiento del hombre de acuerdo con esas condiciones reales. El hombre está continuamente en una interrelación con el mundo circundante. Por eso es que constantemente, en interés de su propia vida, y con ayuda de acciones materiales o ideológicas, tiene que dar solución a algún que otro problema”. (Galperin, 1981, p.12)

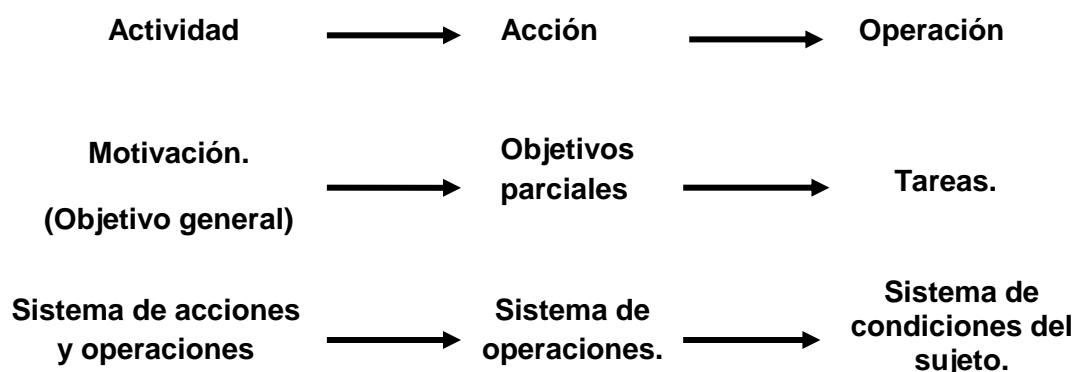
Se denomina acción “al proceso que se subordina a la representación de aquel resultado que había de ser alcanzado” (Álvarez, 1989, p.23). La acción es la piedra angular de toda actividad humana. El contenido de la acción está constituido, por una parte, por la transformación real de un objeto inicial o de una situación inicial en un producto deseado o en una situación deseada. A esa parte de la acción se le llama *fase de realización* de la acción. El contenido de la acción constituye un mecanismo de regulación y de dirección. Esta es la llamada *fase de orientación* de la acción, la cual siempre será mucho más importante si las condiciones de las tareas a resolver son nuevas desde algún punto de vista, y la acción ya no conduce al objetivo. El resultado de la formación de la acción es una acción mental, generalizada, abreviada y automatizada. La base de la

orientación se convierte en *saber*, el desarrollo de la acción se convierte en poder (capacidades, habilidades, etc.). El proceso de aprendizaje es la unidad de apropiación y aplicación. Los alumnos asimilan el saber y el poder aplicándolos constantemente.

El aprendizaje presupone la apropiación del conocimiento necesario para ejecutar una o varias acciones y ejercitarlas con la finalidad de que éstas se transformen en una habilidad, en correspondencia con el conocimiento adquirido. El resultado de esta transformación depende del conocimiento que se tenga sobre la acción en sí. No es posible que se logre un aprendizaje eficiente sin tener un conocimiento de cómo actuar. Si un estudiante no tiene idea de las acciones que debe realizar para resolver un ejercicio que se le proponga, hará muchos intentos fallidos al procurar resolverlo si no dispone de manera consciente de la orientación para ello.

La estructura del proceso de enseñanza aprendizaje presupone, que el alumno primero asimile cada una de las acciones, posteriormente esté en condiciones de ordenarlas e integrarlas en un sistema, lo que expresa que posee la habilidad, para luego con la repetición (mediante ejercicios) alcanzar niveles superiores de desarrollo. Pero a su vez las acciones se realizan a través de operaciones. Estas son formas de actuación que responden a condiciones, medios y potencialidades del individuo, que mediatizan y le dan un carácter singular a las vías que cada sujeto sigue al tratar de alcanzar el objetivo propuesto; al intentar realizar la acción.

“La operación es aquella ejecución de la actuación que se lleva a cabo como componente de una acción, sin que por sí misma posea un fin consciente. Es un producto de la transformación de una acción anterior en operación, debido al dominio alcanzado en la misma, lo cual permite una menor participación de la conciencia, al no necesitar la concentración de la atención del hombre en la obtención de un objetivo parcial.



Las formas de apropiación de la actividad por parte del sujeto se explican a través de los conceptos de habilidades, hábitos y capacidades. La manera particular en que cada persona se apropia de conocimientos, habilidades y hábitos determina las formas de conducta y actuación que sigue para el logro de un objetivo determinado. (Molina, 2004, p.9) “La experiencia indica que existen algunos requisitos a tener presentes para la formación y desarrollo de habilidades:

- Complejidad de la ejecución: esta está dada por el grado de dificultad de los conocimientos o de las ejecuciones, así como del contexto de actuación. Hay que tener en cuenta estos elementos por lo que es recomendable trabajar primero las ejecuciones más simples y después las más complejas.
- Frecuencia de la ejecución: dada por el número de veces que se realizan las acciones o las operaciones. Si son muy pocas, la habilidad o el hábito no se consolidan; si son excesivas también el efecto es negativo.
- Flexibilidad de la ejecución: dada por el grado de variabilidad de los conocimientos y los contextos de actuación en que son aplicadas las habilidades y los hábitos.
- Retroalimentación del resultado: cuando se está sistematizando la habilidad o el hábito se requiere su perfeccionamiento continuo, por eso, cada intento requiere que el sujeto conozca el resultado, valore el error y repita el intento, procurando corregirlo correctamente. En la etapa de su formación requiere de la ayuda del maestro.
- Evitar el cansancio, la monotonía, la fatiga: todos estos elementos disminuyen la capacidad de trabajo y conspiran en contra de la adquisición de habilidades hábitos y capacidades.
- Fomentar el papel de la motivación y la conciencia: la presencia de estos factores facilita mucho la adquisición de las ejecuciones, resultan elementos imprescindibles en su formación. (Barreras, 2003, p.7)
- Cada uno de los elementos que componen la actuación de una persona puede llevarse a cabo a través de distintas ejecuciones, y desde luego, si esto es así, resulta muy complejo y difícil sistematizarlas. Por eso, para el

tratamiento didáctico de la formación y desarrollo de estas estructuras psicológicas se hace necesario buscar aquellas ejecuciones necesarias, esenciales, e imprescindibles de ser sistematizadas, a ellas se les llama invariantes funcionales de la ejecución. “La invariante (habilidad para resolver problemas matemáticos) como hilo conductor se estructura a través de las habilidades matemáticas básicas (éstas a su vez de las elementales) y se perfecciona en la medida en que éstas últimas alcanzan un nivel superior de desarrollo (Ferrer y Rebollar, 2000, p.15). Cada habilidad logra su óptimo desarrollo cuando el alumno es capaz de reconocer sus componentes, sus dependencias y relaciones, que son los que les permiten orientarse en el cumplimiento del objetivo general.

Por consiguiente, otro aspecto metodológico importante es la necesidad de propiciar situaciones de aprendizaje que permitan a los estudiantes, en dependencia de sus propios recursos, realizar las invariantes funcionales de una determinada ejecución del modo que le sea más cómodo y eficiente. Esto posibilita crear un ambiente de aceptación y confianza en el aula, permite la atención a las diferencias individuales. Se pudieran exponer algunos criterios que pueden ayudar a evaluar el grado de desarrollo de la actuación y la creatividad de los alumnos, entre ellos se señalan:

- responde en clase de forma poco común;
- hace preguntas que muestran que ha elaborado un problema;
- emite juicios que implican una valoración de su desempeño;
- no sólo obtiene buenos resultados, ejecuta con calidad;
- controla su ejecución sobre la base del programa de acción a modo de representaciones internas que elaboró de forma independiente o con poca ayuda;
- trabaja de forma independiente;
- defiende sus criterios;
- tiene criterios arriesgados.

“Sobre la base del resultado obtenido en estos indicadores el profesor puede clasificar la actuación (habilidad o hábito) en una de las siguientes etapas de desarrollo:



- Habilidad inicial: el sujeto conoce lo que va a hacer, sigue pasos para la ejecución, pero éstos carecen de secuencia y no se corresponden con el sistema de invariantes funcionales que se les presentó.
- Habilidad insuficientemente desarrollada: el sujeto conoce lo que va a realizar y la secuencia de invariantes funcionales que se le presentó, pero no puede ejecutar dichos pasos o elementos.
- Habilidad general: el sujeto conoce lo que va a hacer, conoce la secuencia de invariantes funcionales y la utiliza, pero no ejecuta todos los elementos correctamente.
- Habilidad desarrollada: conoce lo que va a hacer y la secuencia de invariantes funcionales y ejecuta con eficiencia todos los elementos.
- Maestría: conoce lo que va a hacer y la secuencia de invariantes funcionales y ejecuta con eficiencia y perfección dicha secuencia y la aplica en condiciones nuevas con independencia. (Barreras, 2003, p.8)

## **1.2 El desarrollo de las habilidades matemáticas en la Educación Secundaria Básica.**

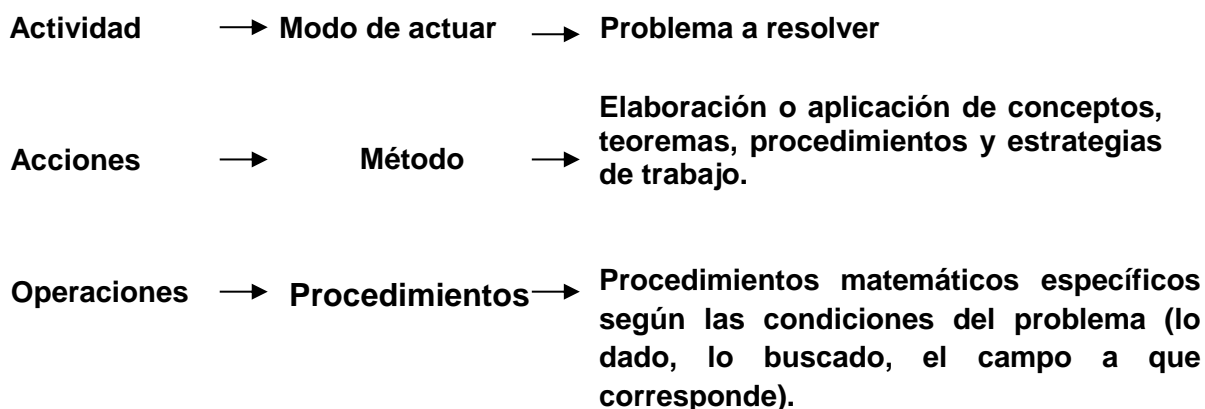
Las habilidades matemáticas, son reconocidas por muchos autores, como aquellas que se forman durante la ejecución de las acciones y operaciones que tienen un carácter esencialmente matemático. A partir del análisis realizado acerca del concepto de habilidad y sus principales tendencias, del papel de la resolución de problemas en el aprendizaje de la Matemática y lo que caracteriza la actividad matemática del alumno concluimos que: “La habilidad matemática es la construcción, por el alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, utilizar estrategias de trabajo, realizar razonamientos, juicios que son necesarios para resolver problemas matemáticos (Ferrer y Rebolgar, 2000, p.18). Estas expresan, por tanto, no sólo la preparación del alumno para aplicar sistemas de acciones (ya elaborados) inherentes a una determinada actividad matemática, ellas comprenden la posibilidad y necesidad de buscar y explicar ese sistema de acciones y sus resultados, de describir un esquema o programa de actuación

antes y durante la búsqueda y la realización de vías de solución de problemas en una diversidad de contextos; poder intuir, percibir el posible resultado y formalizar ese conocimiento matemático en el lenguaje apropiado.

Este concepto indica, que no es suficiente pensar en la preparación del alumno para multiplicar fracciones, demostrar un teorema o resolver una ecuación, también atiende a sus posibilidades para explicar el modo de actuar, proyectar el método o procedimiento a emplear, estimar las características del resultado que le permita comparar el objetivo con lo logrado y poder escribirlo en el lenguaje apropiado, en las diferentes formas de representación.

“Las precisiones sobre el concepto de habilidad matemática tienen como premisas lograr claridad acerca del objeto matemático sobre el que actúa el individuo (concepto o definición, teorema, demostración, procedimiento de solución, etc.) y la delimitación de la acción que sobre dicho objeto va a ejecutar según el propósito o fin a lograr. Esto obliga a reflexionar sobre el significado que en el orden intelectual y lógico tiene una u otra acción, por ejemplo: describir, identificar, explicar, relacionar, generalizar, resolver, etc (Ferrer y Rebollar, 2000, p.19). Cada contenido matemático, por su naturaleza, exige un modo de actuar con características específicas, por tanto las habilidades matemáticas han de expresar esas particularidades teniendo en cuenta el campo a que se refieren y los niveles de sistematicidad y complejidad de la actividad a ejecutar. Un indicador que se destaca es que la habilidad se ha formado cuando el sujeto es capaz de integrarla con otras en la determinación de vías de solución, cuando deja de ser un eslabón aislado para ubicarla en un contexto, ya que en esas condiciones sólo alcanza potencialidades muy limitadas que no permiten enfrentar una diversidad de situaciones en un contexto dado. Al estudiar la actividad matemática, en su carácter especial, ella se materializa cuando el individuo es capaz de plantearse, interpretar y resolver un problema o situación que requiere de los medios que ofrece la Ciencia Matemática. La sistematización del conocimiento del objeto matemático se produce al nivel de los conceptos, de las proposiciones y de los métodos de solución, de ahí que la demostración de teoremas, proposiciones, etc. se identifique como una importante forma de sistematización de la actividad matemática.

La actividad matemática, como forma especial de actividad puede estructurarse de la siguiente manera:



Como definición de habilidad matemática, se asume en esta investigación la siguiente: “La habilidad matemática como la construcción y dominio, por parte del alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, emplear estrategias de trabajo, realizar razonamientos, emitir juicios y resolver problemas matemáticos” (Ferrer, 2002, p.62)

Se asume esta definición por las siguientes razones:

- Es una acción que ejecuta el alumno ante una actividad matemática y toma conciencia del por qué la realiza.
- Moviliza los conocimientos que posee para buscar otros conocimientos y resolver problemas.
- Permiten la posibilidad y necesidad de buscar y explicar el sistema de acciones y sus resultados.
- Describir un esquema o programa de actuación antes y durante la búsqueda y la realización de vías de solución de problemas.

Las habilidades matemáticas no solo expresan la preparación del alumno para aplicar sistemas de acciones (ya elaborados) propios de una determinada actividad matemática; sino que ellas comprenden la posibilidad y necesidad de buscar y explicar ese sistema de acciones y sus resultados, de describir un esquema o programa de actuación antes y durante la búsqueda y la realización

de vías de solución de problemas en una diversidad de contextos; poder intuir, percibir el posible resultado y formalizar ese conocimiento matemático en el lenguaje apropiado, es decir, comprende el proceso de construcción y el resultado del dominio de la actividad matemática.

Al hablar de habilidad se considera un complejo formado por conocimientos específicos, sistemas de operaciones, conocimientos y operaciones lógicas. En este sentido general se considera que un alumno posee determinada habilidad cuando “aprovecha los datos, conocimientos o conceptos que se tienen, operar con ellos para la elucidación de las propiedades sustanciales de las cosas y la resolución exitosa de determinadas tareas teóricas o prácticas.” ( Petrovski, , p.188)

“Puede señalarse que en las habilidades matemáticas se deben considerar tres componentes fundamentales:

- Conocimientos matemáticos.
- Sistema de operaciones de carácter matemático.
- Conocimiento y operaciones lógicas.

El dominio de una habilidad implica el de cada uno de estos elementos. Esto significa que para desarrollar una habilidad no es suficiente la repetición de la parte práctica de la acción. Es necesario que se tenga en cuenta además la parte que corresponde al pensamiento teórico, el alumno debe ser capaz de:

- Identificar las características y propiedades de los conocimientos que le sirven de base.
- Comprender la orientación necesaria para realizar la acción (sucesión de pasos).
- Poseer los conocimientos y operaciones lógicas que enlazan el plan de acción (procedimiento) con los conocimientos y su ejecución. (Molina, 2004, p.15)

El contenido de las acciones y operaciones que se ejecutan en la actividad matemática comprenden aquellos recursos de los que debe disponer el alumno, así como las estrategias y métodos que le permitan desplegar ese modo de actuar. “Teniendo en cuenta el objeto matemático sobre el que se ejecuta ese

modo de actuación, de carácter complejo, se han reconocido los siguientes componentes del contenido de la actividad matemática:

- Conceptos matemáticos y sus propiedades.
- Procedimientos de carácter algorítmico.
- Procedimientos de carácter heurístico.
- Situaciones problemas de tipo intra y extramatemáticas.

Atendiendo a las acciones y operaciones que se ejecutan en cualquier actividad matemática, especialmente su contenido descrito en los componentes señalados anteriormente, permiten caracterizar y distinguir las habilidades matemáticas siguientes:

1. Habilidades matemáticas referidas a la formación y utilización de conceptos y propiedades.
2. Habilidades matemáticas referidas a la elaboración y utilización de procedimientos algorítmicos a partir de algoritmos conocidos.
3. Habilidades matemáticas referidas a la utilización de procedimientos heurísticos.
4. Habilidades matemáticas referidas al análisis y solución de situaciones problemáticas de carácter intra y extramatemáticas. (Ferrer y Rebollar, 2000, p.19)

A partir de la caracterización de la actividad matemática y su estructura; además de tener en cuenta los tres niveles de sistematicidad de dicha actividad (general, particular y singular) se ha podido diseñar un sistema de habilidades matemáticas en el que se definen las habilidades que se corresponden con cada nivel, tomando como referencia el papel de la resolución de problemas en la orientación y ejecución de dicha actividad.

“Las habilidades matemáticas, en esos tres niveles de sistematicidad de la actividad matemática las caracterizamos de la forma siguiente:

NIVELES DE SISTEMATICIDAD		HABILIDADES MATEMÁTICAS
General	-----	Habilidad para problemas matemáticos.
Particular	-----	Habilidades matemáticas básicas.
Singular	-----	Habilidades matemáticas elementales.

El que las habilidades matemáticas se formen bajo la orientación de la habilidad para resolver problemas matemáticos y que el alumno la forma a partir de los problemas concretos, que se plantean para su actividad de aprendizaje, debe conllevar a que cada parte se vea como componente del sistema y no como un proceder aislado.

Las habilidades matemáticas básicas son las construcciones que hace el alumno de métodos de solución o análisis, de un problema matemático, constituyen objetivos parciales en la preparación de los alumnos para resolver determinados problemas. En ellas se pueden concretar métodos de solución para uno o varios tipos de problemas. El contenido de esta habilidad matemática refleja la exigencia en cuanto a la sistematización de las habilidades referidas a la elaboración o utilización de conceptos, propiedades, procedimientos algorítmicos o heurísticos que posibilitan el desarrollo de la habilidad general porque brindan métodos de solución para el o los problemas que al alumno se plantean.

“Los rasgos que caracterizan las habilidades matemáticas básicas son:

- Responden a un eslabón o nivel de desarrollo parcial de la habilidad general.
- Indican el nivel de aplicación exigido a conceptos, relaciones y procedimientos que se sistematizan en un método de solución.
- Delimitan la acción a ejecutar (demostrar, calcular, construir, explicar, fundamentar, etc.).
- No tienen un carácter específico al ser aplicable en una diversidad de situaciones.
- Expresan el nivel de profundidad con que se deben elaborar y utilizar los conceptos, teoremas y procedimientos que se sistematizan en el método de solución. (Ferrer y Rebolgar, 2000, p.20)

Ejemplos de habilidades matemáticas básicas, en relación con la habilidad general señalada son: demostrar igualdad de figuras, construir triángulos y cuadriláteros, calcular áreas y perímetros de triángulos y cuadriláteros, etc. Las habilidades matemáticas elementales son las construcciones de procedimientos específicos derivados directamente del modo de operar con los conceptos,

teoremas o procedimientos que al establecer las conexiones entre ellos conforman métodos de solución, constituyen la base de las habilidades matemáticas básicas. En ellas se encuentran las operaciones de cálculo, por ejemplo, que llegan a alcanzar un alto grado de sistematización en los alumnos de la escuela media. Esta habilidad refleja las condiciones concretas, particulares, que son necesarias en las habilidades referidas a la elaboración o utilización de los conceptos, propiedades, procedimientos algorítmicos o heurísticos que debe desarrollar el alumno.

Se destacan también como habilidades de carácter elemental el reconocimiento de propiedades de figuras geométricas, realizar construcciones geométricas fundamentales, etc., que se ejecutan en el contexto de las habilidades matemáticas básicas que se forman durante toda la formación geométrica del alumno.

“Los rasgos que caracterizan las habilidades matemáticas elementales son:

- Tienen un carácter específico con relación al modo de actuar dado en la habilidad general.
- Se determina de la acción a realizar directamente con conceptos, teoremas y procedimientos.
- Indican condiciones (previas o no) necesarias para desarrollar la habilidad matemática básica. (Ferrer y Rebollar, 2000, p.21)

“La habilidad matemática general, como reflejo de lo que debe saber hacer el alumno en una unidad temática determina un enfoque sistémico de las habilidades matemáticas atendiendo a los siguientes aspectos:

- De ella se determina el objetivo central del sistema de conocimientos y habilidades.
- Se determinan objetivos parciales a través de los cuales se forma y desarrolla la habilidad general.
- Se establecen las relaciones de dependencia o no entre los conocimientos y habilidades matemáticas básicas y elementales que la conforman.

- Se logra que el contenido de la unidad no sea visto clase a clase, de habilidad en habilidad, sino como un todo más complejo que le da salida al objetivo central (habilidad general).
- El establecimiento de relaciones entre sistemas de habilidades de mayor y menor grado de complejidad se alcanza viendo cada unidad como un sistema que además se relaciona con otros de los diferentes grados y niveles de enseñanza.
- El establecimiento de las relaciones entre los elementos del sistema da la posibilidad de que el alumno observe modos alternativos de respuestas a los problemas esenciales (habilidad general). (Molina, 2004, p.15)

El enfoque de sistema del proceso de formación de habilidades matemáticas orienta su estudio de forma integral a revelar las diversas relaciones, propiedades, componentes y cualidades que se manifiestan en el proceso de desarrollo, los estados o niveles por los que transita este proceso y que se materializan en la actuación del alumno. Este se sustenta en el principio de la sistematización, pero a diferencia de éste, significa que el objeto de estudio se estructura como un conjunto de invariantes, las cuales constituyen la expresión de lo esencial del contenido y guían el proceso de búsqueda de los restantes conocimientos que le dan precisión, profundidad y solidez.

“En este proceso se observan tres etapas que responden a los eslabones didácticos del proceso docente educativo y su dinámica que permiten describir la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje sobre la base del papel de la resolución de problemas como eje de la formación matemática.

1. Etapa de planteamiento, comprensión y análisis de los problemas esenciales (orientación del sistema de habilidades matemáticas);
2. Etapa de elaboración, ejercitación y sistematización de las habilidades matemáticas (ejecución del sistema de habilidades);
3. Etapa de aplicación del sistema de conocimientos y habilidades a la resolución de problemas variados (perfeccionamiento de la ejecución del sistema de habilidades). (Molina, 2004, p.17)



La formación del sistema de habilidades matemáticas es un proceso planificado y dirigido por el profesor, tiene su término en la actuación del alumno y es ahí donde, en última instancia, se evalúa la eficiencia de dicho proceso.

### **1.3 Potencialidades de la unidad temática “Igualdad de figuras geométricas en el plano” para el desarrollo de la habilidad demostrar.**

Cada contenido matemático, por su naturaleza, exige un modo de actuar con características específicas, por tanto, las habilidades matemáticas han de expresar esas particularidades teniendo en cuenta el campo a que se refieren y los niveles de sistematicidad y complejidad de la actividad a ejecutar. Una habilidad matemática de carácter general es, por ejemplo: Resolver problemas geométricos relacionados con triángulos y cuadriláteros, de carácter intra y extramatemáticos, de cálculo, de demostración y construcción, utilizando los teoremas de igualdad de triángulos.

Esta habilidad, en su carácter general, sistematiza también las habilidades docentes, lógicas o intelectuales; que guían el proceso de búsqueda y planteamiento de solución. Así se destacan habilidades como identificar, observar, describir, modelar, calcular, fundamentar, valorar, etc., que están presentes en la comprensión y búsqueda de vías de solución, en su descripción y finalmente en la valoración de los resultados.

La habilidad demostrar, es establecer una sucesión finita de pasos, para fundamentar la veracidad de una proposición o su refutación. Esta habilidad comprende, tanto la posibilidad de fundamentar toda la afirmación que hagamos, es decir, esgrimir argumentos sólidos que confirmen la veracidad de una proposición, como también está referida a un razonamiento correctamente estructurado que contenga un sistema de deducciones. A esto último se hace referencia cuando en particular se trata de demostrar teoremas y otras proposiciones.

“Para desarrollar la habilidad demostrar en las clases se debe tener en cuenta:

- La caracterización el objeto de demostración.
- La selección de los argumentos que corroboran el objeto de demostración.

- La elaboración de los razonamientos que relacionan los argumentos que demuestran la veracidad del objeto de demostración.” (ISP “Juan Marinello”, 2004, p.3)

Desde edades tempranas, y de forma propedéutica, el alumno comienza a identificar diferentes figuras geométricas, entre las cuales se encuentra el triángulo. De esta figura conoce, a partir del primer grado, los elementos que lo caracterizan, a saber, sus lados y sus ángulos. En cuarto grado se define y conoce la clasificación según sus lados; pero no es hasta sexto grado que realiza la clasificación de esta figura atendiendo a sus ángulos. En este mismo grado estudia las relaciones fundamentales entre sus lados y ángulos.

“En Séptimo Grado se comparan las figuras estudiadas sobre la base de sus características, estableciendo sus semejanzas y diferencias, es decir, se sistematizan los conocimientos que poseen los alumnos sobre las figuras geométricas planas fundamentales, y en particular, se estudian las rectas notables en un triángulo, es decir, se definen, se analizan las propiedades características y se trazan las mediatrices, las alturas, las medianas y las bisectrices de un triángulo.” (Programa de Matemática 7º, 2006, p.30)

No es hasta el Octavo grado que los alumnos, “al estudiar la igualdad de triángulos, poseen un medio matemático apropiado para comenzar a realizar ejercicios sencillos de demostración” (Programa de Matemática 8º, 2006, p.31).

La contribución esencial que tiene el tratamiento de este contenido en la escuela está vinculada con el desarrollo del pensamiento lógico mediante la búsqueda de la idea de la demostración. Es, en este momento, que los alumnos del nivel básico comienzan a realizar demostraciones matemáticas de manera formal; es precisamente ante este tipo de ejercicios donde se presentan marcadas dificultades; por lo que, en primer lugar, hay que reflexionar sobre la forma en que este contenido es tratado.

Lo cual se puede determinar teniendo en cuenta los objetivos y orientaciones metodológicas de la unidad temática seleccionada:

Objetivos de la unidad temática “Igualdad de figuras geométricas en el plano”

- El concepto de igualdad de figuras, a través del análisis de objetos de la vida cotidiana, de su entorno escolar y social. Igualdad de segmentos, de

ángulos y de triángulos, destacando la significación de la superposición, y la igualdad de todas las magnitudes que expresan sus medidas.

- Sistematización sobre los movimientos del plano: reflexión respecto a la recta, traslación y simetría central, destacando como propiedad común la conservación de la distancia entre dos puntos cualesquiera después de la transformación. Caracterización y propiedades. Figuras simétricas. Concepto de igualdad geométrica a partir de movimientos. Aplicación de las propiedades de los movimientos del plano para fundamentar la igualdad de figuras planas.
- Criterios sobre igualdad de triángulos. Búsqueda de los criterios por vía reductiva. Demostración del teorema I.a.I. Ejercicios y problemas en los que se realicen demostraciones sencillas aplicando los criterios sobre igualdad de triángulos para fundamentar algunas de las propiedades de los cuadriláteros que fueron tratadas intuitivamente en el grado precedente, así como problemas prácticos de cálculo geométrico. Construcción de triángulos aplicando los criterios de igualdad de triángulos.

En las orientaciones metodológicas de la unidad se hará una sistematización sobre los movimientos del plano, ya que el concepto de igualdad geométrica da la posibilidad de superposición entre figuras; concepto este que será reforzado a partir de la aplicación de un movimiento que transforma una figura en otra. Como aspecto central de la unidad está la igualdad de triángulos, esta se hará partiendo de la definición de igualdad geométrica donde el alumno debe ser capaz de comprender que dos triángulos son iguales si se pueden superponer de manera que coincidan sus vértices, esta idea se refuerza por la aplicación de un movimiento que transforma uno en el otro.

“Se les debe proponer a los alumnos que construyan diferentes triángulos y que los comparen para que lleguen a la conclusión de que es necesario probar la igualdad de al menos tres elementos, pero que no pueden ser cualesquiera. Se recomienda que el profesor deba llevar juegos de planillas previamente confeccionados para facilitar el proceso de búsqueda de los tres teoremas de igualdad de triángulos o pedirles a los alumnos que construyan triángulos dadas las condiciones que plantean los teoremas, es decir, dos ángulos y un lado, o

dos lados y un ángulo o tres lados. En elaboración conjunta se analizará a partir de aquí los tres casos posibles (tres lados, dos lados y el ángulo comprendido y un ángulo y dos lados adyacentes respectivamente). Una vez finalizado el proceso de búsqueda se debe formular cada uno de los teoremas en la forma si, entonces. Una vez encontrados los tres teoremas se pasará al análisis y resolución de ejercicios de identificación y después proponer que requieren con un mayor nivel de complejidad pues en este tema se pretende, iniciar el desarrollo de habilidades en las demostraciones” (Programa de Matemática 8º, 2006, p.32).

“Por lo que se deben resolver ejercicios de cálculo geométrico y de demostración sobre propiedades de los triángulos y cuadriláteros que requieran de los criterios de igualdad, crear ejercicios vinculados con la práctica y que para su solución se requiera emplear la igualdad de triángulos, realizar ejercicios de demostración en los que se apliquen propiedades ya estudiadas y probar igualdad de lados y de ángulos para demostrar otras propiedades a partir de la igualdad de triángulos”. (Programa de Matemática 8º, 2006, p.34).

La meta a que se aspira al trabajar la igualdad de triángulos en Octavo grado es que “los alumnos sepan realizar ejercicios de cálculo geométrico y de demostración, aplicando las propiedades de los triángulos y cuadriláteros que requieran de los criterios de igualdad” (Programa de Matemática 8º, 2006, p.33). Para lograr este objetivo, el docente debe estructurar adecuadamente las acciones que debe ir desarrollando por etapas, de forma tal, que el dominio de unas constituya el aseguramiento de las siguientes.

El camino para la resolución de problemas geométricos de demostración se prepara desde los primeros grados, exigiéndoles a los niños la fundamentación de sus afirmaciones, las cuales estarán mayormente fundadas en sus experiencias prácticas. Desde el segundo ciclo de la enseñanza primaria ellos deben comprender la necesidad de las demostraciones para asegurar sus conocimientos geométricos. Deben realizar secuencias cortas de deducciones mediante la aplicación de reglas de inferencia, como base para el trabajo con las demostraciones. Este trabajo se continúa en Secundaria Básica, donde realizarán propiamente ejercicios de demostración y también algunas demostraciones de proposiciones geométricas por el método directo e indirecto.

Con el desarrollo del presente capítulo se aprecia la importancia del desarrollo de habilidades matemáticas, fundamentalmente la habilidad demostrar y cómo la asignatura Matemática está estrechamente relacionada al logro de este objetivo, para lo que es preciso una correcta planificación de la enseñanza donde la selección de los sistemas de ejercicios juega un rol fundamental.

## **CAPÍTULO II:**

### **CARACTERIZACIÓN DEL ESTADO ACTUAL DEL DESARROLLO DE LA HABILIDAD DEMOSTRAR Y SISTEMA DE EJERCICIOS PARA CONTRIBUIR A SU DESARROLLO.**

Este capítulo presenta los resultados del estado actual del desarrollo de la habilidad demostrar en los estudiantes de octavo grado ESBU “Protesta de Baraguá”, del municipio Matanzas. Se propone el sistema de ejercicios elaborado para contribuir al desarrollo de la habilidad demostrar en la unidad temática “Igualdad de figuras geométricas” y los resultados obtenidos en su aplicación, lo que responde las preguntas científicas dos, tres y cuatro de esta investigación.

#### **2.1 Estado actual del desarrollo de la habilidad demostrar en los alumnos de octavo grado de la Secundaria Básica Protesta de Baraguá.**

Para la caracterización del estado actual del desarrollo de la habilidad demostrar en los estudiantes de octavo grado de la ESBU “Protesta de Baraguá”, del municipio Matanzas., se aplicaron diferentes instrumentos y técnicas, entre ellos: prueba pedagógica, revisión de documentos, entrevista a profesores y al jefe de grado, con el propósito de recoger información sobre el comportamiento de la variable que se investiga, determinándose tres dimensiones para su estudio.

Los instrumentos aplicados se estructuran de manera que ofrezcan la información requerida sobre el comportamiento de estas dimensiones, según los indicadores establecidos. (Anexo 10)

##### **Dimensión I. Caracterización del objeto a demostrar. (COD).**

Consiste en leer el ejercicio para poder interpretar la exigencia planteada e identificar los triángulos a demostrar que son iguales.

##### **Operaciones que debe ejecutar el estudiante:**

1. Interpretación del ejercicio propuesto
2. Identificación de los triángulos a demostrar

##### **Dimensión II. Selección de los argumentos que corroboran el objeto de demostración. (SAD).**

Determina en el enunciado del ejercicio los elementos iguales a partir de las

premisas dadas y elegir el criterio de demostración para probar la igualdad de triángulos.

**Operaciones que debe ejecutar:**

1. Identificación de los elementos iguales
2. Elección de los criterios de demostración según las premisas del ejercicio.

**Dimensión III.** Elaboración de los razonamientos que relacionan los argumentos que demuestran la veracidad del objeto de demostración. **(EAVO).**

Argumentación de la igualdad de cada par de elementos seleccionados, conclusión de la igualdad de los triángulos y fundamentación del criterio utilizado.

**Operaciones que debe ejecutar:**

1. Argumentación de la igualdad de cada elemento
2. Conclusión sobre la igualdad de los triángulos
3. Fundamentación del criterio utilizado

La demostración de la igualdad de triángulos es un proceso que exige interacción del estudiante con el enunciado del ejercicio y se logra cuando los mismos pueden interpretar la relación entre las premisas y la tesis del ejercicio.

Las dimensiones declaradas están dirigidas a medir el nivel logrado por los estudiantes en este proceso.

El dominio de este proceso se comprueba mediante la siguiente escala:

- A: no clasifica en ninguna dimensión.
- B: ejecuta adecuadamente una dimensión.
- C: ejecuta adecuadamente dos dimensiones.
- D: ejecuta adecuadamente las tres dimensiones.

El nivel real de los estudiantes que conforman la muestra de investigación se comprobó aplicando una **prueba pedagógica** con carácter de diagnóstico inicial (Anexo 6) que ofreció los resultados que expresan las tablas de frecuencias absolutas y relativas confeccionadas para cada dimensión. Sobre el procedimiento para comprender problemas, los estudiantes expresan diferentes criterios y maneras de hacer, en la medición realizada se obtuvo.

Manifiestan:	Total de estudiantes ( $F_i$ )	Frecuencia relativa ( $f_i$ )	Frecuencia porcentual
Dominan los acciones	2	0,067	<b>6,7</b>
Las conocen en parte	3	0,1	<b>10</b>
No responden adecuadamente	25	0,833	<b>83,3</b>
<b>Total</b>	<b>30</b>	<b>1</b>	<b>100</b>

Los estudiantes se refieren a la igualdad de triángulos, pero no especifican los elementos homólogos ni el criterio de igualdad más conveniente según las premisas.

De las dimensiones para la comprensión se constató:

Indicadores	DIMENSIONES					
	COD		SAD		EAVO	
	$F_i$	$f_i$	$F_i$	$f_i$	$F_i$	$f_i$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>0,067</b>	<b>4</b>	<b>0,133</b>	<b>2</b>	<b>0,067</b>
<b>2</b>	<b>3</b>	<b>0,1</b>	<b>5</b>	<b>0,167</b>	<b>4</b>	<b>0,133</b>
<b>3</b>	<b>25</b>	<b>0,833</b>	<b>21</b>	<b>0,7</b>	<b>24</b>	<b>0,8</b>
<b>Total</b>	<b>30</b>	<b>1,0</b>	<b>30</b>	<b>1,0</b>	<b>30</b>	<b>1,0</b>

Leyenda: **COD**: caracterización del objeto a demostrar.

**SAD**: selección de los argumentos que corroboran el objeto de demostración.

**EAVO**: elaboración de los razonamientos que relacionan los argumentos que demuestran la veracidad del objeto de demostración.

Fue nulo el nivel de éxito manifestado en la resolución del ejercicio. En la identificación de los triángulos a demostrar, así como en la selección del criterio más conveniente según las premisas que ofrece el enunciado de ejercicio. En algunos casos no se conocen las propiedades necesarias para fundamentar la igualdad de dos elementos homólogos. No se reconocen los criterios correctamente, al utilizar ángulos no comprendidos entre los lados seleccionados o adyacentes a un mismo lado.



Según el trabajo con las dimensiones para el desarrollo de la habilidad demostrar igualdad de triángulos, los resultados fueron los siguientes.

Escala	A	B	C	D
Cantidad de estudiantes	21	3	1	5

Al analizar la información aportada por el diagnóstico la autora considera que existen las siguientes potencialidades y barreras, para el desarrollo de la habilidad demostrar igualdad de triángulos. Se determinan como potencialidades:

1. Necesidad e interés por la resolución de ejercicios.
2. Actitud responsable y estimuladora de los profesores, en mejorar las clases sobre igualdad de triángulos.

Las principales barreras están dadas en:

1. Insuficiente dominio de los conceptos y propiedades de las figuras planas.
2. Desconocer las acciones y operaciones de la habilidad demostrar igualdad de triángulos.
3. Existencia insuficiente de ejercicios para la unidad temática en el libro de texto.

#### **Resultados de la entrevista a profesores de Matemática** (Ver anexo 4)

La entrevista se aplicó a dos profesores de octavo grado que conforman la muestra, con el propósito de obtener información sobre el tratamiento de la habilidad demostrar igualdad de triángulos en clases, donde se constatan los siguientes criterios:

<b>Criterios</b>	<b>Por ciento</b>
❖ No se vencen los objetivos que declara el programa con respecto a la habilidad demostrar igualdad de triángulos	100
❖ Se desconoce las acciones y operaciones de la habilidad demostrar igualdad de triángulos	100
❖ Dominan los impulsos didácticos para guiar el pensamiento de los alumnos en la resolución de los ejercicios	50
❖ No es suficiente la cantidad de ejercicios que aparecen en el libro de texto para la unidad temática	100

La entrevista aporta el limitado conocimiento que posee los profesores sobre los elementos metodológicos para el trabajo con la habilidad demostrar igualdad de triángulos, las acciones y operaciones de la habilidad, los impulsos a utilizar para inducir las acciones y operaciones de la habilidad.

**Entrevista al jefe de departamento** (ver anexo 5). Con el propósito de constatar el proceder metodológico en el tratamiento de la habilidad demostrar igualdad de triángulos en clases en octavo grado, se aplica la entrevista al jefe de grado.

En la entrevista realizada al jefe de grado se pudo constatar que no dedica tiempo suficiente a su auto preparación, no se consulta suficiente bibliografía que ayudaría al buen desarrollo del contenido. El análisis metodológico de la unidad se realiza semanalmente luego el análisis previo del contenido y los requisitos necesarios para la selección de los ejercicios de manera que constituya un sistema no se logra y no todos los ejercicios a trabajar en clases son resueltos en el colectivo de grado, solo los de mayores dificultades. Revisión de

**La revisión de documentos** estuvo dirigida a la revisión de planes de clases (ver anexo 1) y las libretas de los alumnos (ver anexo 3). Se constató la situación siguiente.

En el plan de clases la selección de los ejercicios no siempre se realiza considerando el diagnóstico del grupo, los ejercicios propuestos no tienen la variedad necesaria para atender todas las acciones de la habilidad y los impulsos a utilizar no aparecen en el plan de clases.

Se muestrearon las libretas de los 30 alumnos seleccionados donde se pudo apreciar que solamente en 5 clases el 30% de los ejercicios contribuyen a la fijación de la habilidad demostrar. El 100% de los ejercicios trabajados en las clases y las tareas no poseen un nivel de complejidad que requiera del esfuerzo de los alumnos. El 100% de las clases y las tareas se pudo observar que no se atienden correctamente las diferencias individuales de los alumnos, no existe variedad en los ejercicios, todas las libretas tienen iguales ejercicios. En el 70% de las clases se trabaja hasta el nivel reproductivo, en 5 clases para un 30% los ejercicios llegan hasta un nivel aplicativo y en ninguna se llega a desarrollar el

nivel creativo. De las 16 clases revisadas solamente el 50% de las tareas fueron revisadas adecuadamente por el docente, se pudo comprobar que en el resto de las tareas aparecían ejercicios con soluciones incompletas y con errores.

**En la observación a clases.** (ver anexo 2). Se pudo constatar que:

Los ejercicios que se realizan no están dirigidos a todas las acciones de habilidad demostrar y la preparación del maestro para guiar el proceso de enseñanza aprendizaje es insuficiente, los impulsos se improvisan en el aula por lo que en muchas ocasiones no se logra inducir las acciones de la habilidad.

## **2.2 Fundamentación del sistema de ejercicios para el desarrollo de la habilidad demostrar en la unidad temática “Igualdad de triángulos” de Octavo grado.**

A partir de lo antes expuesto la autora realiza un estudio acerca de las diferentes posiciones sobre los ejercicios en Matemática, tipos de ejercicios, importancia, los criterios de selección, así como las funciones que realizan.

La resolución de ejercicios y problemas es una vía fundamental para realizar la enseñanza de la Matemática. Es por ello que los profesores deben conocer formas efectivas de explotar al máximo las posibilidades que estos brindan para contribuir al mantenimiento y desarrollo de habilidades y hábitos; al desarrollo del pensamiento y a la educación ideológica de los estudiantes.

Existen diferentes criterios del concepto ejercicio. La mayoría de los autores lo definen como una exigencia para la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etcétera. La autora asume la definición dada por Horst Muller, el cual entiende como ejercicio en la enseñanza de la Matemática una exigencia para actuar que se caracteriza por el objetivo de las acciones; el contenido de las acciones y las condiciones para las acciones.

La activación del estudio de la Matemática se hace posible mediante la utilización eficaz de la ejercitación, que constituye el medio idóneo para la formación en los alumnos de un sistema de conocimientos, habilidades y hábitos fundamentales y es, además, la forma rectora de la actividad escolar de los estudiantes en el proceso de estudio de esta asignatura.

De la efectividad en la utilización de los ejercicios en la enseñanza de la Matemática depende, en gran medida, el grado de preparación de los alumnos para la actividad práctica en cualquier esfera de la vida social. Al resolver ejercicios matemáticos estructurados en un sistema bien elaborado, se puede lograr una buena preparación matemática en los alumnos, que implica el desarrollo del pensamiento matemático.

La ejercitación hace un gran aporte al cumplimiento de objetivos como la asimilación de relaciones y procedimientos y el desarrollo de capacidades intelectuales, pero para el logro de cada uno de ellos, en particular es necesario un sistema de ejercicios bien determinados y respectivamente una metodología específica para su resolución. Por esto cada ejercicio escolar debe estar dirigido a la realización de objetivos concretos.

Cuando un profesor va a elaborar un sistema de ejercicios para dar cumplimiento a objetivos determinados, debe hacer un análisis cuidadoso de cada uno de los ejercicios en particular y del sistema en su conjunto.

Un sistema de ejercicios puede estar dirigido a la formación de un concepto, a la asimilación de un teorema o la asimilación de procedimientos para la resolución de ejercicios. A partir de esta definición el sistema de ejercicios que se propone en la investigación está dirigido a la asimilación de un teorema y a la asimilación de procedimientos.

El sistema de ejercicios consta con la siguiente estructura:



El **objetivo** del sistema de ejercicios es contribuir al desarrollo de la habilidad demostrar igualdad de triángulos en los alumnos de octavo grado en la asignatura Matemática para la Secundaria Básica.

El sistema de ejercicios que se propone se rige sobre una serie de **principios** que garantizan la coherencia y unidad teórico - metodológica del mismo. Este se fundamenta en el enfoque:

- Dialéctico – materialista: La dialéctica implica, percibir el proceso de preparación y desempeño de los alumnos sujetos a cambios, movimiento y desarrollo. El sistema de actividades didácticas propuesto está encaminado a ofrecer, de manera sucinta y ejemplificada un conjunto de influencias instructivas y educativas dentro de un sistema de relaciones en el que se vinculan las partes entre sí y el todo.
- Sistemática: El sistema de actividades didácticas está integrado por un

conjunto de elementos constituyentes que se relacionan entre sí, de forma tal que si se produce un cambio en uno de los elementos que componen el sistema, dicho cambio afectará a los demás elementos del sistema y al sistema como un todo.

- Integralidad: El sistema de actividades didácticas asume el proceso de enseñanza – aprendizaje en los alumnos de forma integral, o sea, desde la perspectiva que implica una formación integral.
- Vínculo de lo afectivo y lo cognitivo: Cuando se habla de las aspiraciones de los alumnos, en su actividad escolar, se hace referencia, a la necesidad y a los requerimientos de obtener determinados resultados en la realización de esta actividad; de alcanzar determinada posición en el curso de su interrelación con los que lo rodean. Los intereses cognoscitivos, constituyen un aspecto fundamental en la formación integral de la personalidad. Si el contenido de las actividades no le resulta de interés al alumno o la forma en que se hace llegar su contenido no es suficiente, entonces se entorpece el proceso enseñanza - aprendizaje y no contribuye al desarrollo óptimo de los intereses.
- La vinculación de la teoría con la práctica: Se sustenta en la dialéctica que establece la coherencia precisa entre el conocimiento sensorial y el racional, lo que posibilita un salto cualitativo hacia la práctica superior y más acabada, la cual garantiza el verdadero desarrollo del conocimiento científico. Este principio posibilita, que hay que lograr fortalecer los conocimientos teóricos en los alumnos, pero proporcionar que los puedan aplicar con su sello personal en la práctica.

Los ejercicios que se proponen a continuación para trabajar en el desarrollo de la habilidad demostrar han sido en gran medida elaborados por la autora, otros se seleccionaron y/o modificaron de textos complementarios y del libro de texto, atendiendo a las necesidades que se plantean en la unidad temática seleccionada. En la selección de los ejercicios se tuvieron en cuenta la elevación del grado de dificultad de la habilidad demostrar mediante la aplicación de los teoremas sobre la igualdad de triángulos.

El grado de dificultad y complejidad a su vez están muy relacionados con el grado de actualidad de los conocimientos y habilidades necesarios para la solución de un ejercicio. El grado de actualidad depende del momento en que se plantea el ejercicio, y el tiempo que ha transcurrido desde la última vez que se emplearon los términos matemáticos, formas de trabajo, y de pensamientos requeridos para su solución. Eventualmente la actualidad está en dependencia de la frecuencia con que se reactiven estos conocimientos. Así el alumno tiene sus conocimientos actualizados por estar trabajando con ellos o por su repaso continuado.

El grado de actualización puede estar influido por la formulación matemática o lingüística del ejercicio. Una presentación de forma no familiar o acostumbrada en un ejercicio tiene efecto sobre el grado de actualidad. Todos estos requisitos para la selección de los ejercicios constituyen el soporte de trabajo del profesor para estimular el desarrollo intelectual, y la participación consciente y activa de los alumnos en las clases de ejercitación, se trata de aprovechar la presentación de diferentes dificultades y distintas complejidades para despertar y mantener el interés de los alumnos y propiciar de esta forma que cada ejercicio aporte algo nuevo en su aprendizaje. Estos son aspectos que deben ser considerados al seleccionar un sistema de ejercicios.

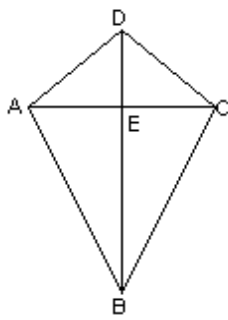
El sistema de ejercicios fue concebido para el tratamiento de la Unidad temática "Igualdad de figuras geométricas" correspondiente a la unidad 2 de octavo grado, con 25 horas clases de ellas 5 están dedicadas a la sistematización de los movimientos en el plano y de las propiedades fundamentales de los triángulos, 1 al concepto de igualdad de figuras geométricas, 4 a los criterios de igualdad de triángulos y 15 a ejercicios de cálculo geométrico, demostración y construcción aplicando los criterios de igualdad de triángulos.

### **Sistema de ejercicios para el desarrollo de la Unidad temática "Igualdad de triángulos" en Octavo grado.**

1. Clasifique las proposiciones siguientes en verdaderas (V) ó falsas (F). Justifique las falsas.
  - a) \_\_\_ Si un triángulo isósceles tiene un ángulo interior de  $60^\circ$  entonces es un triángulo equilátero.

- b) \_\_\_ En un triángulo, al lado mayor se opone el ángulo mayor.
- c) \_\_\_ En un triángulo la suma de sus tres ángulos exteriores es de  $180^\circ$ .
- d) \_\_\_ Si dos triángulos tienen iguales dos ángulos y un lado entonces son iguales.
- e) \_\_\_ Los ángulos complementarios suman  $90^\circ$ .
- f) \_\_\_ Dos triángulos cualesquiera son iguales si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido
- g) \_\_\_ Un paralelogramo con un ángulo interior recto es un rectángulo.
- h) \_\_\_ Dos ángulos son alternos si están situados a distintos lados de la secante y en la misma región (interna o externa) pero no tienen vértice común.

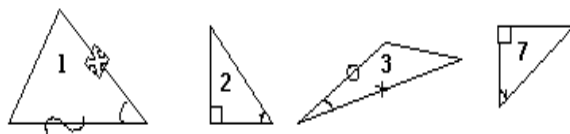
2. En el trapezoide simétrico ABCD se han trazado sus diagonales  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ .



¿Cuántos triángulos aparecen representados en el trapezoide simétrico?

¿Cuántas parejas de triángulos iguales existen en la figura? Denótelos.

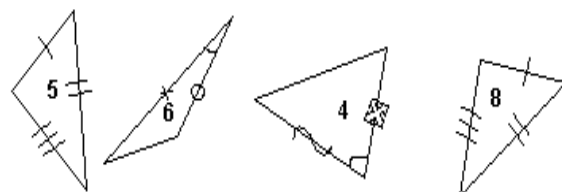
3. En la figura los elementos iguales de los diferentes triángulos se han señalado de la misma forma.



a) Selecciona las parejas de triángulos que no puedas garantizar que son iguales.

\_\_\_ 1 y 4;      \_\_\_ 5 y 6

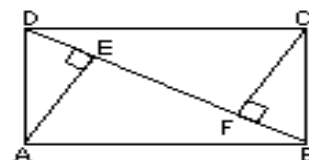
\_\_\_ 2 y 7;      \_\_\_ 5 y 8





b) ¿Cuántas parejas de triángulos iguales se han representado?  
Nómbralas y justifica tu respuesta.

4. En la figura se muestra un rectángulo ABCD y en su interior han quedado representados seis triángulos determinándose tres parejas de triángulos iguales. Se cumple además que  $\overline{AE} \perp \overline{BD}$  y  $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ . (Acosta & et al., 2014, pág. 128)



- a) Nombra las tres parejas de triángulos iguales.  
b) Completa los espacios en blanco atendiendo a los elementos homólogos en las parejas de triángulos iguales.

- El lado homólogo al lado  $\overline{DE}$  es el lado \_\_\_\_ .
- El lado homólogo al lado \_\_\_\_ es el lado  $\overline{AB}$  .
- El lado homólogo al lado  $\overline{AE}$  es el lado \_\_\_\_ .
- El lado homólogo al lado \_\_\_\_ es el lado  $\overline{BD}$  .
- El lado homólogo al lado  $\overline{AD}$  es el lado \_\_\_\_ .

5. En la figura se tiene el triángulo ABC isósceles de base  $\overline{AB}$  y que  $\overline{AD} = \overline{EB}$ ; además se cumple que  $D, E \in \overline{AB}$ . Completa los espacios en blanco (pasos o fundamentaciones), según corresponda para demostrar que  $\triangle ACD = \triangle BCE$ .

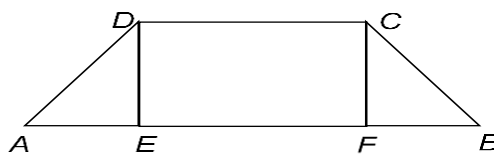


**Demostración:**

En los triángulos ACD y BCE se tiene que:

Igualdades	Fundamentación
(1) $\overline{AC} = \overline{BC}$	
(2)	
(3) $\angle CAD = \angle CBE$	por ser el triángulo ABC isósceles de base $\overline{AB}$ ,
Conclusión: (4) $\triangle ACD = \triangle BCE$	

6. En la figura ABCD es un trapecio isósceles, EFCD es un rectángulo y  $\overline{AF} = \overline{EB}$ . (Acosta & et al., 2014, pág. 127)

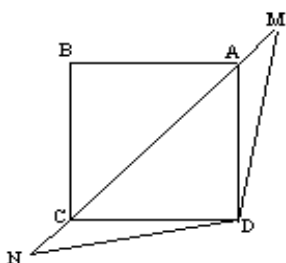


Completa los espacios en blanco para demostrar que:  $\Delta AED = \Delta BCF$

### Demostración

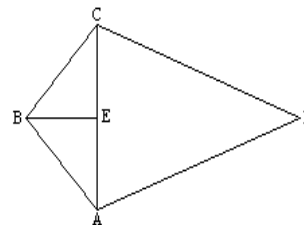
En los triángulos AED y BCF se tiene que:

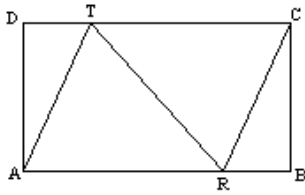
Igualdades	Fundamentación
1) $\overline{AD} = \overline{BC}$ .	
2)	Por ser lados opuestos del rectángulo
3)	Porque son segmentos que tienen como longitud, la diferencia de las longitudes de segmentos respectivamente iguales.
4) Por tanto $\Delta AED = \Delta BCF$	



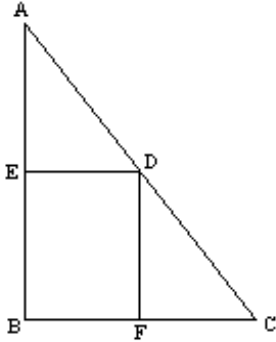
7. En la figura ABCD es un cuadrado y MND un triángulo isósceles de base  $\overline{MN}$ ; además se conoce que los puntos N, C, A y M están alineados y que  $\overline{AM} = \overline{CN}$ . Demuestra que  $\angle CDM = \angle ADN$ .

8. Sea ABCD un trapecoide simétrico, E es el punto medio de  $\overline{AC}$  y  $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ . El  $\angle ABE = 38^\circ$  y  $\angle BAD = 116^\circ$
- Prueba que  $\angle BAC = \angle ACB$ .
  - Calcula la amplitud de cada uno de los ángulos siguientes:  $\angle ABC$ ,  $\angle AD$ ,  $\angle ACD$ , y  $\angle ADC$ .





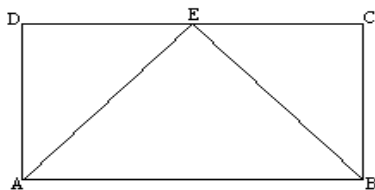
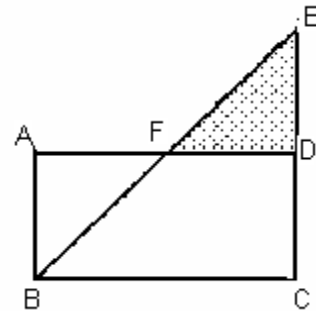
9. Sea ABCD un rectángulo; T y R dos puntos tales que  $T \in \overline{CD}$  y  $R \in \overline{AB}$  con  $\overline{DT} = \overline{BR}$ .  
Demuestra que  $\triangle ART = \triangle TRC$ .



10. En la figura se representa el triángulo ABC rectángulo en B. El punto D es el punto medio de  $\overline{AC}$ ,  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ , y  $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$ .
- Determina qué tipo de cuadrilátero es BFDE. Justifica.
  - ¿Qué representa el punto F para el segmento  $\overline{BC}$ ?
  - Si el área del triángulo AED es igual a  $14,7 \text{ cm}^2$ ; determina las dimensiones, el perímetro y el área del cuadrilátero BFDE, conociendo además que  $\overline{BF} = 4,2 \text{ cm}$ .

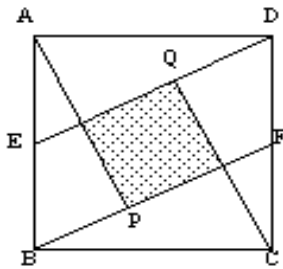
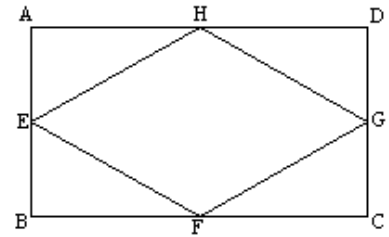
11. Sea ABCD un rectángulo, F es el punto medio de  $\overline{AD}$  y  $\Gamma_{BF} \cap \Gamma_{CD} = \{E\}$ .

- Prueba que F es también el punto medio de  $\overline{BE}$ .
- Si  $\overline{DF} = 4,4 \text{ cm}$ . y  $\overline{DC} = 3,5 \text{ cm}$ .; calcula el área del trapecio BCDF.
- Clasifica el triángulo BCE según sus lados y según sus ángulos. Fundamenta.
- ¿Qué tanto por ciento del área del triángulo BCE se ha sombreado en la figura?



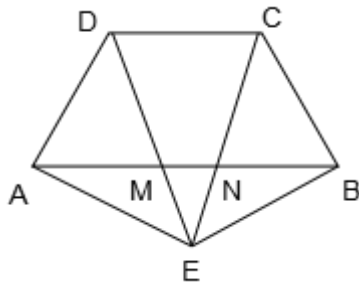
12. Sea ABCD un rectángulo y E el punto medio de  $\overline{DC}$ . Demuestra que el triángulo ABE es isósceles de base  $\overline{AB}$ .

13. En la figura ABCD es un rectángulo y E, F, G y H son los puntos medios de sus lados. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es un rombo.



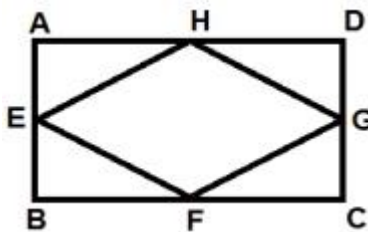
14. En la figura ABCD es un cuadrado con E y F los puntos medios de los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  respectivamente; además  $P \in \overline{BF}$ ,  $Q \in \overline{DE}$  y  $\angle APB = \angle CQD = 90^\circ$ .

- Prueba que el cuadrilátero EBF D es un paralelogramo.
- ¿Qué nombre recibe el cuadrilátero sombreado? Fundamenta.
- Demuestra que  $\overline{AP} = \overline{CQ}$ .



15. En el trapecio isósceles ABCD, él  $\triangle DCE$  es isósceles de base  $\overline{DC}$ , M y N son puntos de  $\overline{AB}$ ; D, M y E; C, N y E son puntos alineados.

a) Prueba que el  $\triangle AEB$  es isósceles de base  $\overline{AB}$ .



16. En la siguiente figura ABCD es un rectángulo, E, F, G y H son los puntos medios de sus lados. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es un rombo.

17. Ejercicio 10 página 128 libro de texto 8º (formular ejercicio según condiciones dadas).

18. Ejercicio 13 página 129 libro de texto 8º (investigar criterios de igualdad de triángulos rectángulos).

### **Precisiones para aplicar el sistema**

Para el trabajo con el sistema de ejercicio en las clases de consolidación es preciso que el profesor tenga en cuenta el contenido a reactivar en el aseguramiento del nivel de partida con el objetivo de propiciarle al alumno una mejor comprensión en el proceso de búsqueda y planteamiento de la solución de los ejercicios. La autora sugiere que las primeras clases de consolidación estén encaminadas a:

- ✓ Identificar triángulos iguales
- ✓ Identificar elementos iguales(homólogos)
- ✓ Elegir los criterios de demostración según las premisas del ejercicio.
- ✓ Argumentar la igualdad de los elementos homólogos
- ✓ Concluir que los triángulos son iguales según criterio utilizado.
- ✓ Fundamentar el criterio utilizado una vez concluida la demostración

Para el trabajo con las acciones de la habilidad demostrar por separados pueden elegirse los ejercicios del 1 al 6 del sistema propuesto, también pueden utilizarse los ejercicios del 1 al 9 del epígrafe 2.3.3 de las páginas 126 a 128

El nivel de complejidad de los ejercicios debe aumentar en el transcurso de las clases para ello se deben proponer ejercicios para:

- Demostrar propiedades de las figuras planas estudiadas donde para demostrarlas se emplee como recurso la igualdad de triángulos.
- Aplicar en situaciones de la vida práctica la igualdad entre dos triángulos.
- Vincular con el cálculo de valores de ángulos, áreas y perímetros, incluyendo el tanto por ciento.

Para lograr el desarrollo de estas acciones se deben realizar los ejercicios del 7 al 18 del sistema u otros similares del epígrafe 2.3.3 como el 11 y 12 página 128 y 129.

El profesor al trabajar con los ejercicios del sistema debe considerar las acciones de la habilidad demostrar igualdad de triángulos:

1. Interpretar el ejercicio propuesto
2. Identificar los triángulos a demostrar
3. Identificar los elementos iguales
4. Elegir el criterio de demostración según las premisas del ejercicio.
5. Argumentar la igualdad de cada elemento
6. Concluir que los triángulos son iguales
7. Fundamentar el criterio utilizado.

Las acciones anteriores pueden ser **inducidas** a través de preguntas tales como:

- ¿Qué es lo dado y qué es lo buscado?
- ¿Qué nos ayudaría a interpretar geoméricamente la situación dada?
- ¿Qué conceptos y teoremas conoces que están relacionados con lo dado y con lo buscado?
- ¿Cuáles de esos conceptos y teoremas puedes utilizar y en qué orden lo harías?
- ¿Cómo quedaría escrita la demostración?
- ¿Cómo procediste para buscar la idea de la demostración?
- ¿Qué acciones te resultaron útiles realizar?
- ¿Existirá otra forma o vía para realizar esta demostración?

### **2.3 Valoración del sistema de ejercicios para la comprensión del texto de los problemas algebraicos.**

La autora valora la efectividad del sistema de ejercicios por diferentes vías: observación del desempeño de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, mediante los ejercicios de tarea para el estudio individual y a través de la prueba pedagógica final.

En la observación del **desempeño de los estudiantes** en las clases donde se proponen estos ejercicios, se aprecia un incremento en el trabajo independiente de los estudiantes, al pasar por los asientos más del 80% de los estudiantes logran realizar la demostración de los ejercicios propuestos.

Los estudiantes manifiestan satisfacción por comprender cómo realizar los ejercicios de demostración y expresan la importancia que tiene analizar las premisas del ejercicio antes de decidir el criterio de igualdad de triángulos a utilizar, también plantean lo necesario que resulta dominar los conceptos y propiedades de las figuras planas

En la resolución de los **ejercicios de tarea** para el estudio individual se observa corrección en las soluciones y seguridad en los estudiantes al exponer las respuestas de los mismos, además defienden con seguridad la demostración realizada.

Se aplica una **prueba pedagógica final** (ver anexo 7) y se comparan los resultados con los de la prueba pedagógica inicial (ver anexo 6)

Esta prueba garantiza valorar si el sistema de ejercicios puede aplicarse sobre la población utilizada, a partir de la significación en el cambio que determina en el proceso de enseñanza aprendizaje de la habilidad igualdad de triángulos a partir del estudio del cambio que se produce en la muestra seleccionada.

El comportamiento de las dimensiones para la habilidad igualdad de triángulos en octavo grado, se organiza en una tabla de frecuencias, a partir de los resultados obtenidos al evaluar cada indicador.

Indicadores	DIMENSIONES					
	COD		SAD		EAVO	
	F <sub>i</sub>	f <sub>i</sub>	F <sub>i</sub>	f <sub>i</sub>	F <sub>i</sub>	f <sub>i</sub>
1	15	0.5	12	0.4	14	0.5
2	10	0.3	16	0.5	13	0.4
3	5	0.2	2	0.1	3	0.1
<b>Total</b>	<b>30</b>	<b>1,0</b>	<b>30</b>	<b>1,0</b>	<b>30</b>	<b>1,0</b>

Leyenda: **COD**: caracterización del objeto a demostrar.

**SAD**: selección de los argumentos que corroboran el objeto de demostración.

**EAVO**: elaboración de los razonamientos que relacionan los argumentos que demuestran la veracidad del objeto de demostración.

Estos resultados evidencian con respecto al diagnóstico inicial un cambio muy favorable, pues al menos del 80% de los alumnos logró en la dimensión I ubicarse en el indicador 1 y 2. En las dimensiones 2 y 3 la situación es superior, resultó ubicarse el 90% de los estudiantes en los indicadores 1 y 2.

Al comparar los resultados de la prueba pedagógica inicial y final, se observa que el 76,7% de los estudiantes ofrecen respuestas superiores a las del diagnóstico. Para constatar la efectividad del sistema de ejercicios se aplicó una **prueba binomial** de los signos para muestras grandes.

ESTUDIANTES (número)	Prueba pedagógica		Signo
	Inicial	Final	
1	A	B	-
2	A	C	-
3	D	C	+
4	A	B	-
5	A	C	-
6	B	D	-
7	A	B	-
8	A	C	-
9	A	C	-
10	A	C	-
11	D	B	+
12	A	B	-
13	A	B	-
14	A	C	-
15	A	B	-
16	D	C	+
17	A	B	-
18	C	B	+
19	A	C	-
20	A	B	-
21	B	D	-
22	A	D	-
23	D	C	+
24	A	C	-
25	A	D	-
26	B	A	+
27	A	B	-
28	A	C	-
29	D	C	+
30	A	B	-

Hipótesis nula:  $H_0$  El sistema de ejercicios no es eficiente.

Hipótesis alternativa:  $H_1$  El sistema de ejercicios es eficiente.

**Datos**

$n = 30$

Estadígrafo:  $x = 7$  (cantidad de signos +)



$P_0 = 0.5$  Probabilidad de eficiencia

$Q_0 = 0.5$  Probabilidad de no eficiente

Se calcula  $nP_0 = 30 \cdot 0,5 = 15$  Como  $x < nP_0$  se utiliza la siguiente regla de decisión:

Rechazar  $H_0$  si  $P(Z < z) < \frac{\alpha}{2}$

No rechazar  $H_0$  si  $P(Z < z) \geq \frac{\alpha}{2}$

Para ello se utilizó el siguiente estadígrafo:  $Z = \frac{x - np_0 + 0,5}{\sqrt{nP_0Q_0}}$

$$Z = \frac{x - np_0 + 0,5}{\sqrt{nP_0Q_0}} = \frac{7 - 15 + 0,5}{\sqrt{30 \cdot 0,25}} \approx \frac{-7,5}{\sqrt{7,5}} \approx \frac{-7,5}{2,74} \approx -2,74$$

$$Z = -2,74$$

$$P(Z < z) = P(Z < -2.74) = 0.0031$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025, \text{ luego } 0,0031 < 0,025 \text{ se tiene entonces que } P(Z < z) < \frac{\alpha}{2}$$

Por tanto se rechaza  $H_0$ . Por lo tanto, el sistema de ejercicios es eficiente.

Luego el resultado de esta prueba nos confirma que el sistema de ejercicios es eficiente. Al hacer un análisis de los resultados obtenidos en la prueba pedagógica inicial y la final, se observa que existen avances notables en cuanto a la comprensión, esto se evidencia a partir de los resultados obtenidos de los estudiantes.

# CONCLUSIONES

Luego de cumplir las tareas de investigación planificadas y de haber realizado un estudio minucioso del problema planteado, se arriba a las siguientes conclusiones:

- La teoría del conocimiento del materialismo dialéctico, el enfoque histórico cultural de Vigosky, el papel de la actividad y la comunicación en el proceso de enseñanza aprendizaje al emplear el programa heurístico general y el pensamiento pedagógico cubano, constituyeron las premisas esenciales para argumentar las posiciones asumidas en la investigación con respecto al desarrollo de la habilidad demostrar igualdad de triángulos y conformar el sistema de ejercicios para estimular el protagonismo de los estudiantes en el desarrollo de las acciones a ejecutar.
- Los resultados obtenidos a partir del diagnóstico investigativo evidencian la importancia del desarrollo de habilidades de los estudiantes. Se manifiestan insuficiencias y limitaciones en su conocimiento y empleo adecuado de la misma en su desempeño diario, aspecto que acentúa sobremanera la necesidad de proponer un resultado en este campo.
- Los ejercicios elaborados para el desarrollo de la habilidad demostrar en la Unidad temática “Igualdad de triángulos” en los alumnos de Octavo grado de la Escuela Secundaria Básica Urbana “Protesta de Baraguá”, tuvo en cuenta las, carencias y potencialidades de estos sobre la temática, así como, las condiciones para las acciones, que están dadas por las exigencias que el ejercicio plantea a la actividad mental de los alumnos para su solución.
- La aplicación del sistema de ejercicios en las clases de forma diferenciada permitió hacer consciente en los estudiantes sus dificultades y que podían ser resueltas con la realización de los ejercicios propuestos. Los resultados obtenidos en la prueba pedagógica inicial y final se procesan y los resultados expresan que el mismo es efectivo en las condiciones de esta población.

# RECOMENDACIONES

Partiendo de las conclusiones expuestas se ofrecen las siguientes recomendaciones:

1. Continuar profundizando en la sistematización de los referentes teóricos y metodológicos que sustentan la elaboración de un sistema de ejercicios para el desarrollo de la habilidad demostrar igualdad de triángulos en el Octavo grado, de la escuela, así como valorar las modificaciones que se producen como resultado de su aplicación.
2. Que los docentes que imparten Matemática en Octavo grado tomen en consideración el sistema de ejercicios propuestos para la planificación de las clases con el objetivo de lograr el desarrollo de la habilidad demostrar en la unidad temática trabajada.
3. Extender la aplicación de la propuesta de sistema de ejercicios para el desarrollo de la habilidad demostrar igualdad de triángulos en todos los grupos de octavo grado del municipio Matanzas.
4. Presentar los resultados de esta investigación en otras secundarias básicas e insertarla desde la preparación metodológica de los docentes, enriqueciéndola y perfeccionándola con las experiencias de la práctica.
5. Continuar trabajando en esta temática y divulgar los resultados en eventos científicos de carácter pedagógico y de forma específica en la Didáctica de la Matemática.

# BIBLIOGRAFÍA

- Abreu, Y. (2018). Sistema de Ejercicios para el desarrollo de habilidades matemáticas en el trabajo con variables en los estudiantes de décimo grado del IPU "Enrique Hart Dávalos". Trabajo de Diploma. Facultad de Educación. Universidad de Matanzas. Cuba.
- Álvarez, C. (1989). Fundamentos teóricos de la dirección del Proceso Docente Educativo en la Escuela Superior Cubana, Ministerio de Educación Superior, La Habana.
- Ballester, S. y Coautores. (2001). Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. Ciudad de La Habana: Ed. Pueblo y Educación.
- Barreras, F. (2003). Modelo pedagógico para la formación y desarrollo de habilidades, hábitos y capacidades. IPLAC. Ciudad de la Habana.
- Brito, H. (1987) Psicología general para los Institutos Superiores Pedagógicos (Tomo II). Ciudad de la Habana: Ed. Pueblo y Educación.
- Colectivo de Autores. (2004). Sistema de acciones para las habilidades fundamentales de la actividad de estudio. Fac : de PGI de Sec/Bas. ISP "Juan Marinello". Matanzas.
- Conferencias Sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática. (1982). (Segunda Parte). Ciudad de la Habana: Ed. Pueblo y Educación.
- Cuba. Ministerio de Educación. (1989). Orientaciones metodológicas de Matemática décimo grado. Luis Campistrous... [et.al]. La Habana: Ed. Pueblo y Educación.
- Cuba. Ministerio de Educación. (2005). La Enseñanza - Aprendizaje de Español, Matemática e Historia. La Habana: Ed. Molinos Trade, SA.
- Cuba. Ministerio de Educación. (2006). Programa de Matemática. 8<sup>vo</sup> grado. MINED. Ed: Pueblo y Educación.
- Cuba. Ministerio de Educación. (2017). Programa de Matemática. Octavo grado. ICCP. Ed: Pueblo y Educación.
- Chávez, J. (1996). Bosquejo histórico de las ideas educativas en Cuba. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
- Diccionario de Filosofía. (1984). Moscú: Ed. Progreso.
- Enciclopedia Autodidacta Interactiva Océano (Tomo 3).

- Engels, F. (1960) *Anti-Dühring*. Uruguay: Ediciones Pueblos Unidos S. A.
- Fernández, E. (2012). Sistema de Ejercicios para el desarrollo de habilidad demostrar en los alumnos de octavo grado de la ESBU “Héroes del Moncada” del municipio Matanzas. Tesis de Maestría. Universidad de Ciencias Pedagógicas. Matanzas. Cuba.
- Ferrer, M. (2000). La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana. Tesis de Doctorado. Instituto Superior Pedagógico “Frank País García”, Santiago de Cuba.
- Ferrer, M. Y Rebolgar, A. (1995). Cómo dirigir el proceso de formación de habilidades matemáticas. ISP “Frank País García” Santiago de Cuba.
- Galperin, P. (1981) Sobre el método de formación de las acciones intelectuales por etapas. *Antología de la Psicología Evolutiva y Pedagógica*. Ed. Progreso. Moscú.
- Hernández Gallo, T., García Bello, B., & Pérez Delgado, E. M. (2017). El proceso de formación de habilidades matemáticas. *Monografías*, 2.
- Holguín, C. d. (2012). *Ecured Portable*. Retrieved 01 05, 2017 from Ecured Portable: <http://www.ecured.com.cu>
- Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (IPLAC). Programa del Curso: Modelo para la formación y desarrollo de habilidades, hábitos y capacidades. s/f.
- Jungk, W. (1982). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2 (Primera Parte). Ciudad de la Habana: Ed. Pueblo y Educación.
- Lara, F. (1990). Metodología para la planeación de sistemas: un enfoque prescriptivo. En Cuaderno de planeación universitaria. México.
- Martínez, L. (2008): El sistema de actividades como resultado científico en la maestría en ciencias de la educación: ¿ser o no ser? Soporte digital.
- Molina, L. (2004) Propuesta de actividades para estimular el procesamiento de información en la unidad “Números con signos” en Octavo grado. Trabajo de diploma. Matanzas.

- Montes De Oca, L. (2003). Propuesta didáctica para el tratamiento de proposiciones y demostraciones en Geometría del Espacio. Tesis Maestría. ISP "Juan Marinello", Matanzas.
- Müller, H. (1997). El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática. Folleto. ISP "Frank País García". Ciencias Pedagógicas, La Habana.
- Petrovski, A. V. Psicología pedagógica y de las edades. — La Habana: Ed. Pueblo y Educación.
- Programa Del Partido Comunista De Cuba. (1987). Editora Política, Ciudad de La Habana.
- Regueira, D. (2003). Una propuesta de estrategia didáctica para la formación y desarrollo de habilidades en la escritura de las ecuaciones químicas en Octavo grado. Tesis presentada en opción al Título de Master en Enseñanza de las Ciencias en la Educación Superior: Mención Química. Universidad de La Habana.
- Revista El Correo De La Unesco. (1989). Título: Viaje al país de las Matemáticas. Noviembre.
- Rodríguez, M y Martínez, M. (1998). Matemática 8 EGB (libro de texto). Chile: McGraw - Hill.
- Rodríguez, M. (2005). Carta Metodológica al PGI ¿Sabes tus alumnos demostrar? ¿Cómo enseñarles? Soporte digital.
- Romero, C. (2000). Para que aprendan más, la relación métodos - medios en la formación de habilidades del trabajo independiente. En Educación. No. 99. La Habana, Enero – Abril.
- Silvestre, M. y Zilberstein, J. (2000). Aprendizaje y categoría de una didáctica integradora. ICCP.
- Software Educativo. (2003). Elementos de Matemática. Colección "El Navegante".
- Talizina, N. F. (1985). La Formación de la actividad cognoscitiva de los escolares. Dpto. de estudios para el perfeccionamiento de la Educación Superior. Universidad de la Habana.
- Tesis y Resoluciones del Primer Congreso del Partido Comunista de Cuba. (1978). Editora Política, Ciudad de La Habana.

Trujillo, L. A. (2013). La comprensión del texto de los problemas algebraicos en los estudiantes de décimo grado del IPU "José Smith Comas" del municipio Cárdenas. Trabajo de Diploma. Universidad de Ciencias Pedagógicas. Matanzas. Cuba.

# ANEXOS

## ANEXO 1.

### Guía para la revisión de los planes de clases.

#### Datos Generales.

Escuela: \_\_\_\_\_ Municipio: \_\_\_\_\_ Grado \_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_

Nombre del maestro \_\_\_\_\_

Tipo de formación: Lic. \_\_\_\_ En formación \_\_\_\_ Otra \_\_\_\_

Transita con los alumnos: Sí\_\_ No \_\_ Asignatura: \_\_\_\_\_

#### Aspectos a revisar.

1. Tiene los planes de clases.
2. Deriva y fórmula correctamente los objetivos de la clase.
3. Tiene en cuenta el diagnóstico del grupo para planificar las actividades en su plan de clase.
4. Se detectan errores de contenido en sus planes de clases.
5. Se evidencia que utiliza métodos y procedimientos que orientan al alumno hacia la búsqueda del conocimiento hasta llegar a las acciones de la habilidad.
6. Se proponen actividades para cada una de las acciones de la habilidad demostrar.
7. Se observa que estimula la búsqueda de información en otras fuentes, propiciando el desarrollo del pensamiento reflexivo y la independencia cognoscitiva.
8. Se tiene en cuenta utilizar niveles de ayuda que permitan al alumno reflexionar sobre la actividad a realizar.
9. Planifica, orienta, controla y evalúa el estudio individual (De existir alguno negativo debe especificarlo).
10. Planifica actividades que contribuyen al desarrollo de las posibilidades comunicativas de sus alumnos.



11. Planifica actividades que contribuyen a garantizar la máxima productividad de cada alumno durante toda la clase.

## ANEXO 2

Guía de observación de clase

### Datos Generales.

Escuela: \_\_\_\_\_ Provincia: \_\_\_\_\_ Municipio:  
\_\_\_\_\_

Grado \_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_ Matrícula \_\_\_\_ Asistencia \_\_\_\_

Nombre del maestro: \_\_\_\_\_ Asignatura: \_\_\_\_\_

Tipo de formación: Lic. \_\_\_\_\_ Emergente \_\_\_\_\_ Otra \_\_\_\_\_

Asunto de la clase:  
\_\_\_\_\_

Nombre del Observador: \_\_\_\_\_

**Objetivo:** Observar cómo se le da tratamiento en las clases de matemática al desarrollo de la habilidad demostrar "Igualdad de triángulos" en el octavo grado mediante los indicadores declarados como guía para la observación.

### Indicadores.

- Se proponen actividades de interpretación e identificación de triángulos iguales.
- Se proponen actividades para la utilización de los criterios de igualdad.
- Se proponen actividades para argumentar y fundamentar las relaciones entre lados y ángulos de triángulos iguales.
- Se proponen actividades donde sea necesario fundamentar la igualdad a partir del criterio utilizado
- Se proponen actividades donde se utilicen todas las invariantes funcionales de la habilidad.
- Preparación del maestro para guiar correctamente el proceso del desarrollo

de la habilidad demostrar “Igualdad de triángulos”

### **ANEXO 3**

#### **Guía para revisar las libretas**

1. Observar si se realizan ejercicios que contribuyan al aprendizaje del método empleado para demostrar.
2. Valorar si los ejercicios y tareas realizadas poseen elevado nivel de complejidad que requieren de los estudiantes: tiempo y esfuerzo.
3. Comprobar si en cada clase de consolidación se trabajan las diferencias individuales.
4. Valorar si en las clases de consolidación se trabajan ejercicios donde se utilicen las invariantes funcionales de la habilidad.
5. Comprobar si las tareas han sido revisadas debidamente por el profesor.

### **ANEXO 4**

#### **Guía de entrevista al profesor.**

Objetivo: Constatar qué conocimientos teóricos (o de sentido común) poseen los profesores sobre los requisitos que se deben tener en cuenta para desarrollar la habilidad demostrar en la unidad temática “Igualdad de figuras geométricas” en Octavo grado.

Profesor acudimos a usted por conocer su experiencia y resultado en la enseñanza de la Matemática en la Secundaria Básica, por tal razón sus opiniones y sugerencias se considerarán de mucha utilidad para mejorar el trabajo en el tratamiento de la unidad temática “Igualdad de figuras geométricas” que se imparte en Octavo grado.

Le pedimos que responda con sinceridad a las siguientes preguntas.

Parte Principal	
Nombre y apellidos:	
Años de experiencia:	
Grado que imparte:	
Nombre de la ESBU:	
<p>Con relación a la unidad temática: "Igualdad de triángulos" responda:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿En qué unidad se trabaja?</li> <li>• ¿De cuántas horas clases dispone?</li> <li>• ¿Qué tiempo dedica a la preparación de las clases de "Igualdad de triángulos"?</li> <li>• ¿Consideras que se vencen los objetivos declarados en el programa respecto a la habilidad demostrar igualdad de triángulos?</li> <li>• ¿Cómo guía a sus alumnos para encontrar la idea de solución de los ejercicios?</li> <li>• ¿Cuáles son las acciones y operaciones de la habilidad?</li> <li>• ¿Consideras suficiente la cantidad de ejercicios que aparecen en el libro de texto para la unidad temática?</li> </ul>	

## ANEXO 5.

### Guía de entrevista al jefe de grado.

Objetivo: Constatar el tiempo de preparación de los profesores del grado para el trabajo con la unidad temática Igualdad de figuras geométricas.

Profesor acudimos a usted por conocer como aprovechan los profesores el tiempo disponible para la preparación y como se manifiesta en la calidad de la clase, por tal razón sus opiniones y sugerencias se considerarán de mucha utilidad para mejorar el trabajo en el tratamiento de la unidad temática "Igualdad de figuras geométricas" que se imparte en Octavo grado.

Le pedimos que responda con sinceridad a las siguientes preguntas.

- 1- ¿Qué tiempo dedican los profesores de Matemática a su auto preparación?
- 2- ¿Se desarrolla el análisis metodológico de la unidad con anticipación? ¿Quién es el responsable?
- 3- ¿Qué requisitos tienen en cuenta para la selección de los ejercicios a trabajar en clases?
- 4- ¿Se resuelven los ejercicios en la preparación metodológica?
- 5- ¿Se evalúa en algún momento la efectividad de las preparaciones?

## ANEXO 6

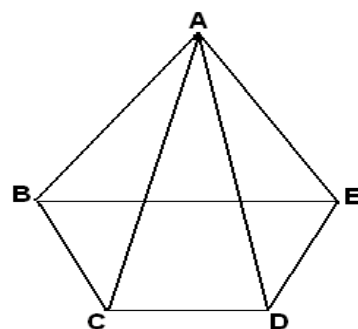
### Prueba pedagógica inicial.

Objetivo: Constatar el estado actual del desarrollo de la habilidad demostrar en los alumnos de octavo grado.

Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

En la siguiente figura, el triángulo ACD es isósceles de base  $\overline{CD}$ , el triángulo ABE es isósceles de base  $\overline{BE}$ , BCDE es un trapecio isósceles de bases  $\overline{CD}$  y  $\overline{BE}$ . Demuestra que:  $\triangle ABC = \triangle ADE$ . (Manual de ejercicios Pág.317 Ej.1)



## ANEXO 7

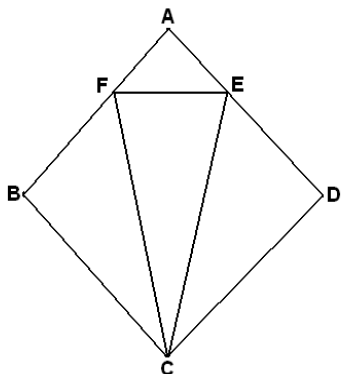
Prueba pedagógica final realizada a los alumnos luego de aplicado el sistema de ejercicios.

Objetivo: Constatar el desarrollo de la habilidad demostrar en los alumnos de octavo grado luego de la aplicación del sistema de ejercicios.

Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

En la siguiente figura ABCD es un rombo, el triángulo AEF es isósceles de base  $\overline{EF}$ . Prueba que el triángulo EFC es isósceles. (Manual de ejercicio. Pág. 323. Ej. 9)



## ANEXO 8

### Plan temático de la unidad 2.3 octavo grado

Contenidos	Horas clases
<b>2.3 Igualdad de figuras geométricas</b>	<b>25 h</b>
Sistematización sobre los movimientos en el plano y de las propiedades fundamentales de los triángulos y los cuadriláteros.	5h

Concepto de igualdad de figuras geométricas a través del análisis de objetos de la vida cotidiana.	1h
Criterios de igualdad de triángulos. Búsqueda por la vía reductiva. Demostración del teorema ( <i>l. a. l</i> )	4h
Ejercicios de cálculo geométrico, demostración y construcción aplicando los criterios de igualdad de triángulos. Problemas	15h

## ANEXO 9

### Potencial de ejercicios para la unidad temática 2.3.3 “igualdad de triángulos”.

Ejercicios	Acciones y operaciones
Ejercicio 1 página 126	Identificar triángulos iguales y fundamentar criterio
Ejercicio 2 página 126	Identificar triángulos iguales
Ejercicio 3 página 127	Identificar triángulos iguales
Ejercicio 4 página 127	Elegir criterio de igualdad
Ejercicio 5 página 127	Completar demostración
Ejercicio 6 página 128	Completar demostración
Ejercicio 7 página 128	Nombrar parejas de triángulos iguales y fundamentar
Ejercicio 8 página 128	Probar la igualdad de dos triángulos por diferentes criterios
Ejercicio 9 página 128	Identificar lados homólogos en triángulos iguales
Ejercicio 10 página 128	Formular ejercicios según condiciones
Ejercicio 11 página 129	Probar igualdad y propiedades de lados homólogos, cálculo de perímetro
Ejercicio 12 página 129	Probar igualdad, clasificar triángulos y cálculo de área
Ejercicio 13 página 129	Investigar criterios sobre igualdad de triángulos rectángulos

## Anexo 10. Indicadores para evaluar las dimensiones.

<b>Dimensiones</b>	<b>Indicadores</b>
Caracterización del objeto a demostrar. <b>(COD)</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>3. Identifica los triángulos a demostrar</li><li>4. Comete algunas imprecisiones al identificar los triángulos.</li><li>5. No logra identificar los triángulos.</li></ol>
Selección de los argumentos que corroboran el objeto de demostración. <b>(SAD)</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Identifica los elementos iguales y elige el criterio conveniente</li><li>2. Comete algunas imprecisiones al identificar el criterio.</li><li>3. No logra identificar el criterio conveniente.</li></ol>
Elaboración de los razonamientos que relacionan los argumentos que demuestran la veracidad del objeto de demostración. <b>(EAVO)</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Argumenta la igualdad de cada elemento, concluye y fundamenta.</li><li>2. Comete algunas imprecisiones en la argumentación o fundamentación.</li><li>3. No logra argumentar ni concluir la fundamentación.</li></ol>